УВОД у АЛГЕБАРСКУ ТОПОЛОГИЈУ

САДРЖАЈ

I Основни појмови у топологији

деф. Нека је $X \neq \emptyset$ скуп, $\mathcal{P}(X)$ партитивни скуп од X (тј. скуп свих подскупова од X) и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова т.д.

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,

(3) $U_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе фамилије $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

- Често пишемо и само т. пр. X уместо $(X, \mathcal{T})$
- Индукцијом из (2): $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Пример (1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ антидискретна топологија

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топологија

(3) (M, d) метрички простор

$\mathcal{T} = \{U \subseteq M \mid U \text{ отворен у } (M, d)\}$

топ. индукована метриком

(4) $(\mathbb{R}^n, d)$ d - стандардна метрика

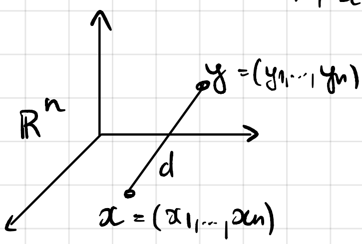
уобичајена (стандардна) топологија

(5) $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

На овом курсу ћемо углавном разматрати „лепе" тополошке просторе, тј. подскупове од $\mathbb{R}^n$ са стандардном топологијом (наслеђеном од стандардне метрике).

Пример Желимо да видимо како изгледа стандардна топ. $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}^n$ наслеђена од метрике d дате са

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$



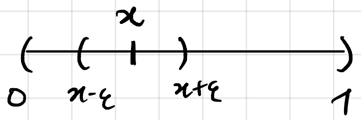
„како изгледа $\mathcal{U}$" = "шта су отворени скупови у $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$"

$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n \mid d(x,y)<r\}$ - отворена кугла са центром у x полупречника r

$U\in\mathcal{U}$ тј. U је отворен акко:

$$(\forall x\in U)(\exists\varepsilon>0)\ B(x,\varepsilon)\subseteq U$$

нпр. • $(0,1)$ је отворен у $\mathbb{R}$ јер за $x\in(0,1)$ узмемо $\varepsilon:=\frac{1}{2}\min\{x,1-x\}$ па је $B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq(0,1)$

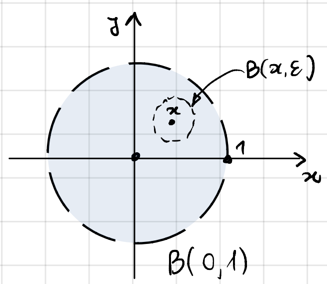


• $[0,1)$ није отворен јер за $x=0$ не можемо наћи ε, тј.

$$(\forall\varepsilon>0)\ B(0,\varepsilon)\not\subseteq[0,1)$$

• $(0,1)\cup(3,5)$, $(-\infty,8)$, $(-\infty,+\infty)$ су отворени у $(\mathbb{R},\mathcal{U})$

• $B(0,1)$ је отворен у $(\mathbb{R}^2,\mathcal{U})$:



деф. Кажемо да је скуп $F \subseteq X$ затворен у $(X, \mathcal{T})$ ако је $F^c \in \mathcal{T}$. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$, тј. $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}\}$.

Теорема Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. и $\mathcal{F}$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(2) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$,

(3) $F_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

доказ: Де-Морганови закони + деф. $\mathcal{F}$. $\boxtimes$

Пример (1) $[0,1]$, $[0,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $\{3\}$, $[4,5] \cup [7,8]$ су затворени у $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

(2) $[0,1)$ није ни отворен ни затворен

(3) $\emptyset$ и $\mathbb{R}$ су и отворени и затворени

деф. Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. Скуп G је околина тачке $x \in X$ ако

$$(\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq G$$

Околински систем: $\mathcal{O}(x) := \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq G\}$

Ако $G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}$, G је отворена околина.

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in A$ унутрашња тачка од A ако је $A \in \mathcal{O}(x)$. Унутрашњост (интериор) скупа A је скуп свих унутрашњих тачака:

$$\operatorname{int} A = \{x \in A \mid A \in \mathcal{O}(x)\}$$

особине: (1) $\operatorname{int} A \subseteq A$

(2) $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$

(3) $\operatorname{int} A = A \iff A \in \mathcal{T}$

(4) $B \subseteq A,\ B \in \mathcal{T} \Rightarrow B \subseteq \operatorname{int} A$

(5) $\operatorname{int} A = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$

Другим речима, $\operatorname{int} A$ је највећи отворени скуп садржан у A.

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ адхерентна тачка скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset$. Затворење (адхеренција) скупа A је скуп свих адх. тачака:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset\}$$

(користи се и ознака $\mathrm{cl}\, A$)

особине: (1) $A \subseteq \bar{A}$

(2) $\bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A = \bar{A} \iff A \in \mathcal{F}$

(4) $A \subseteq F \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

(5) $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \in \mathcal{F}}} F$

Другим речима, $\bar{A}$ је најмањи затворен скуп који садржи A.

деф. Граница (руб) скупа $A \subseteq X$ је $\partial A \overset{\text{def}}{=} \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$.

особине: (1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

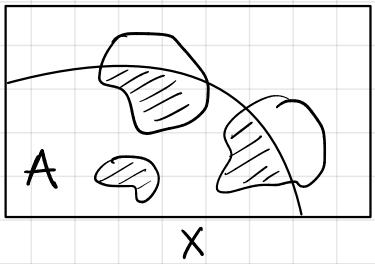
(2) $\bar{A} = \operatorname{int} A \sqcup \partial A$

Пример Сви подскупови су у $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$

A	$(0,1)$	$[0,1)$	$[0,1]$	$(-\infty,3)$	$(1,2)\cup\{3\}$	$(0,1)\cup(1,2)$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{int} A$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(-\infty,3)$	$(1,2)$	$(0,1)\cup(1,2)$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
$\overline{A}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$(-\infty,3]$	$[1,2]\cup\{3\}$	$[0,2]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
∂A	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$

Нека је $(X,\mathcal{T})$ т. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$



Став $(A, \mathcal{T}_A)$ је тополошки простор.

доказ: по деф. ▨

деф Топологију $\mathcal{T}_A$ називамо релативном топ. или топологијом индукованом од простора X и кажемо да је $(A, \mathcal{T}_A)$ потпростор од $(X, \mathcal{T})$.

Став $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$

доказ: $G \in \mathcal{F}_A \iff (\exists U \in \mathcal{T})\ G = A \setminus U$

$$\iff (\exists U \in \mathcal{T})\ G = A \setminus (U \cap A) = A \cap (U \cap A)^c = A \cap (U^c \cup A^c)$$

$$= (A \cap U^c) \cup (A \cap A^c) = A \cap U^c$$

$$\iff (\exists F \in \mathcal{F})\ G = A \cap F$$ ▨

деф Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр. Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

деф Пресликавање $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ је **непр. у тачки $x_0\in X$** ако $(\forall V\in\mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(V)\in\mathcal{O}(x_0)$.

Теорема Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$. Следећи искази су еквивалентни:

(1) f је непр.

(2) $(\forall x\in X)$ f је непр. у x.

(3) $(\forall F\in\mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$.

(4) $(\forall A\subseteq X)\ f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

(5) $(\forall B\subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$

Став Ако су $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ непр., онда је и $g\circ f:X\to Z$ такође непрекидно.

доказ Нека је $W\in\mathcal{T}_Z$

$$(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\in\mathcal{T}_Y\text{ јер је } g \text{ непр.}})\in\mathcal{T}_X \text{ јер је } f \text{ непр.}$$

$\Rightarrow g\circ f$ је непр. $\blacksquare$

Став Ако је $f:X\to Y$ непр. и $A\subseteq X$, онда је $f|_A:A\to Y$ непр.

Теорема [о лепљењу] Нека су X, Y тпр., $A_\alpha\subseteq X$, $\alpha\in\mathcal{A}$, $X=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}A_\alpha$. Нека је $f:X\to Y$ тд. $f_\alpha:=f|_{A_\alpha}:A_\alpha\to Y$ непр. $\alpha\in\mathcal{A}$.

(1) $(\forall\alpha\in\mathcal{A})\ A_\alpha\in\mathcal{T}_X\Rightarrow f$ је непр.

(2) $\mathcal{A}$ коначан и $(\forall\alpha\in\mathcal{A})\ A_\alpha\in\mathcal{F}_X\Rightarrow f$ је непр.

деф. Кажемо да је $h: X \to Y$ хомеоморфизам ако је h бијекција и h и h^{-1} су непр.
Ако постоји хомео. између X и Y пишемо $X \approx Y$.

Став $\approx$ је рел. еквиваленције.

доказ (Р) $\mathbb{1}: (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ је хомео. $\Rightarrow X \approx X$

(С) $X \approx Y \Leftrightarrow h: X \xrightarrow{\approx} Y \Leftrightarrow h^{-1}: Y \xrightarrow{\approx} X \Leftrightarrow Y \approx X$

(Т) Нека је $h_1: X \xrightarrow{\approx} Y$ и $h_2: Y \xrightarrow{\approx} Z$. Онда је $h_2 \circ h_1: X \to Z$ такође хомео. па је $X \approx Z$. $\blacksquare$

Користимо и ознаке: $X \overset{h}{\approx} Y$ и $h: X \approx Y$ за $h: X \to Y$ хомео.

Пример (1) $(0,1) \approx (a,b)$ (за произвољно $a < b$)

$h: (0,1) \to (a,b)$, $h(x) = a + x(b-a)$ непр.

$h^{-1}: (a,b) \to (0,1)$, $h^{-1}(y) = \dfrac{y-a}{b-a}$ непр.

$\Rightarrow h: (0,1) \xrightarrow{\approx} (a,b)$

(2) Слично $(0,1] \approx (a,b]$, $[0,1) \approx [a,b)$, $[0,1] \approx [a,b]$

(3) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbb{R}$

$h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{tg} x$ непр.

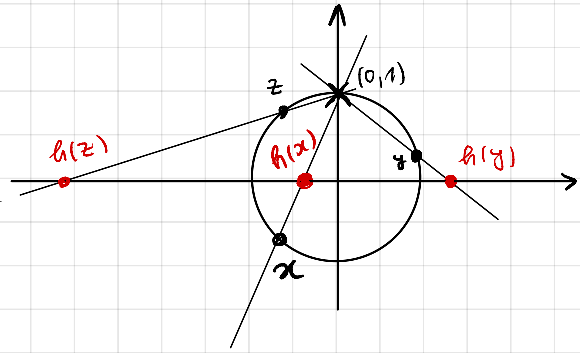
$h^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $h^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ непр.

(4) Из (1) и (3) следи $(0,1) \approx \mathbb{R}$

(5) $S^1 \setminus * \approx \mathbb{R}$

S^1 = јединична кружница у равни

$*$ = произвољна тачка на S^1



буо. $* = (0,1)$

стереографска пројекција: тачка $x \in S^1 \setminus \{(0,1)\}$ се слика у пресек x-осе и праве кроз x и $(0,1)$

Прецизније, $h(x,y) = \left(\frac{x}{1-y}, 0\right) \in \mathbb{R}\times\{0\} \approx \mathbb{R}$, тј. $h: S^1\setminus * \to \mathbb{R}$

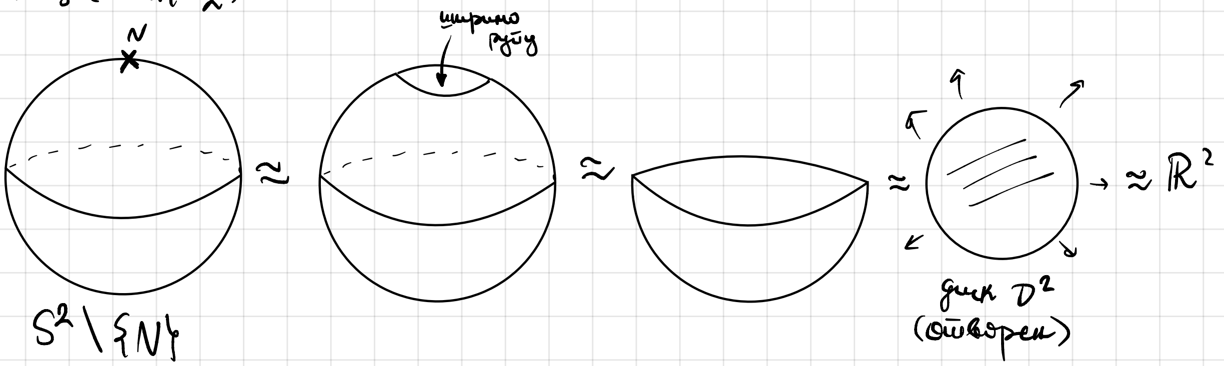
тачка на x-оси

$$h^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad h^{-1}: \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{(0,1)\}.$$

$\Rightarrow \quad h : S^1 \setminus * \approx \mathbb{R}.$

(6) Претходни пример се може уопштити: $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$

Нпр. за $n=2$:



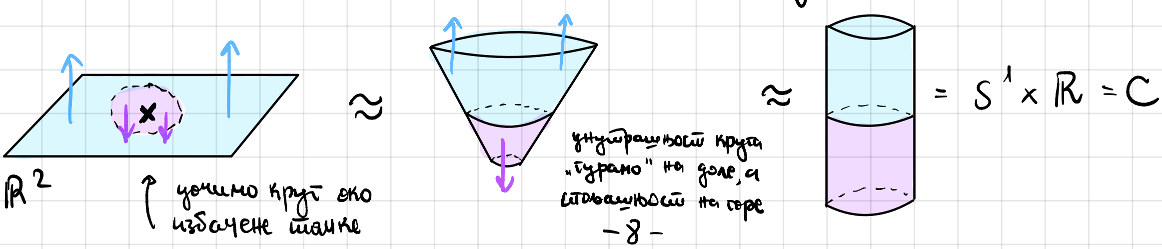
(7) Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$. Означимо са Γ_f график од f, тј.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тада је $\Gamma_f \approx X$. Хомеоморфизам $h: \Gamma_f \to X$ је дат са

$$h(x, f(x)) := x.$$

(8) $\mathbb{R}^2 \setminus * \approx C$ ($C = S^1 \times \mathbb{R}$ - цилиндар)



(9) $\operatorname{int} D^2 \approx \mathbb{R}^2$

(10) $\operatorname{int} D^n \approx \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $(D^n =$

подсетник:

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ – јединични диск димензије n

$\operatorname{int} D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ – отворени диск димензије n

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ – јединична сфера

притом: $S^n = \partial D^n$ и $D^n = \operatorname{int} D^n \sqcup S^n$.

Компактност

деф Нека је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од X. Кажемо да је $\mathcal{U}$ покривач од X ако је $X = \bigcup \mathcal{U}$. Ако је додатно $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ отворен покривач.

Ако су $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ два покривача од X т.д. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, кажемо да је $\mathcal{U}_1$ потпокривач од $\mathcal{U}_2$.

деф Простор X је компактан ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач. Прецизније, за сваку фамилију $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отворених скупова важи

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \implies (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A)\ X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}.$$

деф Нека је $A \subseteq X$. Фамилија $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ је покривач скупа A ако је $A = \bigcup \mathcal{U}$, а ако је додатно $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ отворен покривач.

деф. $A \subseteq X$ је компактан у X ако сваки отворен покривач од A има коначан потпокривач.

Став Нека је $A \subseteq X$. A је компактан скуп у X акко је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан као топ. простор.

Став Нека је X компактан и $f: X \to Y$ непрекидно и „на". Тада је и Y компактан.

доказ: Нека је $Y = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathcal{T}_Y$, $\alpha \in A$.

Тада $X = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \xRightarrow{X \text{ комп.}} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A)\ X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$

$\Rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \Rightarrow Y$ је компактан. ☒

Последица Компактност је тополошка инваријанта.

Последица Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ компактан, онда је и $f(A)$ компактан.

доказ: Применимо став на $f|_A : A \to f(A)$. ☒

деф Фамилију свих компактних подскупова од X означавамо са $\mathcal{K}_X$.

Став Ако је X компактан, онда $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

(Затворен подскуп компакта је компактан.)

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ није компактан: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ - нема коначан потпокривач

(2) X коначан $\Rightarrow X$ је компактан

Заиста, X је коначан, па је и $\mathcal{P}(X)$ коначан, а тим пре и $\mathcal{T}_X$. То значи да је сваки отворен покривач већ коначан, па је сам себи коначан потпокривач, те је X компактан.

Став У $\mathbb{R}^n$ скуп је компактан акко је затворен и ограничен.

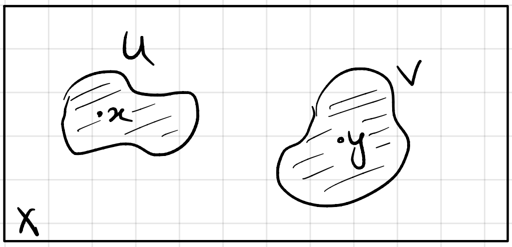
Пример $[0,1]$, $[3,5] \cup [7,8]$ су компактни у $\mathbb{R}$

$(0,1)$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $[0,1)$ нису компактни у $\mathbb{R}$

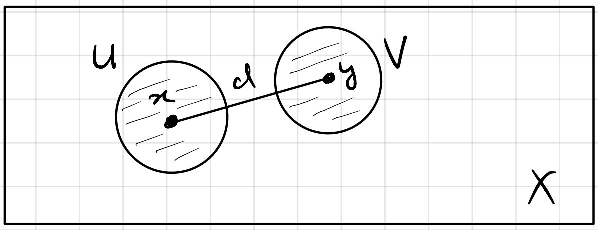
Хаусдорфови простори

деф Кажемо да је X Хаусдорфов простор (или T_2-простор) ако $(\forall x,y \in X)\ x \neq y \Rightarrow (\exists U,V \in \mathcal{T})\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$.

Дакле, у Хаусдорфовом простору сваке две различите тачке можемо раздвојити отвореним скуповима.



Пример Сваки метрички простор је Хаусдорфов. Заиста, нека је $x \neq y$ и $d = d(x,y)$. Онда узмемо $U = B(x, \frac{d}{3})$, $V = (y, \frac{d}{3})$



Став Својство T_2 је тополошка инваријанта.

доказ Нека је X T_2 и $h: X \to Y$ хомеоморфизам.

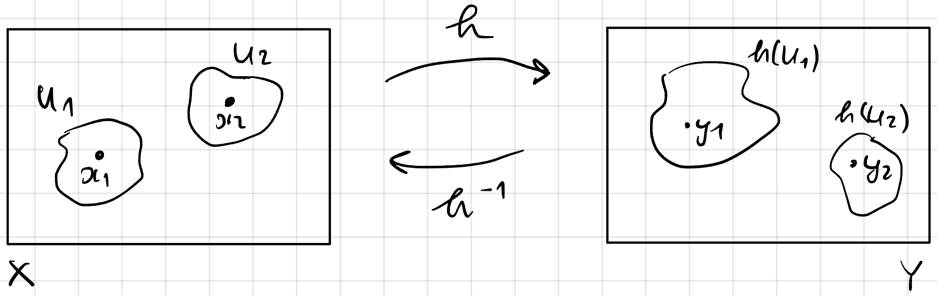
Нека су $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ и $x_1 = h^{-1}(y_1)$, $x_2 = h^{-1}(y_2)$.

X је T_2 па раздвојимо x_1 и x_2 у X:

$(\exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X)\ x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$

Тада $h(U_1), h(U_2) \in \mathcal{T}_Y$ и раздвајају y_1 и y_2:

$$y_1 \in h(U_1),\quad y_2 \in h(U_2),\quad h(U_1) \cap h(U_2) = \emptyset.$$



■

Став Потпростор T_2 простора је T_2.

Став Ако је X T_2, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$

Последица Ако је X компактан и T_2, онда $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

Став Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, X компактан, Y T_2, онда је f хомеоморфизам.

Повезаност

деф. Топ. пр. $(X, \mathcal{T}_X)$ је **повезан** ако не постоји пар скупова $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ тд. $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$.

Ако постоје овакви скупови, кажемо да је X **неповезан**, а пар (U, V) називамо **дисконекцијом** од X.

Ако је (U, V) дисконекција од X, онда су U и V и отворени и затворени.

Пример (1) $X = [0,1] \cup [3,5]$ је неповезан

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ је повезан

(3) $(X, \mathcal{T}_d)$ је повезан акко $|X| = 1$.

Став Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) X је повезан;

(2) не постоји непр. и „на" $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(\{0,1\},\mathcal{T}_d)$;

(3) $\mathcal{T}\cap\mathcal{F}=\{\emptyset, X\}$.

доказ (1) ⇒ (3): пкс. $(\exists U\in(\mathcal{T}\cap\mathcal{F})\setminus\{\emptyset,X\})$

$\Rightarrow (U,U^c)$ је дисконекција од X ↯

(3) ⇒ (1): пкс. X није повезан и (U,V) нека дисконекција, тј. $U,V\in\mathcal{T}_X\setminus\{\emptyset\}$, $U\cap V=\emptyset$, $U\cup V=X$.

$$\Rightarrow U=V^c\in\mathcal{F}_X \Rightarrow U\in\mathcal{T}_X\cap\mathcal{F}_X \quad ↯$$

(1) ⇒ (2): пкс. $\exists f: X\to\{0,1\}$ непр. и „на"

$U:=f^{-1}(\{0\})\in\mathcal{T}_X\setminus\{\emptyset\}$ (јер $\{0\}\in\mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и f непр.)

$V:=f^{-1}(\{1\})\in\mathcal{T}_X\setminus\{\emptyset\}$ (јер $\{1\}\in\mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и f непр.)

$\Rightarrow (U,V)$ је дисконекција од X ↯

(2) ⇒ (1): пкс. (U,V) дисконекција од X.

дефинишемо $f|_U=0$, $f|_V=1$.

f је непр. на основу теореме о лепљењу. ↯ ▨

Пример $\mathbb{Q}$ је неповезан. Једна дисконекција би била:

$$\mathbb{Q}=\left(\mathbb{Q}\cap(-\infty,\sqrt{2})\right)\sqcup\left(\mathbb{Q}\cap(\sqrt{2},+\infty)\right)$$

Став Ако је X повезан и $f:X\to Y$ непр. и „на", онда је и Y повезан.

Последица Ако је $f:X\to Y$ непр. и $A\subseteq X$ повезан, онда је и $f(A)$ повезан.

Пример (1) Сви интервали су повезани:

$$(0,1),\ [0,1],\ [0,1),\ (-\infty,1],\ (-\infty,1),\ [1,+\infty),\ (1,+\infty)$$

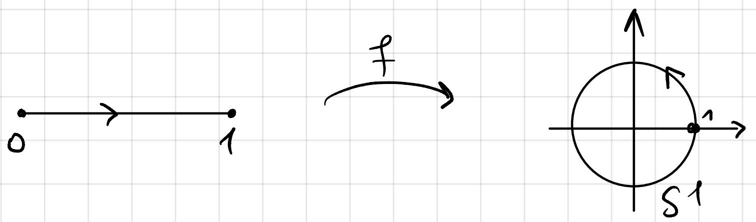
(2) Кружница S^1 је повезана.

Заиста, кружницу можемо видети као слику при пресликавању

$$f:[0,1] \xrightarrow{\text{"на"}} S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

датом са

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



Знамо да је слика повезаног скупа при непр. пресликавању повезана, па је $f([0,1]) = S^1$ повезан.

Дефинишимо релацију $\sim$ на топ. пр. X:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} (\exists A \subseteq X)\ x,y \in A \text{ и } A \text{ је повезан.}$$

Став $\sim$ је релација еквиваленције.

деф. Класе еквиваленције релације $\sim$ називамо компонентама повезаности. Класу тачке $x \in X$ означавамо са C_x.

Пример (1) $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ има 4 компоненте повезаности:

$$C_0 = (-\infty,1),\ C_{\frac{1}{2}} = (1,2),\ C_{\frac{5}{2}} = (2,3) \text{ и } C_{17} = (3,+\infty)$$

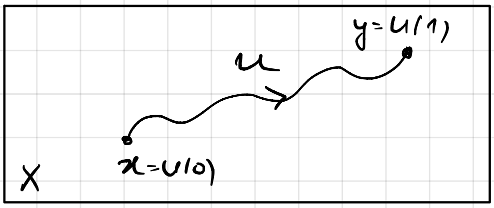
(2) $\mathbb{R}$ има 1 компоненту повезаности (јер је повезан)

Надаље користимо ознаку $I = [0,1]$.

деф Пут у простору X је непрекидно пресликавање $u : I \to X$. Тачка $u(0)$ је почетак, а $u(1)$ крај пута u.

деф. Простор X је путно повезан ако су сваке две тачке из X спојене путем, тј.

$$(\forall x, y \in X)(\exists u : I \to X \text{ непр.})\ u(0) = x,\ u(1) = y.$$



Став Ако је X путно повезан и $f : X \to Y$ непр. и „на", онда је и Y путно повезан.

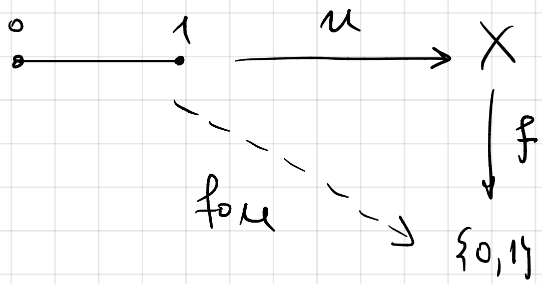
Последица Ако је $f : X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ путно повезан, онда је и $f(A)$ путно повезан.

Став X путно повезан $\Rightarrow$ X повезан.

доказ ппс. Нека је $f : X \to \{0,1\}$ непр. тј.

$$(\exists x, y \in X)\quad f(x) = 0,\ f(y) = 1$$

Нека је $u : [0,1] \to X$ пут од x до y, тј. $u(0) = x$, $u(1) = y$.



$f \circ u$ је непр. и „на"
$[0,1]$ је пов. $\Rightarrow$ $\{0,1\}$ је повезан ↯ ∎

Пример X повезан $\not\Rightarrow$ путно повезан

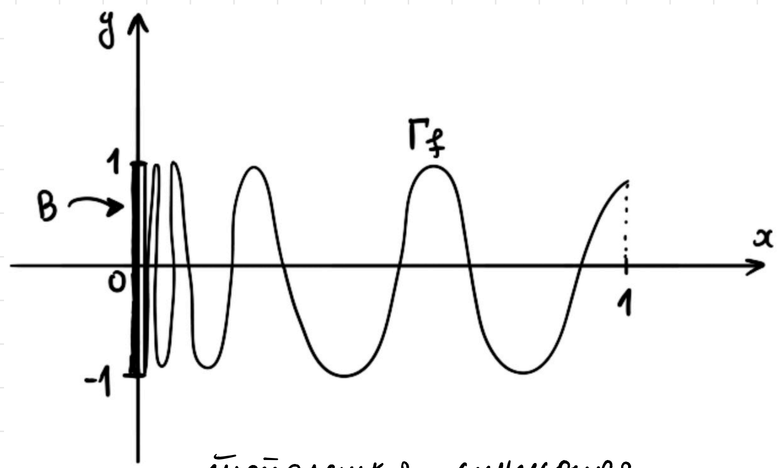
Нека је $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ дато са $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ и

$\Gamma_f=\{(x,f(x))\mid x\in(0,1]\}$ график ове функције.

Γ_f је путно повезан $\Rightarrow$ Γ_f је повезан $\Rightarrow$ $X:=\overline{\Gamma_f}$ је повезан

Није тешко видети да је

$$X=\underbrace{\left(\{0\}\times[-1,1]\right)}_{\overset{!!}{B}}\cup\Gamma_f$$



тополошка синусоида

X није путно повезан јер тачке са B не можемо спојити путем са тачкама са Γ_f.

Тополошки производ

Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y,\mathcal{T}_Y)$ топ. пр.

$$\mathcal{T}_{X\times Y}\overset{def}{=}\{W\subseteq X\times Y\mid(\forall(x,y)\in W)(\exists U\in\mathcal{T}_X)(\exists V\in\mathcal{T}_Y)\ (x,y)\in U\times V\subseteq W\}$$

$$=\Big\{\bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha\times V_\alpha)\ \Big|\ (\forall\alpha\in A)\ U_\alpha\in\mathcal{T}_X,\ V_\alpha\in\mathcal{T}_Y\Big\}$$

Став $\mathcal{T}_{X\times Y}$ је једна топологија на $X\times Y$.

деф. Топ. пр. $(X\times Y,\mathcal{T}_{X\times Y})$ је тополошки производ простора X и Y, а $\mathcal{T}_{X\times Y}$ називамо топологијом производа или Тихоновљевом топологијом.

Став Пројекције $p_X : X\times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ дате са

$$p_X(x,y) := x, \quad p_Y(x,y) := y$$

су непрекидне и отворене.

Став $f : Z \to X\times Y$ је непр. акко су непр. $p_X \circ f$ и $p_Y\circ f$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] & X\times Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & X \\ & & Y \end{tikzcd}$$

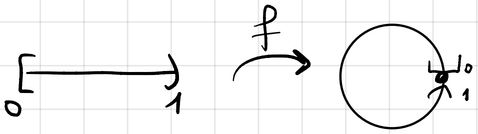
Количничка пресликавања и количнички простори

деф. Пресликавање $f : X \to Y$ је количничко ако је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(Приметимо: смер „$\Rightarrow$" је непрекидност.)

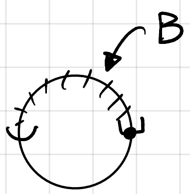
Пример $f : [0,1) \to S^1$, $\quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



f је непр. и „на", али не важи услов „$\Leftarrow$" па није количничко.

За $B := f([0,\frac{1}{2}))$ имамо:

$$f^{-1}(B) = [0, \tfrac{1}{2}) \in \mathcal{T}_{[0,1)} \not\Rightarrow B \in \mathcal{T}_{S^1}$$



Став Пресликавање $f : X \to Y$ је количничко акко је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{F}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X.$$

Став Ако је f непр., „на" и отворено/затворено, онда је f количничко.

Нека је X т.пр. и Y скуп и $f: X \to Y$ „на“.
На Y дефинишемо финалну топологију помоћу f:

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_f = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}$$

Став $\mathcal{T}_f$ јесте топологија на Y.

<u>доказ</u> по деф. ▨

Став $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ је количничко.

<u>доказ</u> директно из деф. ▨

Став $\mathcal{T}_f$ је најшира топ. т.д. је f непр.

Количнички простор задајемо на 3 начина.

① Помоћу релације екв.

Нека је X т.пр. и $\sim$ рел. екв. на X. Природна пројекција $\pi: X \to X/_\sim$, $x \mapsto [x]$ нам даје топ. на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} := \mathcal{T}_\pi = \{ V \subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}.$$

Пар $(X/_\sim, \mathcal{T}_{X/_\sim})$ је количнички простор.

② Помоћу подскупа.

Нека је X т.пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо рел. $\sim$ на X:

$$x \sim y \overset{def}{\iff} x = y \ \vee\ x, y \in A$$

$\sim$ је рел. екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{def}{=} X/_\sim \quad \text{и} \quad \mathcal{T}_{X/A} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}$$

Пар $(X/A, \mathcal{T}_{X/A})$ је количнички простор.

③ Помоћу пресликавања.

Нека су X, Y тпр. и $f : X \to Y$ непр. Дефинишемо $\sim$ на X:

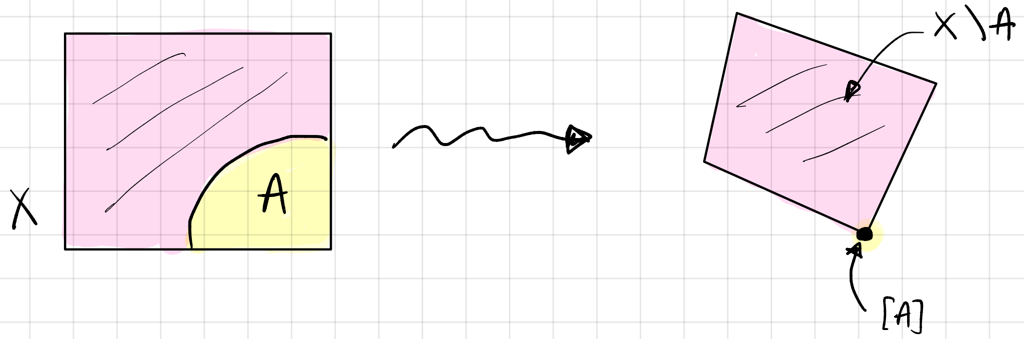
$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

$\sim$ је рел. екв. и

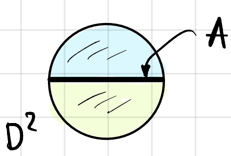
$$X/f \overset{def}{=} X/\sim, \quad \mathcal{T}_{X/f} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/\sim}.$$

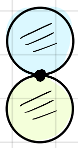
Пар $(X/f, \mathcal{T}_{X/f})$ је количнички простор.

Пример $A \subseteq X$, $X/A =$ „скупимо A у тачку"

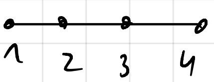
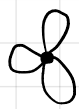


(1) $X/X \approx *$

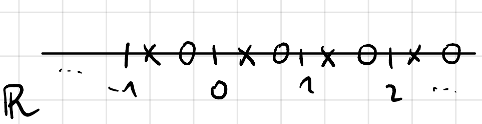
(2) 

$D^2/A =$ 

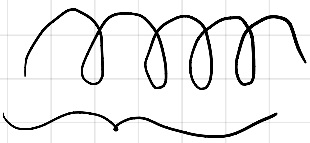
(3) $D^n/\partial D^n = S^n, \quad n \in \mathbb{N}$

(4) $[1,4]/\{1,2,3,4\} =$  $/\{1,2,3,4\} \approx$ 

Пример $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \overset{def}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}$



$/\sim \quad \approx S^1$

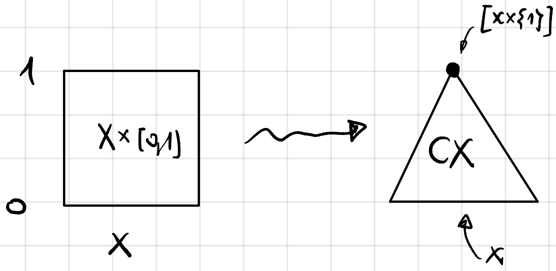
илустрација  $\to$  S^1 („намотамо" $\mathbb{R}$ на S^1)

$\approx \mathbb{R}$

Конструкције нових т.пр.

① Конус простора X

$$CX \overset{def}{=} X\times[0,1] / _{X\times\{1\}} = X\times[0,1] / _{\substack{(x,1)\sim(y,1)\\ (\forall x,y\in X)}}$$

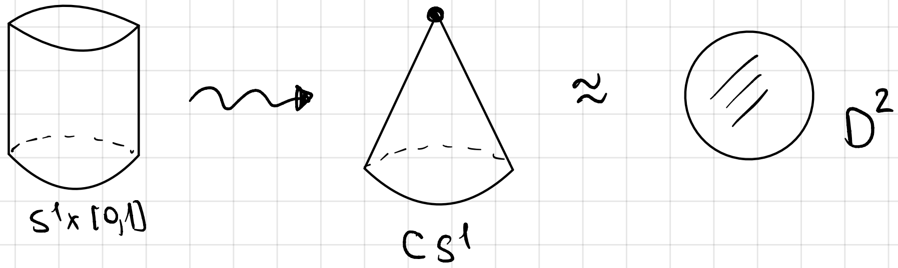


Имамо утапање $i : X \hookrightarrow CX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а може и $i(x) = [(x,t)]$, $t\in[0,1)$)

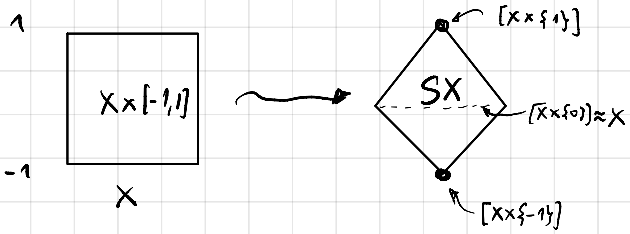
Пример $CS^1 = S^1\times[0,1] / _{S^1\times\{1\}} = D^2$



Генерално: $CS^n = D^{n+1}$.

② Суспензија простора X

$$SX = X\times[-1,1] / _{\substack{(x,1)\sim(y,1),\\ (x,-1)\sim(y,-1),\\ (\forall x,y\in X)}}$$

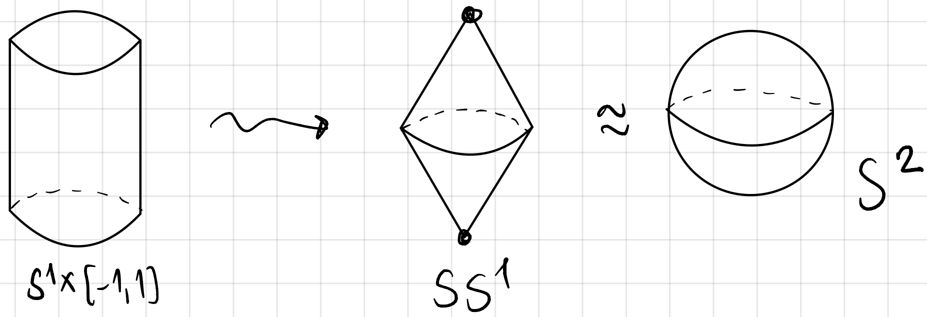


Имамо утапање $i : X \hookrightarrow SX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а може и $i(x) = [(x,t)]$, $t\in(-1,1)$)

Пример $SS^1 = S^1 \times [-1,1]/_{\sim} \approx S^2$



Генерално $SS^n \approx S^{n+1}$

③ Дисјунктна унија X и Y: $(X \sqcup Y, \mathcal{T}_{X\sqcup Y})$

$$\mathcal{T}_{X\sqcup Y} = \{ U \in X \sqcup Y \mid U \cap X \in \mathcal{T}_X,\ U\cap Y \in \mathcal{T}_Y \}$$

④ Простор са базном тачком (X, x_0)

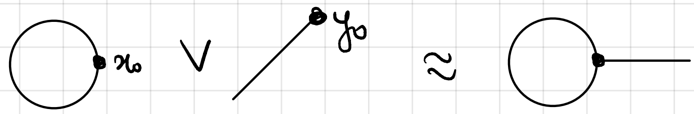
$x_0 \in X$ – произвољна тачка из X

(овде ништа не конструишемо, само уводимо појам базне тачке)

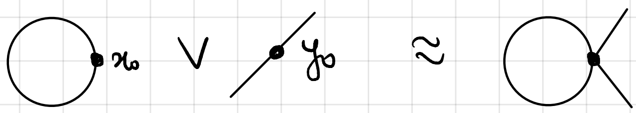
⑤ Букет простора X и Y

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ базне тачке

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) \overset{def}{=} X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$$

Пример (1) 

$\not\approx$

(2) 

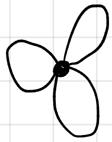
Букет зависи од избора базне тачке!

У неким просторима је свеједно шта је базна т. и тада пишемо само $X \vee Y$. тј.

$$(\forall x_0, x_1 \in X)(\forall y_0, y_1 \in Y)\ (X, x_0) \vee (Y, y_0) \approx (X, x_1) \vee (Y, y_1)$$

$\Rightarrow \quad X \vee Y \overset{def}{=} (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, за $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ произвољно.

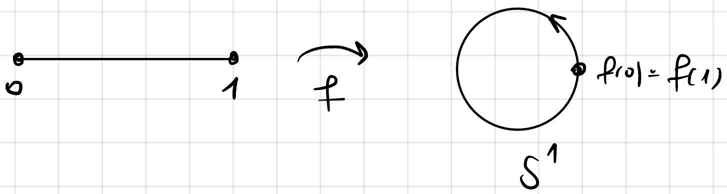
(углавном се и срећемо баш са овом ситуацијом.)

Пример $[1,4]/\{1,2,3,4\} \approx$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

Примери количничких простора

① **Кружница**

$f: I \to S^1, \qquad f(t) \overset{def}{=} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

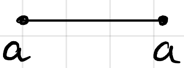


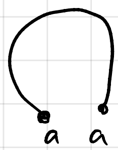
f је непр. и „на", I је компактан, S^1 је T_2 $\Rightarrow$ f је кол.

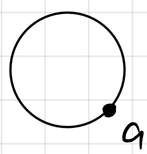
$\Rightarrow \quad I/_f \approx S^1$. Шта је I/f? За $s,t \in I$:

$$s \sim t \iff f(s) = f(t) \iff (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$$
$$\iff t = s \ \vee \ t,s \in \{0,1\}$$

Дакле, I/f је сегмент $[0,1]$ коме су почетак и крај идентификовани:

$I/f =$ 

$\approx$ 

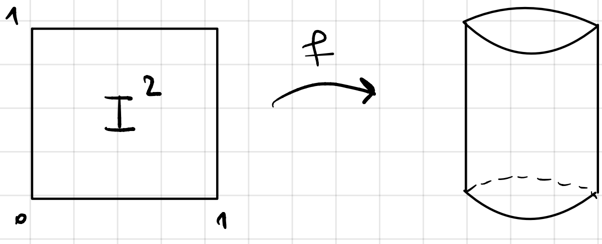
$\approx$ 

$= S^1$

ова слика значи да „лепимо" a и a

② цилиндар

$$f: I^2 \to S^1 \times I, \quad f(u,v) \overset{\text{def}}{=} (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$$



$S^1 \times I$

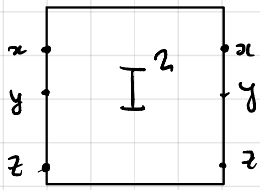
f је количничко (непр., „на", компакт → T_2)

$\Rightarrow \quad I^2/f \approx S^1 \times I$

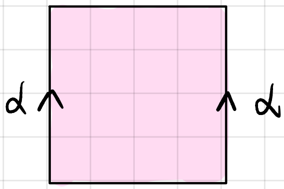
Класе у I^2/f:

$$(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2) \iff \left(u_1 = u_2 \ \vee \ u_1,u_2 \in \{0,1\}\right) \wedge \ v_1 = v_2$$

Дакле, идентификујемо тачке: $(0,v) \sim (1,v)$, $v \in I$

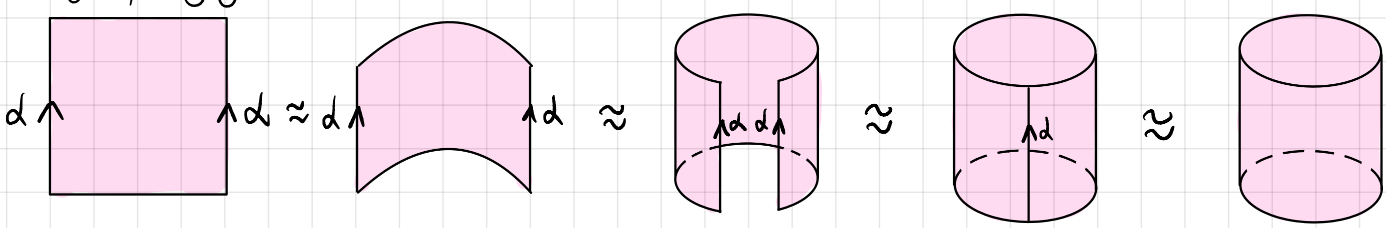


Користимо ознаку:



ово значи да лепимо дужи означене са α у смеру стрелица

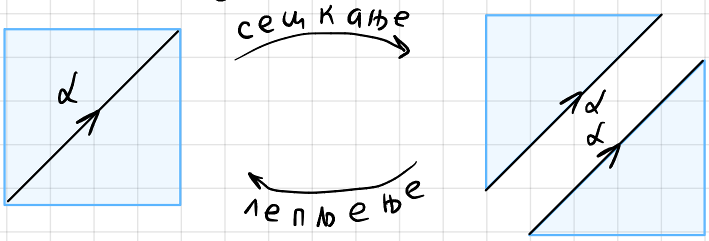
илустрације:



$S^1 \times I$

деф. Количнички простор хомеоморфан неком топ. пр. X је његов количнички модел.

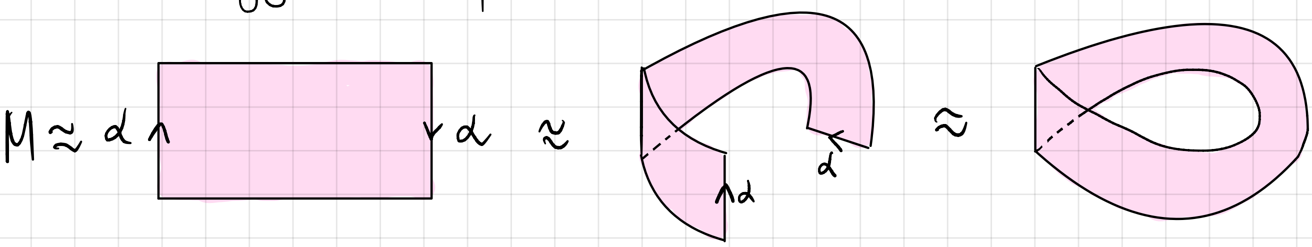
Количнички модели нам служе да простор представимо на лакши начин, нпр. често тродимензионалне објекте можемо представити раванским моделом (као цилиндар у претходном примеру). Имамо две (међусобно инверзне) операције са кол. моделима:



(Обе ове слике представљају квадрат.)

Сецкањем и лепљењем можемо трансформисати моделе (али све време добијамо међусобно хомеоморфне просторе).

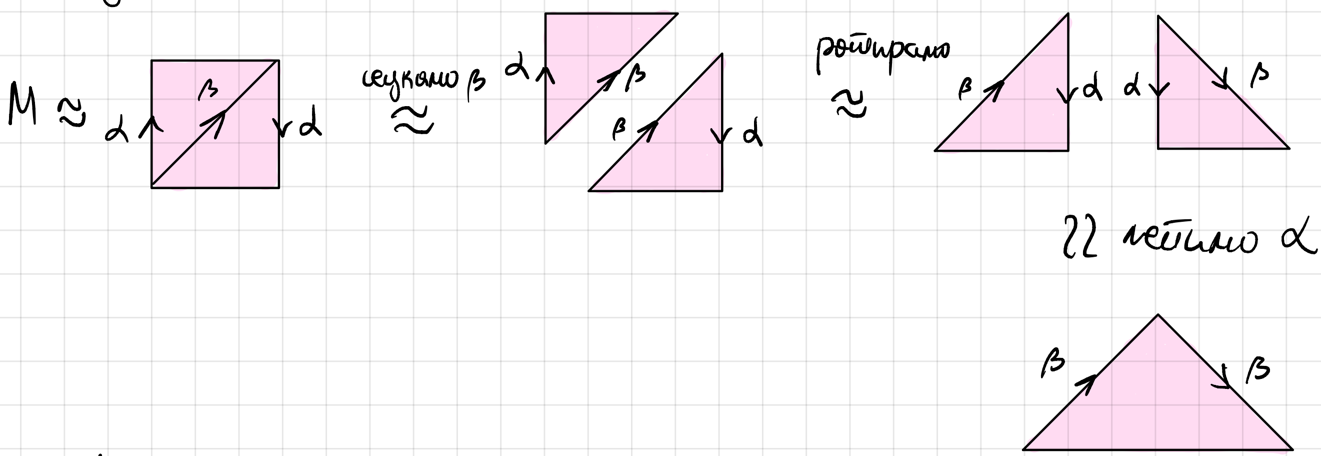
③ Мебијусова трака M



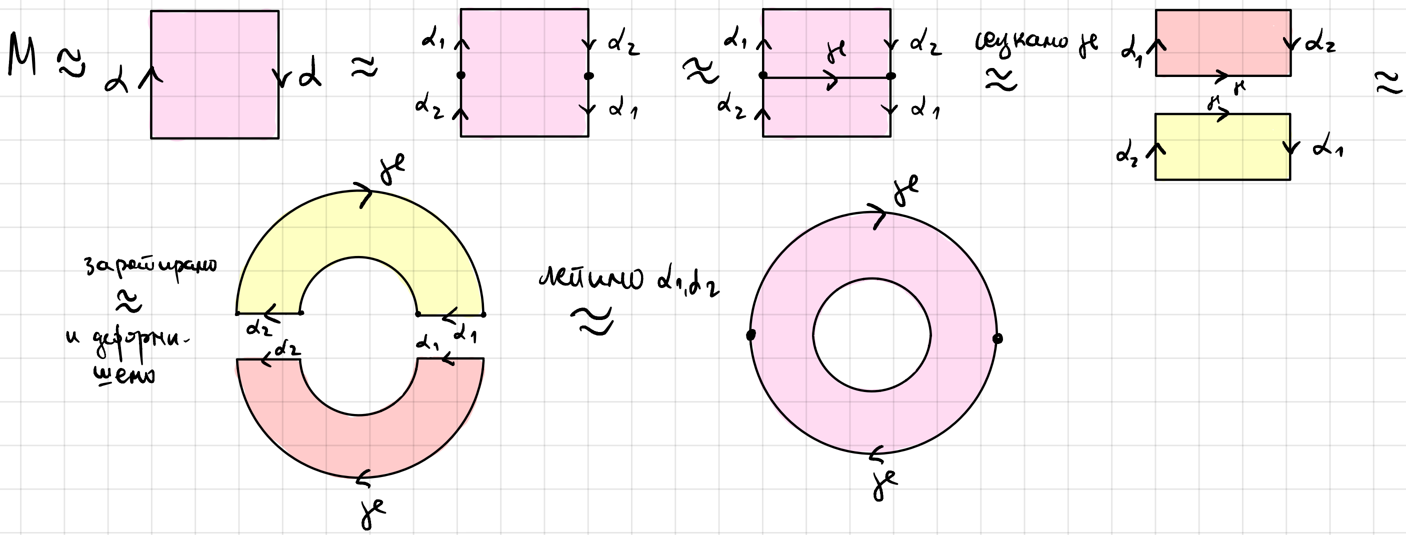
основни модел за M

M има још 2 корисна модела које добијамо сецкањем и лепљењем овог модела

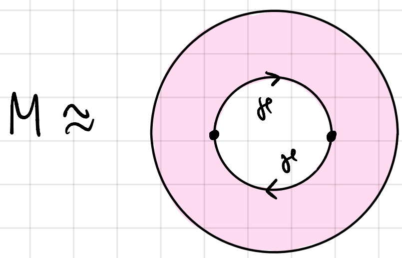
други модел:



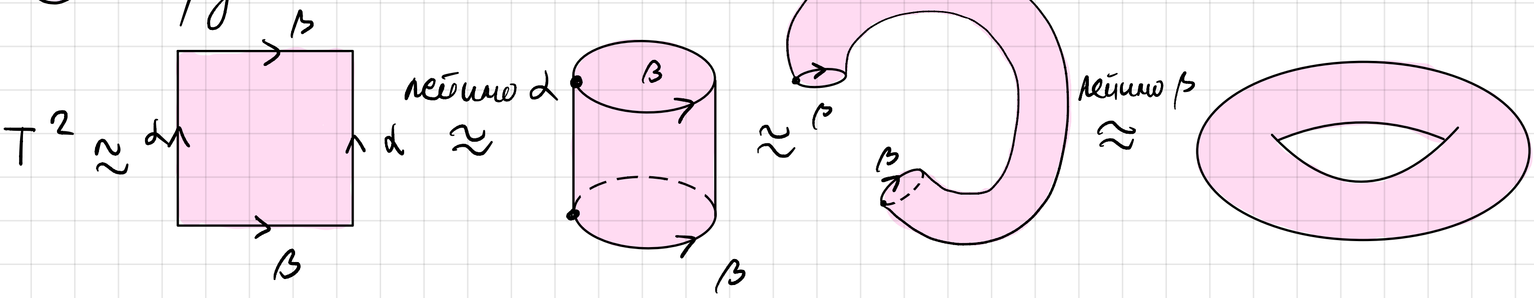
трећи модел:



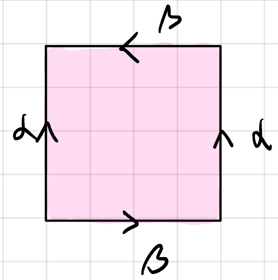
Кружни прстен можемо и „изокренути“, тј.



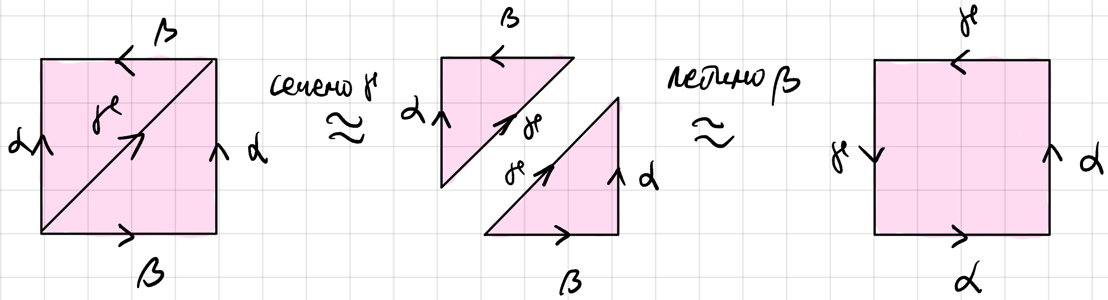
④ торус T^2



⑤ Клајнова боца K

$K \approx$ 

други модел:

$K \approx$ 

⑥ Реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n$

На $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ дефинишемо релацију:

$$x\sim y \iff (\exists \lambda\in\mathbb{R})\quad y=\lambda x$$

(тј. $x\sim y$ ако припадају истој правој која пролази кроз 0)

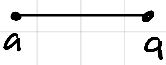
Може се показати да је $\sim$ рел. екв.

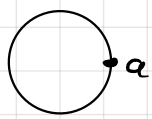
деф. $\mathbb{R}P^n \overset{def}{=} (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/_{\sim}$

(тј. елементи $\mathbb{R}P^n$ су праве у $\mathbb{R}^{n+1}$ кроз 0)

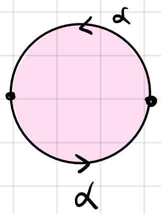
Став $\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{x\sim -x}$

Став $\mathbb{R}P^n \approx D^n/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^n}$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 \approx D^1/_{\sim} \approx$ 

$=$ 

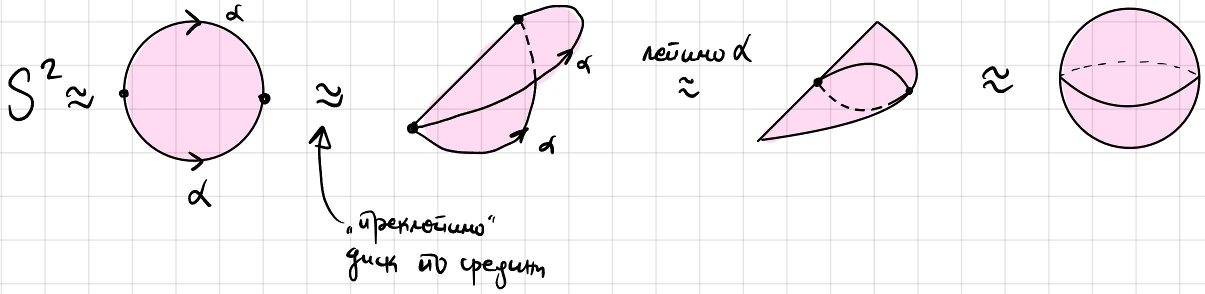
$= S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 \approx D^2/_{\sim} =$ 

пројективна раван

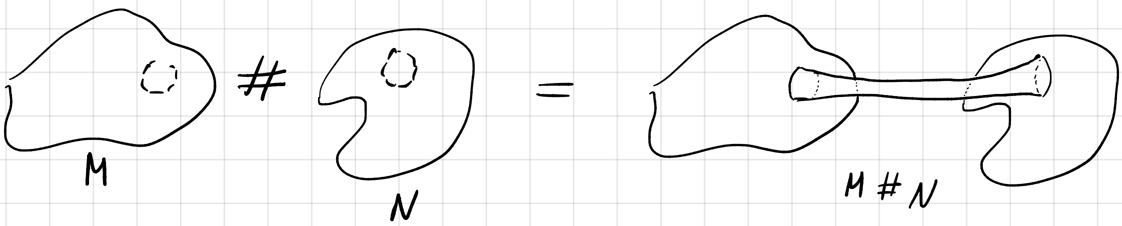
Став $\mathbb{R}P^n$ је компактан, Хаусдорфов, повезан и путно пов.

(7) **сфера** S^2



Класификација повезаних затворених површи

Дефинишемо операцију повезане суме (ознака: #) која од 2 површи M и N прави нову површ на следећи начин: са M и N скинемо по отворен диск и залепимо их по хомеоморфизму граничних кружница

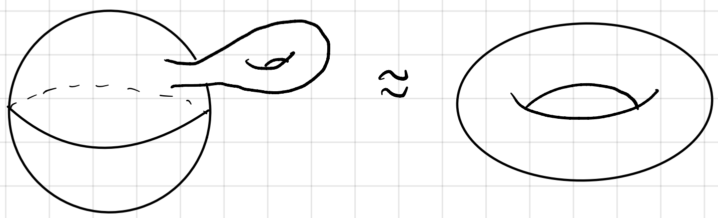


$M_0 := S^2$ - сфера

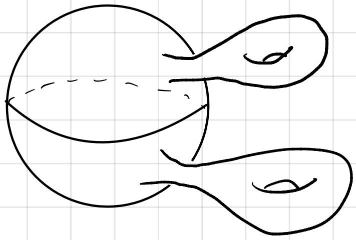
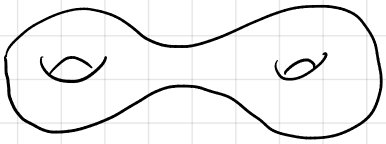
$M_g \overset{def}{=} M_{g-1} \# T^2$, $g \geq 1$ (торус)

Дакле,

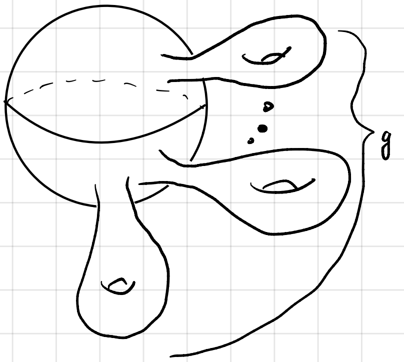
$M_1 =$

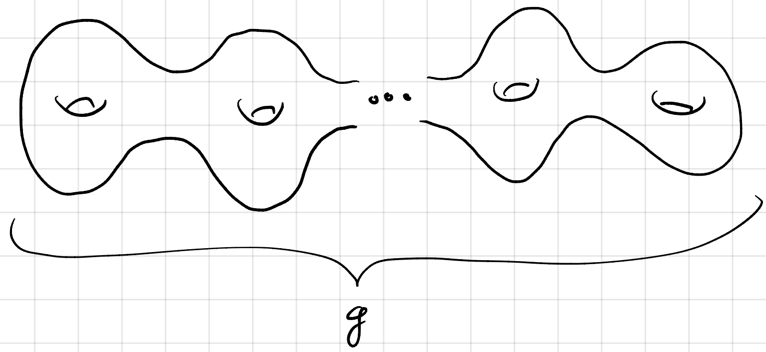


$= T^2$

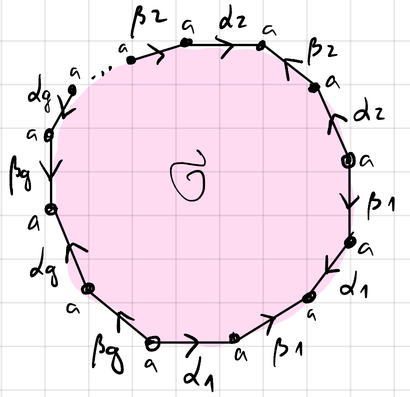
$M_2 =$  $\approx$ 

$\vdots$

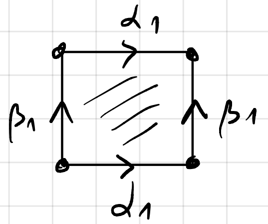
$M_g =$ 

$\approx$ 

Количнички модел у равни за M_g:



← многоугао са $4g$ ивица и $2g$ идентификације

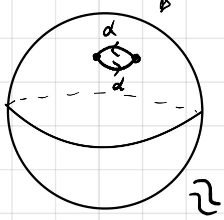
Специјално, $M_1 =$ 

$= T^2$

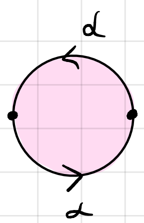
$N_1 \overset{def}{=} M_0 \# \mathbb{R}P^2$

$N_h \overset{def}{=} N_{h-1} \# \mathbb{R}P^2, \quad h \geq 2$

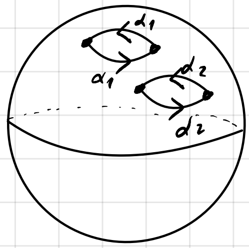
Дакле,

$N_1 =$ 

скинули смо диск са S^2 и на граници имамо идентификацију — између α је „рупа"

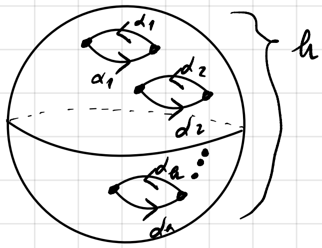
$\approx$ 

$\approx \mathbb{R}P^2$

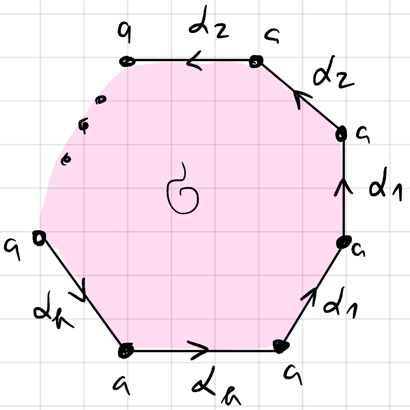
$N_2 =$  $\approx K$ – Клајнова боца

ово није очигледно

$\vdots$

$N_h =$ 

Количнички модел у равни за N_h:



многоугао са $2h$ ивица и h идентификације

Теорема [о класификацији површи] Нека је X повезана затворена површ (тј. компактна и без границе). Тада

(1) ако је X оријентабилна, онда
$$(\exists g\in\mathbb{N}_0)\ X\approx M_g;$$

(2) ако је X неоријентабилна, онда
$$(\exists h\in\mathbb{N})\ X\approx N_h.$$

Ојлерова карактеристика: $\chi(M) \overset{\text{def}}{=} t - i + p$

површ; темена; ивице; пљосни

	темена	ивице	пљосни
M_g	a	$\alpha_1,\dots,\alpha_g$, $\beta_1,\dots,\beta_g$	σ
N_h	a	$\alpha_1,\dots,\alpha_h$	σ

$$\chi(M_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

$$\chi(N_h) = 1 - h + 1 = 2 - h$$

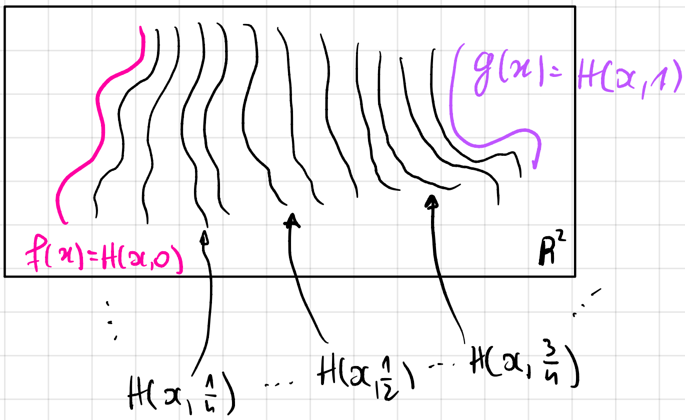
II Хомотопија

деф. Нека су $f, g : X \to Y$ непр. пресликавања. Кажемо да је f **хомотопно** са g ако постоји непр. пресликавање $H : X \times I \to Y$ (где је $I = [0,1]$) тд.

$$H(x,0) = f(x) \quad и \quad H(x,1) = g(x),$$

за свако $x \in X$. Пресликавање H називамо **хомотопијом** између f и g и пишемо $f \simeq g$ или $H : f \simeq g$.

Пример H је „непрекидна трансформација f у g". То се најбоље види кад су f и g путеви.
Нпр. $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ (тј. $X = I$, $Y = \mathbb{R}^2$) и $H : f \simeq g$, тј. $H : I \times I \to \mathbb{R}^2$.



Означимо са $C(X,Y)$ скуп свих непрекидних функција из X у Y.

Став $\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$.

доказ: (Р) За $f : X \to Y$ нека је $H(x,t) := f(x)$. Тада $H : f \simeq f$.

(С) Нека је $H : f \simeq g$. Дефинишемо $F : X \times I \to Y$ са

$$F(x,t) = H(x, 1-t).$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x,0) = H(x,1) = g(x) \\ F(x,1) = H(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow g \simeq f$$

(Т) Нека је $H: f \simeq g$ и $F: g \simeq h$, $f, g, h: X \to Y$. Дефинишемо $G: X \times I \to Y$ са

$$G(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Тада $G: f \simeq h$ ▨

Став Нека су $f, g: X \to Y$ непр. и $f \simeq g$.

(1) Ако је $\varphi: Y \to Z$ непр., онда $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$.

(2) Ако је $\psi: W \to X$ непр., онда $f \circ \psi \simeq g \circ \psi$.

доказ: (1) $H: f \simeq g \Rightarrow \varphi \circ H: \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$

(2) $H: f \simeq g \Rightarrow$ дефинишемо $G: W \times I \to Y$ са
$G(w,t) = H(\psi(w), t) \Rightarrow G: f \circ \psi \simeq g \circ \psi$. ▨

Пример Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан и $f, g: X \to K$ непр. онда $f \simeq g$. Специјално за $K = \mathbb{R}^n$,

$$f, g: X \to \mathbb{R}^n \text{ непр.} \Rightarrow f \simeq g.$$

деф. Нека су $f, g: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$. Кажемо да је f хомотопно са g релативно A (пишемо $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$) ако постоји непр. $H: X \times I \to Y$ тд.

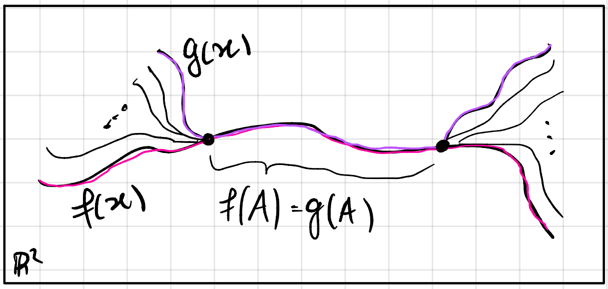
$$H(x,0) = f(x), \quad x \in X$$

$$H(x,1) = g(x), \quad x \in X$$

$$H(a,t) = f(a) = g(a), \quad a \in A, \ t \in I$$

Другим речима, $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$ ако је $f \simeq g$ и при тој хомотопији се слика од A „не помера".

Пример $f,g: I \to \mathbb{R}^2$, $\quad A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$



Став $\simeq (\mathrm{rel}\, A)$ је рел. екв.

Став (1) $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A) \Rightarrow \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g \ (\mathrm{rel}\, A)$

(2) $\psi: W \to X$ и $B \subseteq W$ тд. $\psi(B) \subseteq A$, онда

$$f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A) \Rightarrow f \circ \psi \simeq g \circ \psi \ (\mathrm{rel}\, B)$$

деф. Константно пресликавање $X \to Y$ које све слика у $y \in Y$ означавамо са $c_y: X \to Y$, тј. $c_y(x) = y$, за свако $x \in X$

деф. Пресликавање $f: X \to Y$ је хомотопски тривијално ако постоји $y \in Y$ тд. $f \simeq c_y$. Пишемо $f \simeq \mathrm{const}$.

Пример Ако је $f: X \to \mathbb{R}^n$, онда $f \simeq \mathrm{const}$.

деф. Кажемо да су топ. простори X и Y хомотопски еквивалентни ако постоје $\varphi: X \to Y$ и $\psi: Y \to X$ непр. тд. $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$ и $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$. Пишемо $X \simeq Y$

Очигледно $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Став $\simeq$ је рел. екв.

Пример $\mathbb{R}^n \setminus * \simeq S^{n-1}$ ($*$ = било која тачка у $\mathbb{R}^n$)

деф. Кажемо да је X контрактибилан ако је $X \simeq *$.
($*$ = топ. пр. који се састоји од само једне тачке)

Пример (1) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан $\Rightarrow$ $K \simeq *$

(2) $D^n \simeq *$ (диск димензије n), $n \geq 1$

(3) $\mathbb{R}^n \simeq *$

(4) $S^n \not\simeq *$

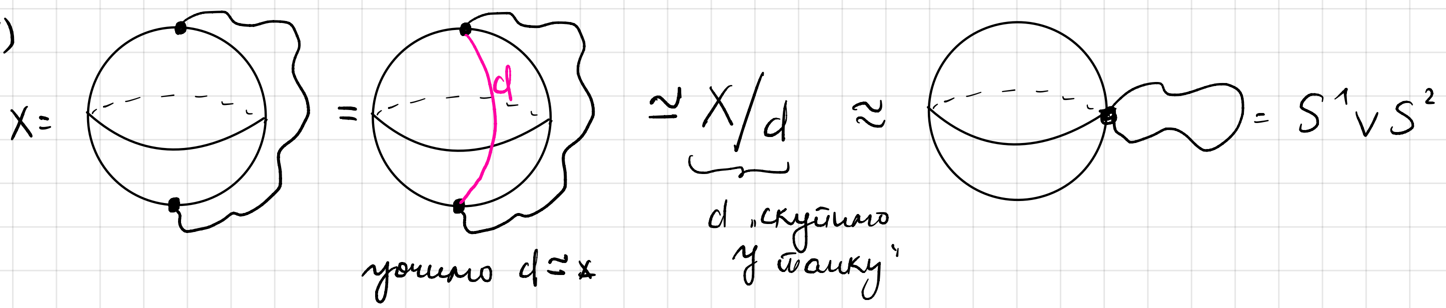
Став Ако је X топ. пр. и $A \subseteq X$ тд. пар (X, A) задовољава својство проширења хомотопије и ако је $A \simeq *$, онда $X \simeq X/A$.

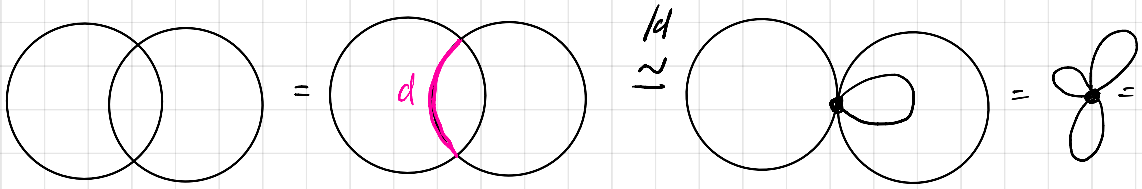
Коментар Нисмо дефинисали својство проширења хомотопије, али сви простори са којима радимо ће имати то својство, па само памтимо:

$$A \simeq * \Rightarrow X \simeq X/A$$

Пример Претходни став користимо често за $A = D^1$ = дуж и $A = D^2$ = диск

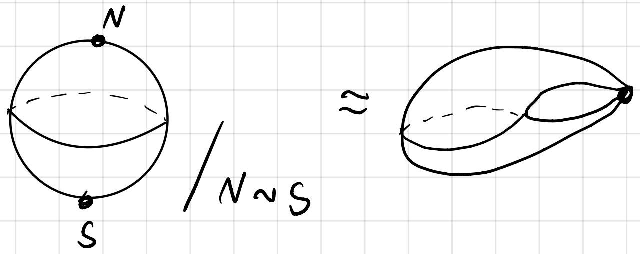
(1)



(2) $X =$ 

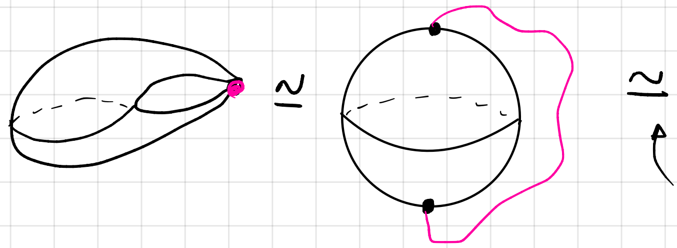
$= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

(3) $X = S^2/_{N\sim S}$ – на сфери идентификујемо северни и јужни пол.

$X =$ 

Став користимо на два начина:

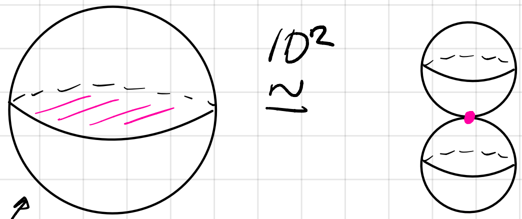
- D^1 и D^2 скупљамо у $*$
- $*$ ширимо до D^1 или D^2

$X \approx$ 

$\simeq S^1 \vee S^2$

пример (1)

Простор X се зове уштинута сфера.

(4) $X =$ 

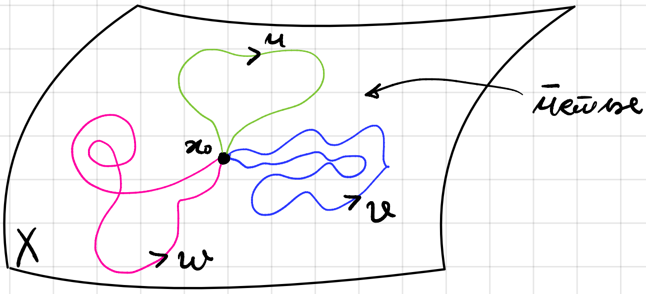
$\approx S^2 \vee S^2$

сфера са диском по средини

III Фундаментална група

Нека је X топ. пр. и $x_0 \in X$ фиксирана (базна) тачка. Пар (X, x_0) називамо топ. простором са базном тачком.

деф. Петља у (X, x_0) је пут $u: I \to X$ (u је непр.) са истим почетком и крајем, тј. $u(0) = u(1) = x_0$.



Означимо са $P(X, x_0)$ скуп свих петљи у x_0, тј.

$$P(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{u : I \to X \mid u \text{ непр.}, \; u(0) = u(1) = x_0\}$$

деф. Надовезивањем петље $v \in P(X, x_0)$ на $u \in P(X, x_0)$ добијамо петљу $u \cdot v \in P(X, x_0)$ дату са

$$(u \cdot v)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} u(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(1-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Став Нека су $u, u', v, v' \in P(X, x_0)$ тд.

$$u \simeq u' \; (\text{rel } \{0,1\}), \qquad v \simeq v' \; (\text{rel } \{0,1\}).$$

Тада $u \cdot v \simeq u' \cdot v' \; (\text{rel } \{0,1\})$.

Релација $\simeq (\text{rel}\,\{0,1\})$ јесте једна рел. екв. на $P(X,x_0)$, па дефинишемо скуп класа ове релације:

$$\pi_1(X,x_0) \overset{\text{def}}{=} P(X,x_0)/_{\simeq (\text{rel}\,\{0,1\})}$$

Елементи скупа $\pi_1(X,x_0)$ су класе $[u]$, где је $u \in P(X,x_0)$ и притом

$$[u] = [v] \iff u \simeq v \ (\text{rel}\,\{0,1\})$$

На $\pi_1(X,x_0)$ дефинишемо операцију $*$:

$$[u] * [v] \overset{\text{def}}{=} [u \cdot v]$$

Претходни став нам гарантује да је ова операција добро дефинисана.

За $u \in P(X,x_0)$ дефинишемо $u^{-1} : P(X,x_0)$ као петљу која има исту путању као u, али обрнут смер, тј.

$$u^{-1}(t) \overset{\text{def}}{=} u(1-t), \quad t \in I$$

и нека је $[u]^{-1} \overset{\text{def}}{=} [u^{-1}]$.

Коначно, означимо са $c_{x_0} \in P(X,x_0)$ константну петљу, тј. $c_{x_0}(t) = x_0$, $t \in I$.

Теорема Скуп $\pi_1(X,x_0)$ јесте група у односу на операцију $*$. Њен неутрал је $[c_{x_0}]$, а инверз елемента $[u]$ је $[u]^{-1}$.

Дакле у $\pi_1(X,x_0)$ важи:

(1) $([u] * [v]) * [w] = [u] * ([v] * [w])$ (асоцијативност)

(2) $[c_{x_0}] * [u] = [u] * [c_{x_0}] = [u]$ (неутрал)

(3) $[u] * [u]^{-1} = [u]^{-1} * [u] = [c_{x_0}]$ (инверз)

деф. Групу $\pi_1(X,x_0)$ називамо фундаменталном групом простора X са базном тачком x_0.

Пример (1) $X=\{x_0\}$, онда је $\pi_1(X,x_0)=0$
(овде 0 представља тривијалну групу која има само један елемент - неутрал)

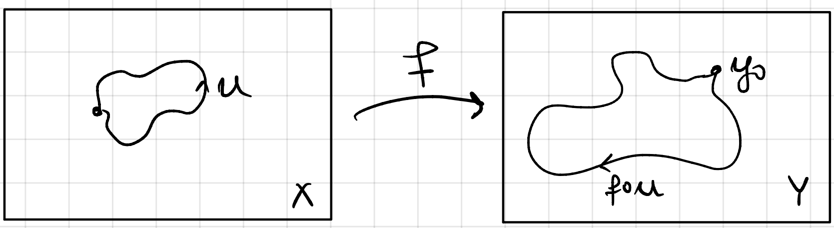
(2) $X=\mathbb{R}^n$, $x_0=0$. Видели смо раније да су свака два пресликавања са кодоменом $\mathbb{R}^n$ хомотопна, па
$$u,v\in P(\mathbb{R}^n,0) \Rightarrow u\simeq v \Rightarrow [u]=[v]$$
$\Rightarrow$ сви ел. у $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)$ су исти, тј. $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)=0$

Коментар Постоје и више хомотопске групе $\pi_n(X,x_0)$, $n\geq 1$, па отуд ознака π_1.

Хомоморфизам индукован пресликавањем

Нека су (X,x_0) и (Y,y_0) топ. пр. и $f: X\to Y$ непр. тд. $f(x_0)=y_0$. (Пишемо и $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$)

деф. Пресликавање $f_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ индуковано са f дато је са $f_*([u]) \overset{def}{=} [f\circ u]$, $[u]\in\pi_1(X,x_0)$.



$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ I \arrow[ur, "u"] \arrow[r, dashed, "f\circ u"'] & Y \end{tikzcd}$$

Став f_* је хомоморфизам група.

<u>доказ:</u> Желимо да покажемо да f_* чува операцију, тј. да
$$f_*([u]*[v]) = f_*([u]) * f_*([v])$$

$$f_*([u]*[v]) = f_*([u\cdot v]) = [f\circ(u\cdot v)],$$
$$f_*([u]) * f_*([v]) = [f\circ u] * [f\circ v] = [(f\circ u)\cdot(f\circ v)],$$
али важи да је $f\circ(u\cdot v) = (f\circ u)\cdot(f\circ v)$, одакле једнакост директно следи. ▨

Пример Нека је $c:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ константно пресликавање, тј.
$$c(x) = y_0, \quad x\in X$$
Тада је c_* тривијалан хомо. Заиста, за $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ имамо
$$c_*([u]) = [c\circ u] = [c_{y_0}] = 0$$
0 је ознака за неутрал у $\pi_1(X,x_0)$

($c_{y_0}: I\to Y$ константна петља у y_0)

Користимо и ознаку $c_* = 0$ (овде 0 значи тривијалан хомоморфизам).

Пример Ако је $1_X:(X,x_0)\to(X,x_0)$ идентичко пресл. (тј. $1_X(x) = x$, $x\in X$) онда је $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.

Заиста, за $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ је
$$(1_X)_*([u]) = [1_X\circ u] = [u] = 1_{\pi_1(X,x_0)}([u]).$$

Став $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$

Став Нека су $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ и $f\simeq g$ $(\mathrm{rel}\ \{x_0\})$.
Онда је $f_* = g_*$.

деф. Простори (X,x_0) и (Y,y_0) су хомотопски еквивалентни као простори са базном тачком ако постоје

$$\varphi:(X,x_0)\to(Y,y_0) \quad \text{и} \quad \psi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$$

тј. $\varphi\circ\psi\simeq \mathbb{1}_Y \ (\mathrm{rel}\ \{y_0\})$ и $\psi\circ\varphi\simeq\mathbb{1}_X \ (\mathrm{rel}\ \{x_0\})$.

Пишемо $(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$.

Став Ако је $(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$, онда је $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$.

доказ:

$$\begin{tikzcd}(X,x_0) \arrow[r, bend left, "\varphi"] & (Y,y_0) \arrow[l, bend left, "\psi"]\end{tikzcd}$$

Имамо $\varphi\circ\psi\simeq\mathbb{1}_Y \ (\mathrm{rel}\ \{y_0\})$ и $\psi\circ\varphi\simeq\mathbb{1}_X \ (\mathrm{rel}\ \{x_0\})$, па је на основу претходног става

$$(\varphi\circ\psi)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(Y,y_0)} \quad \text{и} \quad (\psi\circ\varphi)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}$$

тј.
$$\varphi_*\circ\psi_* = \mathbb{1}_{\pi_1(Y,y_0)} \quad \text{и} \quad \psi_*\circ\varphi_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)},$$

па су φ_* и ψ_* једно другом инверзни, тј.

$$\varphi_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0) \text{ је изоморфизам.} \ \blacksquare$$

Теорема Ако је X путно повезан, онда за све $x_0,x_1\in X$ важи $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$.

Дакле, кад је X путно повезан, π_1 не зависи од избора базне тачке, па уместо $\pi_1(X,x_0)$ пишемо краће $\pi_1(X)$.

Теорема Ако је $f: X \to Y$ хомотопски тривијално, онда је за свако $x \in X$, $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ тривијалан хомоморфизам.

Теорема Ако је $f: X \to Y$ хомотопска еквиваленција, онда је за свако $x \in X$, $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ изоморфизам.

Последица Нека су X и Y путно повезани. Тада

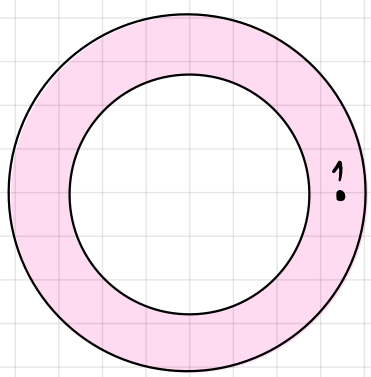
$$X \simeq Y \implies \pi_1(X) \cong \pi_1(Y).$$

Пример Видели смо раније да су $\mathbb{R}^n, D^n, \operatorname{int} D^n$ контрактибилни, тј. $\mathbb{R}^n \simeq *$, $D^n \simeq *$, $\operatorname{int} D^n \simeq *$ и $\pi_1(*) = 0$ ($*$ је топ. пр. са једном тачком), па на основу претходне последице имамо $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, $\pi_1(D^n) = 0$, $\pi_1(\operatorname{int} D^n) = 0$.

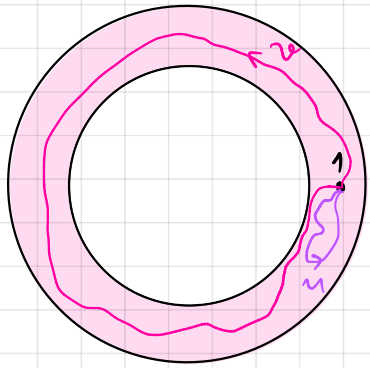
Теорема $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Доказ претходне теореме је захтевнији, али интуиција лежи у једноставној идеји.
Нека је $1 \in S^1$ базна тачка и замислимо S^1 као „задебљану" кружницу, тј. као кружни прстен

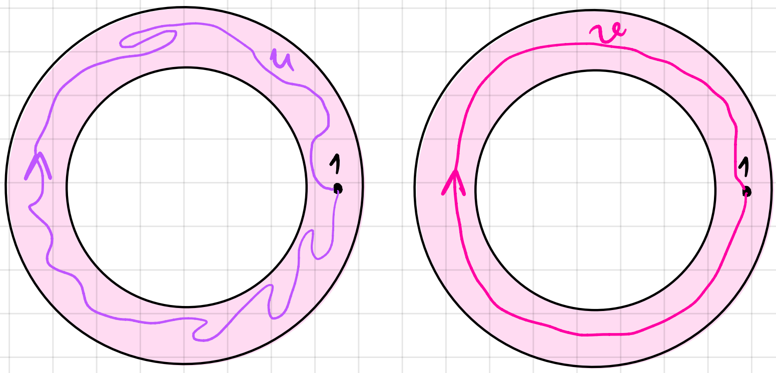
S^1:



Елементи $\pi_1(S^1)$ су класе петљи у S^1:



Петље у S^1 се разликују по томе колико су пута намотане (и у ком смеру) око S^1. Ако су две петље намотане исти број пута, онда су оне међусобно хомотопне, нпр. $u \simeq v$ јер су обе намотане једном у истом смеру (кад „затегнемо" u добијемо v, па је $u \simeq v$), тј. обе ове петље представљају исти ел. у $\pi_1(S^1)$,



тј. $[u]=[v]$. Због тога има смисла дефинисати:

$$\varphi : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$
$$[u] \longmapsto k_u$$

где је k_u број намотаја петље u око S^1 ($k_u > 0$ ако је смер намотавања позитиван, а $k_u < 0$, ако је смер негативан). И обрнуто, свакој $k \in \mathbb{Z}$ додељујемо $[u]$, где је u петља намотана k пута око S^1.

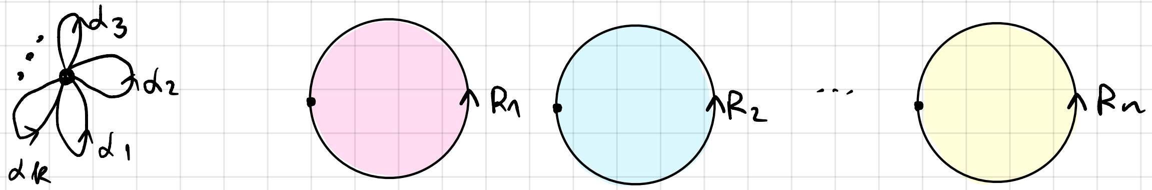
Пресликавање φ је управо један изоморфизам, па је

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Рачунање неких фундаменталних група

Теорема Нека је X тополошки простор добијен лепљењем букета k кружнице на границе n дискова по „правилима” $R_1, R_2, \dots, R_n$, тј. X има модел

X :

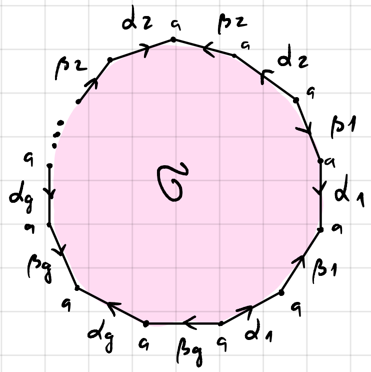


онда је

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$$

(Видети у белешкама са вежби ОТ представљање групе преко генератора и релација стр. 69-74)

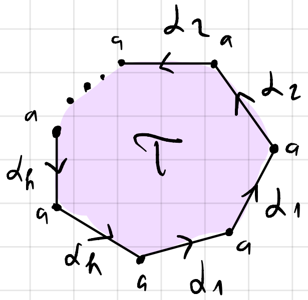
M_g :



$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

посл. $\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

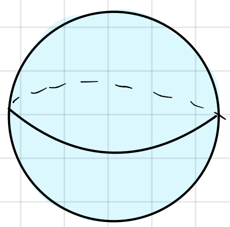
N_h :



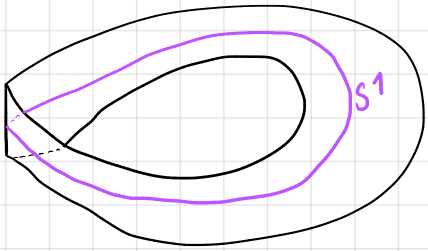
$$\pi_1(N_h) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$$

посл. $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

S^n :

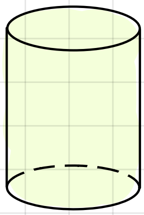


$$\pi_1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

M: 

Мебијусова трака је хомотопски еквивалентна централној кружници $M \simeq S^1$

$$\Rightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

C: 

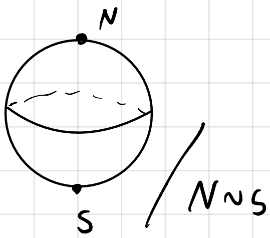
$$C \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(C) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

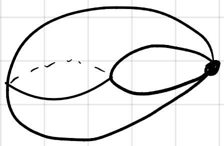
Став Када је букет $X \vee Y$ „довољно леп" (а код нас ће увек бити), онда је

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$$

($*$ је слободан производ група, видети у белешкама са вежби из ОТ, стр. 73)

Пример $X = S^2/_{N\sim S}$ = уштинута сфера

$X =$ 

$\simeq$  $\simeq S^1 \vee S^2$

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(S^1 \vee S^2) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z} * 0 \cong \mathbb{Z}$$

Пример $\pi_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{k} \vee \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{\ell}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k} * \underbrace{0 * \cdots * 0}_{\ell} \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k}$

IV Хомологија ланчастих комплекса

деф. Ланчасти комплекс (л.к.) C_* је низ Абелових група и хомоморфизама тих Абелових група $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $d_n : C_n \to C_{n-1}$ тд. $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Пишемо:
$$C_* : \quad \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots$$

Напомене: (1) л.к. је слободан ако су све групе C_n, $n \in \mathbb{Z}$ слободне;

(2) л.к. је ненегативан ако је $C_n = 0$ за $n < 0$;

(3) d_n је гранични оператор и често се обележава само са d, а из контекста знамо шта је n (нпр. $d_{n+1} \circ d_n = 0$ краће пишемо $d^2 = 0$);

деф. Група циклова у C_* је
$$Z_n(C_*) \overset{\text{def}}{=} \ker d_n \leq C_n.$$
Група граница у C_* је
$$B_n(C_*) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{im} d_{n+1} \leq C_n.$$
Притом $B_n \leq Z_n$ (следи из услова $d^2 = 0$).

деф. n-та хомолошка група л.к. C_* је
$$H_n(C_*) \overset{\text{def}}{=} Z_n(C_*) / B_n(C_*)$$

Пример $C_* : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{0} C_n \xrightarrow{0} C_{n-1} \to \cdots \qquad (d_n = 0,\ \forall n)$

$$H_n(C_*) = \ker 0 / \operatorname{im} 0 = C_n / 0 = C_n$$

деф. Нека су $C_* = (C_n, d_n)$ и $C'_* = (C'_n, d'_n)$ два л.к.
Ланчасто пресликавање $\phi : C_* \to C'_*$ је низ хомоморфизама $\phi_n : C_n \to C'_n$ тд. $(\forall n \in \mathbb{Z})\ d'_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ d_n$,
тј. комутира следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ланчасто пресл. $\phi : C_* \to C'_*$ индукује пресл. ϕ_* у хомологији, тј. имамо $\phi_* : H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$, $n \in \mathbb{Z}$,
дато на следећи начин.

$$H_n(C^*) = Z_n(C^*) / B_n(C^*)$$

елементи у $H_n(C^*)$ су облика $[z]$, где је $z \in Z_n(C^*)$
(тј. $z \in \ker d_n$, тј. $d_n(z) = 0$). Дефинишемо ϕ_* са:

$$\phi_*([z]) \overset{\text{def}}{=} [\phi_n(z)]$$

Треба показати да је ово пресл. добро дефинисано, тј. да
1. не зависи од избора представника класе $[z]$
2. $\phi_n(z) \in Z_n(C'_*)$

1: Нека је $[z] = [z'] \in H_n(C^*)$.

$$[z] = [z'] \Leftrightarrow [z - z'] = 0 \ (\text{у } H_n) \Leftrightarrow z - z' \in B_n(C^*) = \operatorname{im} d_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow (\exists c \in C_{n+1})\ z - z' = d_{n+1}(c) \Leftrightarrow z = z' + d_{n+1}(c)$$

$$\phi_*([z]) = \phi_*([z' + d_{n+1}(c)]) = [\phi_n(z' + d_{n+1}(c))] = [\phi_n(z') + \phi_n(d_{n+1}(c))] =$$
$$= [\phi_n(z')] + \underbrace{[d'_{n+1}(\phi_{n+1}(c))]}_{\substack{=0 \\ \text{јер } \in B_n(C'_*)}} = [\phi_n(z')] = \phi_*([z'])$$

2: $\phi_n(z) \in Z_n(C'_*)$?

$$d'_n(\phi_n(z)) = \phi_{n-1}(d_n(z)) = \phi_{n-1}(0) = 0 \checkmark$$

Дакле ϕ_* је добро дефинисано, а јесте и хомоморфизам.

деф. Нека је $\phi: C_* \to C'_*$ ланчасто пресл. Тада је ϕ_* хомоморфизам у хомологији индукован са ϕ.

Став (1) За $\phi = \mathbb{1}$ (идентитет) имамо $\phi_* = \mathbb{1}_{H_n(C^*)}$

(2) $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$

Тачни низови

деф. Низ Абелових група и хомоморфизама

$$\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots$$

је тачан на месту B ако је $\ker g = \operatorname{im} f$.

Низ је тачан ако је тачан на сваком месту.

Напомене (1) Ако је $C_* : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots$ тачан низ, онда је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = 0$, за свако $n \in \mathbb{Z}$

(2) Ако у тачном низу имамо $0 \to A \xrightarrow{f} B \to \cdots$ онда је f „1-1" (јер $\ker f = \operatorname{im} 0 = 0$)

(3) Ако у тачном низу имамо $\cdots \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ онда је f „на" (јер $\operatorname{im} f = \ker 0 = B$)

(4) Ако је $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ тачан низ, онда је f изоморфизам.

деф. Кратак тачан низ (КТН.) је тачан низ облика

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

(у КТН. је увек f „1-1" и g „НА")

деф. Кратак тачан низ се цепа ако је $\mathrm{im} f$ директан сабирак групе B, тј. ако

$$(\exists D \leq B) \quad B \cong \mathrm{im} f \oplus D.$$

Теорема Нека је $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ КТН. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) низ се цепа;

(2) постоји хомоморфизам $p : B \to A$ тд. $p \circ f = 1_A$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(3) постоји хомоморфизам $j : C \to B$ тд. $g \circ j = 1_C$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "j"] & 0 \end{tikzcd}$$

(4) $B \cong A \oplus C$.

Последица КТН. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ у коме је група C слободна Абелова група се цепа.

Пример $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \dots, \mathbb{Z}^n$ су слободне па се сваки КТН. облика

$$0 \to A \to B \to \mathbb{Z}^n \to 0$$

цепа, тј. важи $B \cong A \oplus \mathbb{Z}^n$

Подсетник Ако су G_n, $n \in \mathbb{N}$ групе, дефинишемо:

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \times \cdots = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \;\Big|\; g_n \in G_n \Big\}$$

производ група

формална сума – други запис за низ $(g_1, g_2, g_3, \dots)$

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n \oplus \cdots = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n \;\Big|\; \text{сви сем коначно много } g_n \text{ су } 0 \Big\} \le \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

директна сума група

Дакле, у општем случају је $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n \le \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Специјално, ако имамо коначно много група онда је

$$G_1 \times \cdots \times G_n = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$$

па зато пишемо нпр. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ и слично.

Пример $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\bmod 2} \mathbb{Z}_2 \to 0$ је КТН. који се не цепа (да се цепа било би $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ што је немогуће)

деф. Низ ланчастих комплекса

$$0 \to C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \to 0 \qquad (*)$$

је КТН. ако је тачан на сваком нивоу, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$

$$0 \to C_n \xrightarrow{\phi_n} D_n \xrightarrow{\psi_n} E_n \to 0 \quad \text{је тачан.}$$

$(*)$ је крати запис за дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d"] & D_{n+1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "d"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d"] & D_n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "d"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & D_{n-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Теорема [цик-цак лема] Нека је дат ктн. л.к.

$$0 \to C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \to 0$$

Тада постоји дуг тачан низ

$$\cdots \to H_n(C_*) \xrightarrow{\phi_*} H_n(D_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(E_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C_*) \to \cdots$$

Теорема [Стинродова 5-лема] Нека је дат комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

Ако су f_2 и f_4 изоморфизми, f_1 епиморфизам и f_5 мономорфизам, онда је f_3 изоморфизам.

$\underline{\mathrm{V}}$ Сингуларна хомологија

Желимо да дефинишемо хомологију тополошког простора X. За сада смо дефинисали само хомологију л.к. па хомологију од X дефинишемо у 2 корака:

$$X \rightsquigarrow \underset{\text{сингуларни л.к.}}{S_*(X)} \rightsquigarrow H_n(X) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{H_n(S_*(X))}_{\text{хомологија л.к. } S_*(X)}$$

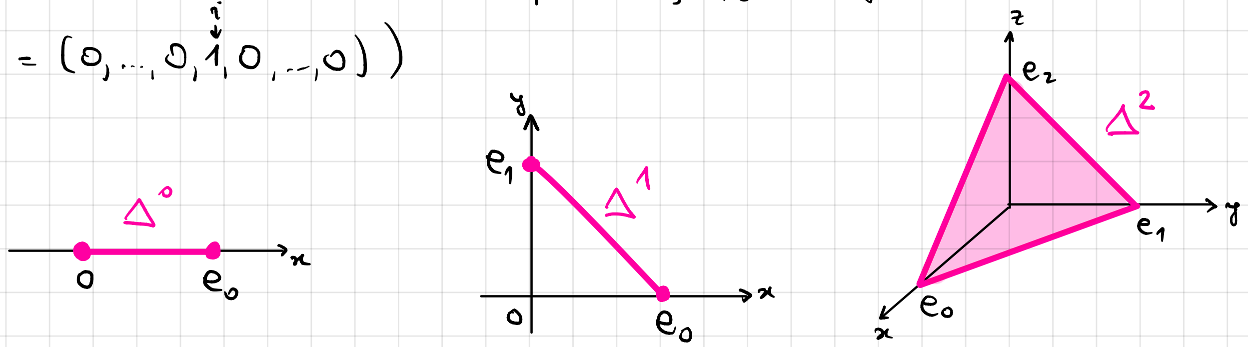
Дакле, прво дефинишемо л.к. $S_*(X)$ придружен топ. пр. X.

деф. Стандардни n-симплекс је

$$\Delta^n = \underset{\uparrow \text{ конвексни омотач}}{\mathrm{conv}}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

тј. $\Delta^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$

$\left(e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \right)$



(конвексни омотач је најмањи конвексни скуп који садржи дате тачке)

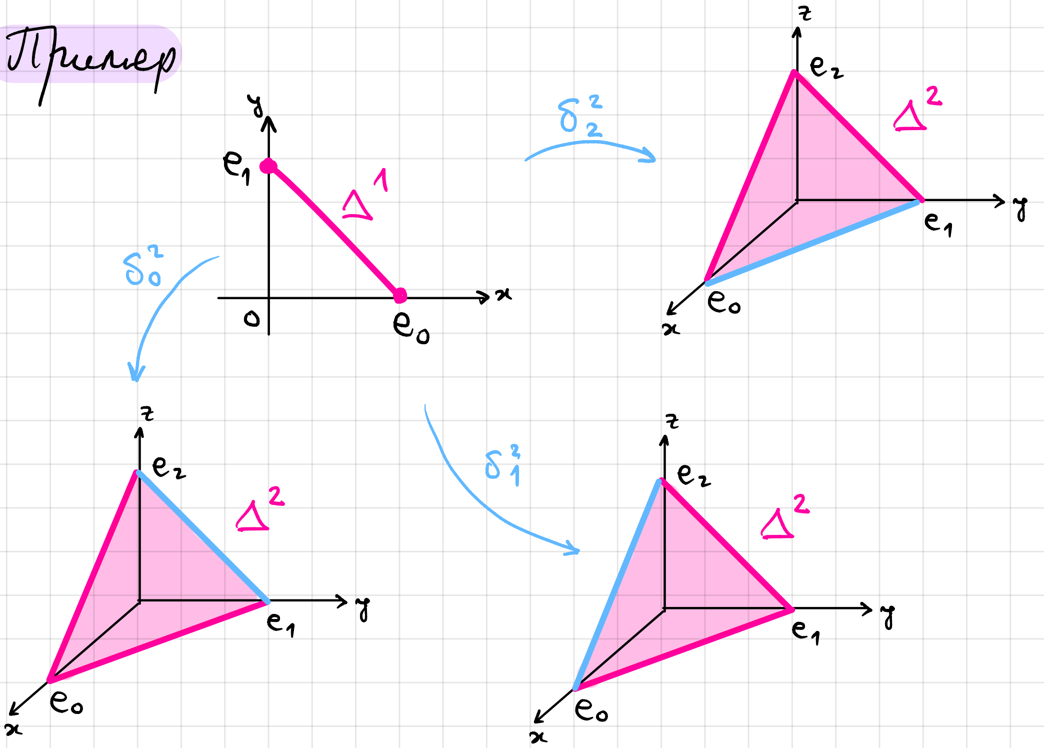
Уочимо афино пресликавање $\delta_i^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ дато са

$$\delta_i^n(x_0, \dots, x_{n-1}) \overset{\text{def}}{=} (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

(тј. δ_i^n убацује 0 на i-тој координати)

Често пишемо само δ_i кад знамо шта је n.

Пример



δ_i^2 слика Δ^1 у ивицу у Δ^2 наспрам темена e_i

деф. Сингуларни n-симплекс у топ. простору X је непр. пресликавање $\sigma : \Delta^n \to X$. Нека је $\Delta_n(X)$ скуп свих сингуларних n-симплекса у X. Група сингуларних n-дим. ланаца је $S_n(X) \overset{df}{=} F[\Delta_n(X)]$ (слободна Абелова група генерисана са $\Delta_n(X)$, тј. $S_n(X) = \bigoplus_{\sigma\in\Delta_n(X)} \mathbb{Z}$).

i-та страна симплекса σ је $\sigma\circ\delta_i^n$

За $\sigma \in \Delta^n(X)$ дефинишемо $d(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma\circ\delta_i^n$

(d генеришемо на генераторима овако, а онда се проширује на цео $S_n(X)$ тд. да буде хомоморфизам). Дакле, имамо

$$S_*(X): \cdots \to S_{n+1}(X) \xrightarrow{d} S_n(X) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X) \to \cdots \to S_1(X) \to S_0(X) \to 0$$

Став $S_*(X)$ је л.к.

доказ: Све што треба да се докаже је $d^2=0$, а то је довољно показати на генераторима.

Посматрајмо $S_n(X) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X) \xrightarrow{d} S_{n-2}(X)$, $\quad d^2$

и нека је $\sigma \in \Delta_n(X)$

$$(d\circ d)(\sigma) \overset{\text{деф.}d}{=} d\Big(\sum_{i=0}^{n}(-1)^n \underbrace{\sigma\circ\delta_i^n}_{\text{ген. у } S_{n-1}(X)}\Big) \overset{d \text{ је хомо.}}{=} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d(\sigma\circ\delta_i^n) =$$

$$\overset{\text{деф.}d}{=} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j (\sigma\circ\delta_i^n)\circ\delta_j^{n-1} \quad (*)$$

Како изгледа $\delta_q^n \circ \delta_p^{n-1}$, $p<q$?

$$(x_0,\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_p^{n-1}}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{p-1},0,x_p,\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_q^n}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{p-1},\underset{\text{позиција } p}{0},x_p,\dots,x_{q-2},\underset{\text{позиција } q}{0},x_{q-1},\dots,x_{n-2})$$

Дакле, $\delta_q^n\circ\delta_p^{n-1} : \Delta^{n-2}\to\Delta^n$ слика Δ^{n-2} у страну од Δ^n наспрам темена e_p и e_q

Посматрајмо сад $\delta_p^n\circ\delta_{q-1}^{n-1}$, $p<q$:

$$(x_0,\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_{q-1}^{n-1}}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{q-2},0,x_{q-1},\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_p^n}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{p-1},\underset{\text{позиција } p}{0},x_p,\dots,x_{q-2},\underset{\text{позиција } q}{0},x_{q-1},\dots,x_{n-2})$$

Дакле, $\delta_q^n\circ\delta_p^{n-1} = \delta_p^n\circ\delta_{q-1}^{n-1}$ (за $p<q$). То значи да у $(*)$ имамо парове њених сабирака за $i=q$, $j=p$ и $i=p$, $j=q-1$, АЛИ ови сабирци су супротног знака јер је један $(-1)^{i+j}=(-1)^{p+q}$, а други $(-1)^{i+j}=(-1)^{p+q-1}$, па их можемо скратити. Коначно, $d^2=0$. ▨

деф. n-та хомолошка група топ. пр. X је

$$H_n(X) \overset{\text{def}}{=} H_n(S_*(X))$$

Коментар Нека је Ab категорија Абелових група и хомоморфизама, CAb категорија ланчастих комплекса и ланчастих пресл., а Top категорија тополошких пр. и непр. пресл. (за основне појмове у теорији категорије видети белешке са вежби).

Ланчаста хомологија је један функтор из CAb у Ab:

$$\mathrm{CAb} \xrightarrow{H_n} \mathrm{Ab}$$
$$C_* \longmapsto H_n(C_*)$$
$$[\varphi : C_* \to D_*] \longmapsto [\varphi_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)]$$

Слично, сингуларну хомологију можемо видети као композицију два функтора:

$$\mathrm{Top} \xrightarrow{S_*} \mathrm{CAb} \xrightarrow{H_n} \mathrm{Ab}$$
$$X \longmapsto S_*(X) \longmapsto H_n(S_*(X)) =: H_n(X)$$
$$[f : X \to Y] \mapsto [f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)] \mapsto [f_* : H_n(X) \to H_n(Y)] \qquad (A*)$$

Раније смо видели још један функтор (фунд. гр.):

$$\mathrm{Top}_0 \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Gr}$$
$$(X, x_0) \longmapsto \pi_1(X, x_0)$$
$$[f : (X, x_0) \to (Y, y_0)] \longmapsto [f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)]$$

Сада да видимо како се дефинишу $f_\#$ и f_* из (A*).

Нека је $f : X \to Y$ непр. Дефинишемо $f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ на генераторима са $f_\#(\underset{\Delta_n(X)}{\underset{\cap}{\sigma}}) := \underbrace{f \circ \sigma}_{\substack{\cap \\ \Delta_n(Y)}}$.

Пресликавање $f_\#$ је ланчасто (тј. комутира са d):

$$(f_\# \circ d)(\sigma) = f_\#\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i^n\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_\#(\sigma \circ \delta_i^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i^n = d(f \circ \sigma) = d(f_\#(\sigma)) = (d \circ f_\#)(\sigma)$$

Како је $f_\#$ ланчасто, оно индукује пресл. у хомологији:

$$f_* : H_n(S_*(X)) \to H_n(S_*(Y)),$$

$$\text{тј. } f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

деф. Редуковани л.к. од $S_*(X)$ је

$$\tilde{S}_*(X) : \underbrace{\cdots \to S_n(X) \to S_{n-1}(X) \to \cdots \to S_1(X) \to S_0(X)}_{S_*(X)} \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{S_{-1}(X) \to 0}_{\text{ово додајемо}}$$

где је $S_{-1}(X) \cong \mathbb{Z}$ и означимо њен ген. са $*$ и дефинишимо ε на следећи начин:

$$S_0(X) = F[\Delta_0(X)], \quad \Delta_0(X) = \{\sigma : \underset{\text{1 тачка}}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\Delta^0}}} \to X \mid \sigma \text{ непр.}\} \approx X$$

Дакле, $S_0(X)$ је слободна Абелова гр. ген. са X, па ε дефинишемо на генераторима: $(\forall x \in X)\ \varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} *$.

деф. Редукована хомологија од X је

$$\tilde{H}_n(X) \overset{\text{def}}{=} H_n(\tilde{S}_*(X)).$$

Став

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X), & n \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \end{cases}$$

Претходни став нам говори да се H_n и $\tilde{H}_n$ разликују једино за $n=0$.

деф. Ако је (X,A) тополошки пар (тј. X топ. пр. и $A\subseteq X$), релативни л.к. пара (X,A) је $S_*(X,A)$, где је

$$S_n(X,A) \overset{def}{=} S_n(X)/S_n(A).$$

$$S_*(X,A): \quad \cdots \to S_n(X)/S_n(A) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A) \to \cdots$$
$$[c] \longmapsto [d(c)]$$

деф. Релативна хомологија пара (X,A) је

$$H_n(X,A) \overset{def}{=} H_n(S_*(X,A))$$

(притом $H_n(X,\emptyset) = H_n(X)$)

Ако је (X,A) тополошки пар, имамо кратк. л.к.

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_\#} S_*(X) \xrightarrow{q} S_*(X,A) \to 0$$

($i: A \hookrightarrow X$ је инклузија).

На основу цик-цак леме добијамо дтн:

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

Овај низ се зове дуги тачан низ у хомологији пара (X,A).

Став $H_0(X)$ је слободна Абелова група генерисана компонентама путне повезаности од X (тј. ако X има k компоненти путне пов., онда је $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$).

Пример $H_0(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \geq 1 \\ \mathbb{Z}^2, & n=0 \end{cases}$

VI Аксиоме хомологије

деф. Категорија $\mathcal{A}$ парова топ. пр. (X,A) је допустива ако важи

(1) $(X,A)\in\mathcal{A} \Rightarrow (X,X), (X,\phi), (A,A), (A,\phi)\in\mathcal{A}$;

(2) $(X,A)\in\mathcal{A} \Rightarrow (X\times I, A\times I)\in\mathcal{A} \quad (I=[0,1])$;

(3) постоји топ. пр. P тд. $|P|=1$ и $(P,\phi)\in\mathcal{A}$.

Категорија свих тополошких парова Top_2 је очигледно допустива.

деф. [Ајленберг - Стинрод] Хомолошка теорија на допустивој класи парова тополошких простора $\mathcal{A}$ је низ функтора

$$H_n : \mathcal{A} \to Ab, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

са низом природних трансформација

$$\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,\phi), \quad n\in\mathbb{N}$$

тд. су испуњени следећи услови:

(1) аксиома тачности: низ

$$\cdots \to H_n(A,\phi) \xrightarrow{i_*} H_n(X,\phi) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,\phi) \to \cdots$$

је тачан, где су $i : A \hookrightarrow X$ и $j : \phi \hookrightarrow A$ инклузије

(2) аксиома хомотопије: ако су $h,k : (X,A)\to(Y,B)$ и $h\simeq k$, онда је $h_* = k_*$

(3) аксиома исецања: ако су $A,B\subseteq X$ тд. $X=\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B$, онда је $H_n(B, A\cap B)\cong H_n(X,A)$ за свако n.

(4) аксиома димензије: ако је $|P|=1$, онда

$$H_n(P,\emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(5) аксиома компактног носача: ако $(X,A)\in\mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in H_n(X,A)$, онда постоји допустиви пар (X_0,A_0) тд. $X_0\subseteq X$, $A_0\subseteq A$, X_0 и A_0 су компактни и $\alpha\in \operatorname{im} i_*$, где је $i_*: H_n(X_0,A_0)\to H_n(X,A)$.

Хомологија тополошког простора се може дефинисати на више начина (ми смо за сада видели само један - сингуларну хомологију). Појам хомолошке теорије је уопштење хомологије простора, тј. сингуларна хомологија јесте једна хомолошка теорија јер задовољава свих 5 аксиома. Разлог за ову генерализацију је то што нека битна тврђења можемо доказати само помоћу ових 5 аксиома, не улазећи у детаље како је која хомолошка теорија тачно дефинисана.

деф. Ако хомолошка теорија задовољава све сем четврте аксиоме, назива се генерализованом хомолошком теоријом.

Једна од последица аксиома је тзв. Мајер-Виеторисов низ (краће МВ).

Занимљивост: Leopold Vietoris је живео 110 година и 309 дана.

Нека су $A, B \subseteq X$ и означимо инклузије:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "k"] & \\ A \cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

Теорема [Мајер-Виеторис] Нека су $A, B \subseteq X$ т.д. важи $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Тада је следећи низ тачан:

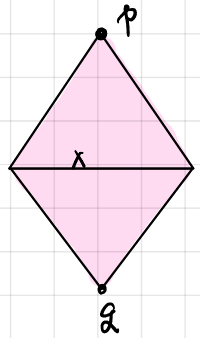
$$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

где је $\phi_*(x) = (i_*(x), -j_*(x))$ и $\psi_*(a,b) = k_*(a) + l_*(b)$.

(Сличан низ постоји и у редукованој хомологији – свуда уместо H_* ставимо $\tilde{H}_*$.)

Пример X – топ. пр., $SX = X \times [-1,1] \Big/ \begin{smallmatrix} (x,1) \sim (y,1), \\ (x,-1) \sim (y,-1), \\ (\forall x, y \in X) \end{smallmatrix}$ – суспензија

SX:



Уочимо подскупове од SX:

$A = SX \setminus \{p\} \simeq CX \simeq *$ $\quad$ (CX = конус)

$B = SX \setminus \{q\} \simeq CX \simeq *$

$A \cap B = SX \setminus \{p, q\} \simeq X$

Применимо МВ на $SX = A \cup B$:

$$\cdots \to \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \to \cdots$$

$$\cdots \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\tilde{H}_n(CX)}} \oplus \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\tilde{H}_n(CX)}} \longrightarrow \tilde{H}_n(SX) \to \tilde{H}_{n-1}(X) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\tilde{H}_{n-1}(CX)}} \oplus \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\tilde{H}_{n-1}(CX)}} \to \cdots$$

$\Rightarrow$ имамо тачан низ: $0 \to \tilde{H}_n(SX) \to \tilde{H}_{n-1}(X) \to 0$

$\Rightarrow \quad \tilde{H}_n(SX) \cong \tilde{H}_{n-1}(X).$

Специјално, ако је S^m сфера димензије m, видели смо раније $S^m = S(S^{m-1}) = S(S(S^{m-2})) = \dots$

па је $\tilde{H}_n(S^m) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{m-1}) \cong \tilde{H}_{n-2}(S^{m-2}) \cong \dots$ (*)

Лако можемо одредити хомологију од $S^0 = \bullet \ \bullet$ (2 тачке)

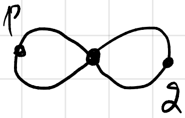
$$\tilde{H}_n(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

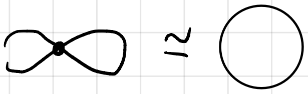
па из (*) добијамо

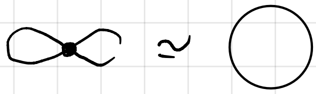
$$\tilde{H}_n(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad m \geq 1$$

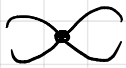
тј. пошто је $H_0 \cong \tilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z}$,

$$H_n(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad m \geq 1.$$

Пример $X =$  $= S^1 \vee S^1$

$A = X \setminus \{p\} =$  $= S^1$

$B = X \setminus \{q\} =$  $= S^1$

$A \cap B =$  $\simeq *$

MB низ: $\dots \to \tilde{H}_n(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \to \dots$

$$\dots \to \underbrace{\tilde{H}_n(*)}_{0} \longrightarrow \tilde{H}_n(S^1) \oplus \tilde{H}_n(S^1) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \to \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(*)}_{0} \to \dots$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_n(S^1) \oplus \tilde{H}_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

VII Хомологија ћелијских комплекса

деф. Ћелијски комплекс (или CW-комплекс) је Хаусдорфов простор X са колекцијом дисјунктних отворених ћелија e_α чија је унија простор X тд. важи:

(1) За сваку отворену n-дим. ћелију e^n_α постоји непр. пресл. $f_\alpha : D^n \to X$ тд. $f_\alpha|_{\text{int}\, D^n} : \text{int}\, D^n \to e^n_\alpha$ је хомеоморфизам (f_α се зове карактеристично пресликавање). Притом, ∂D^n се са f_α слика у унију коначно много ћелија димензије $\le n-1$.

(2) Скуп $A \subseteq X$ је затворен у X ако и само ако је $A \cap \bar{e}_\alpha$ затворен у $\bar{e}_\alpha$ за свако α.

деф. Нека је X ћел. комплекс и $\{e_\alpha\}$ његове ћелије. k-скелет од X је скуп свих ћелија из X димензије највише k, тј.

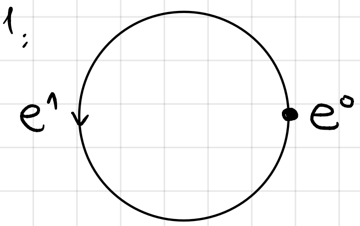
$$X^{(k)} \overset{def}{=} \{e^\alpha \mid \dim e_\alpha \le k\}$$

деф. $A \subseteq X$ је ћелијски поткомплекс од X ако је и сам ћел. к.

Теорема Ако су X и Y ћел. к., онда је и $X \times Y$ ћел. к.

Пример Круг S^1 јесте један ћел. комплекс. Једна његова ћел. декомпозиција изгледа овако:

S^1:

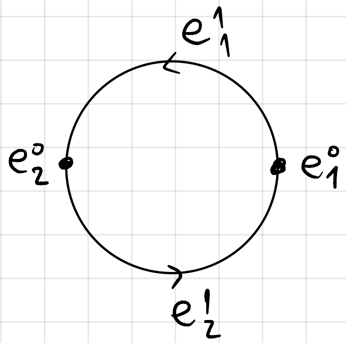


имамо једну 0-ћел: e^0 •

и једну 1-ћел: e^1 ↻ $\approx$ ⟶ $\approx \text{int}\, D^1$

Топ. простор можемо на разне начине видети као ћел. к.

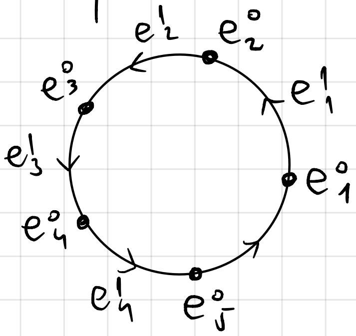
Тако S^1 има и следећу декомпозицију:



две 0-ћел: e^0_1, e^0_2

две 1-ћел: e^1_1, e^1_2

или нпр:

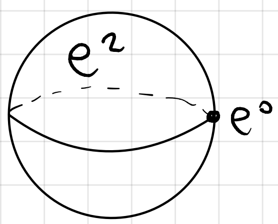


пет 0-ћел: $e^0_1, \dots, e^0_5$

пет 1-ћел: $e^1_1, \dots, e^1_5$

Пример Прве две декомпозиције из претходног примера су битне и могу се уопштити на S^n, $n \geq 2$.

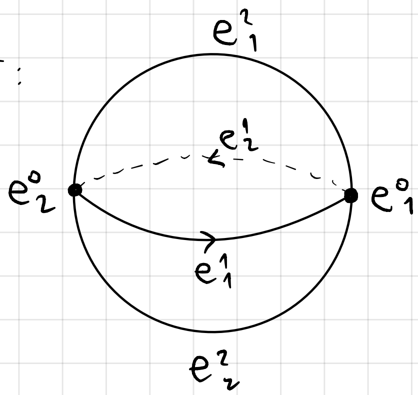
S^2:



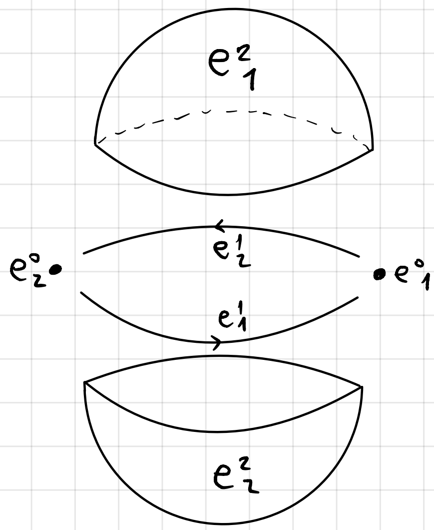
једна 0-ћел: e^0

једна 2-ћел: e^2

S^2:



тј:



две 0-ћел: e^0_1, e^0_2

две 1-ћел: e^1_1, e^1_2

две 2-ћел: e^2_1, e^2_2

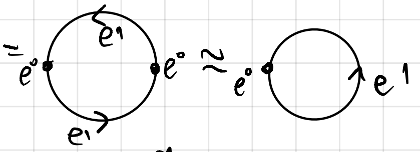
пишемо и $S^2: e^0_1, e^0_2, e^1_1, e^1_2, e^2_1, e^2_2$

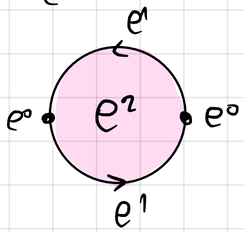
генерално имамо $S^n: e^0, e^n$ или $S^n: e^0_1, e^0_2, \dots, e^n_1, e^n_2$.

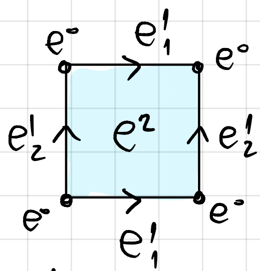
Пример $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{x\sim -x}$ – реални пројективни простор димензије n

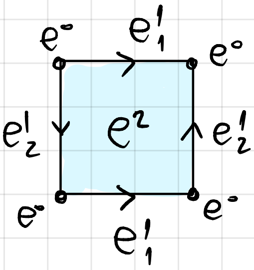
$\mathbb{R}P^n$ добијамо тако што на сфери S^n идентификујемо парове дијаметрално супротних тачака.
Кренемо од S^n и ћел. декомпозиције $S^n: e^0_1, e^0_2, \dots, e^n_1, e^n_2$.
При овој идентификацији се идентификују e^0_1 и e^0_2, e^1_1 и e^1_2, ..., e^n_1 и e^n_2, па добијамо ћел. декомпозицију

$$\mathbb{R}P^n: e^0, e^1, \dots, e^n$$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 =$  $= S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 =$ 

Пример торус T^2: 

Клајнова боца K: 

Сада дефинишемо ћелијску хомологију.

Нека је X ћелијски простор. Имамо филтрацију

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X$$

($X_n = X^{(n)}$ је n-скелет од X). Може се показати да важи:

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in H_*(X, X_n))(\exists m \geq n)$ $i_*(x) = 0$, где је $i_*: H_*(X, X_n) \to H_*(X, X_m)$

(2) $H_q(X_n, X_{n-1}) = 0$ за $q \neq n$

Важи и више од (2):

Теорема За $q \neq n$ је $H_q(X_n, X_{n-1}) = 0$, а $H_n(X_n, X_{n-1})$ је слободна Абелова група чији генератори одговарају ћелијама од X димензије n.

Нека је $C_n \overset{\text{def}}{=} H_n(X_n, X_{n-1})$ и хоћемо да дефинишемо $d_n : C_n \to C_{n-1}$ (до сад је H_n увек била сингуларна хомологија).

Посматрамо дугачке тачне низове парова (X_n, X_{n-1}), $n \in \mathbb{N}$. Ови низови имају неке заједничке елементе, нпр. $H_n(X_n)$ се појављује у дтн. и за (X_n, X_{n-1}) и за (X_{n+1}, X_n):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to H_n(X_{n-1}) \to & H_n(X_n) & \to H_n(X_n, X_{n-1}) \to \cdots \\ & \| & \\ \cdots \to H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to & H_n(X_n) & \to H_n(X_{n+1}) \to \cdots \end{array}$$

Због тога можемо „испреплетати" дтн. на следећи начин:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\vdots \arrow[d] & & & \cdots \arrow[dl, "j_*"'] & \arrow[l] \text{дтн. за } (X_{n+1}, X_n) \\
C_{n+1} \arrow[dd, "d"'] & = & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[dr, "\partial"] & & \\
& & & H_n(X_n) \arrow[dl, "j_*"'] & \arrow[l] \text{дтн. за } (X_n, X_{n-1}) \\
C_n \arrow[dd, "d"'] & = & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[dr, "\partial"] & & \\
& & & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[dl, "j_*"'] & \arrow[l] \text{дтн. за } (X_{n-1}, X_{n-2}) \\
C_{n-1} \arrow[dd, "d"'] & = & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \arrow[dr, "\partial"] & & \\
& & & H_{n-2}(X_{n-2}) \arrow[dl, "j_*"'] & \arrow[l] \text{дтн. за } (X_{n-2}, X_{n-3}) \\
C_{n-2} \arrow[d] & = & H_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-3}) \arrow[dr, "\partial"] & & \\
\vdots & & & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

Дефинишемо $d : C_n \to C_{n-1}$ као композицију:

$$d \overset{def}{=} j_* \circ \partial$$

Приметимо: $d^2 = j_* \circ \underbrace{\partial \circ j_*}_{=0} \circ \partial = 0$

јер су ови ∂ и j_* део истог дтн. па је ова композиција тривијална из тачности дтн.

Дакле, (C_n, d) јесте један ланчасти комплекс.

деф. Ћелијска хомологија ћелијског комплекса X је

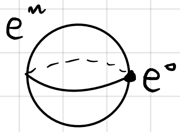
$$H_n^{CW}(X) \overset{def}{=} H_n(C_*), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема Нека је X ћелијски комплекс. Тада је

$$\underset{\text{ћелијска хомологије}}{H_n^{CW}(X)} \cong \underset{\text{сингуларне хомологије}}{H_n(X)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Дакле, може се показати да су ћел. и синг. хомологије исте, па ћемо користити исту ознаку: $H_n(X)$.
Сингуларне хомологије има једноставнији гранични оператор $d_n : C_n \to C_{n-1}$, док ћелијска хомологије има компликованије дефинисан d_n, али једноставније групе C_n. Због тога су обе дефиниције корисне.

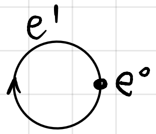
Пример $S^n : e^0, e^n$



$$C_* : \quad \cdots \to \underset{C_{n+1}}{0} \to \underset{C_n}{\mathbb{Z}} \to \underset{C_{n-1}}{0} \to \cdots \to \underset{C_1}{0} \to \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0 \qquad \text{тј.} \quad C_i = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1° $n = 0$: $S^0 = \bullet \ \bullet$ две тачке, па је $H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & k = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2° $n = 1$: $S^1 =$



$$C_* : \quad \cdots \to 0 \to \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

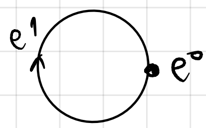
$C_1 \cong \mathbb{Z}$ је слободна Абелова група генерисана са e^1 што пишемо као $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1 \rangle$, прецизније

$$\mathbb{Z}\langle e_1 \rangle = \{ k \cdot e_1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Дакле, $C_1 \cong \mathbb{Z}$ значи да је C_1 изоморфно са $\mathbb{Z}$, али има разних група изо. $\mathbb{Z}$. Конкретно, $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1\rangle$, тј. C_1 је баш једнако групи свих целобројних умножака генератора e^1. Обе нотације су нам корисне, па их користимо по потреби. Овде нам треба прецизније нотација:

$$C_* : \cdots \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

Очигледно је $d_i = 0$ за $i \neq 0$ (јер су или домен или кодомен од d_i једнаки 0). Пресликавање d_1 одређујемо из ћел. модела:



$d_1(e^1) = [\text{почетак од } e^1] - [\text{крај од } e^1] = e^0 - e^0 = 0$

d_1 слика генератор у 0, па је $d_1 \equiv 0$ јер

$$d_1(\underbrace{k\cdot e^1}_{\substack{\text{произвољни}\\ \text{ел. у } C_1}}) = k\cdot d_1(e^1) = k\cdot 0 = 0.$$

Закључујемо $d_i = 0$, за све $i \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow H_i(S^1) \cong \ker d_i / \operatorname{im} d_i = C_i/_0 = C_i \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0,1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

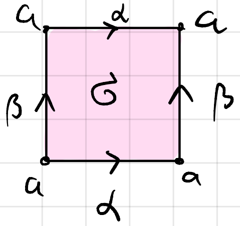
3° $n \geq 2$ $\quad S^n : e^0, e^n$

$$C_* : \cdots \to 0 \to \overset{C_n}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}\langle e^n\rangle}} \to 0 \to \cdots \to 0 \to \overset{C_0}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}\langle e^0\rangle}} \to 0$$

Видимо да је $d_i = 0$, за свако $i \in \mathbb{Z}$, па је

$$H_i(S^n) \cong \ker d_i / \operatorname{im} d_i = C_i/_0 = C_i \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример Торус T^2:



0-ћел: a

1-ћел: α, β

2-ћел: σ

$$C_* : \cdots \to 0 \to \overset{C_2}{\overset{\|}{\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle}} \xrightarrow{d_2} \overset{C_1}{\overset{\|}{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle}} \xrightarrow{d_1} \overset{C_0}{\overset{\|}{\mathbb{Z}\langle a\rangle}} \to 0$$

$d_i = 0$ за $i \neq 1,2$

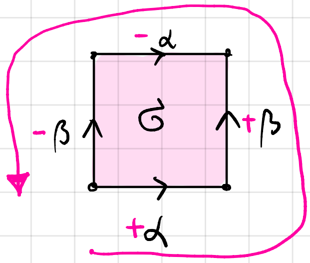
$C_i = 0$ за $i = 0,1,2$ $\Rightarrow$ $H_i(T^2) = 0$ за $i \geq 3$.

$i=0$: T^2 је путно повезан, па је $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

$i=1$: $d_1(\alpha) = \underset{\text{почетак}}{a} - \underset{\text{крај}}{a} = 0$, $d_1(\beta) = a - a = 0$ $\Rightarrow$ $d_1 \equiv 0$

$$d_2(\sigma) = \underbrace{\alpha + \beta - \alpha - \beta}_{} = 0 \Rightarrow d_2 \equiv 0$$

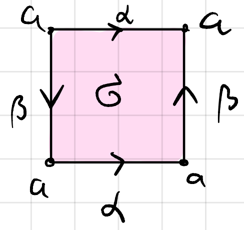
идемо у круг по граници од σ и све што је у смеру кретања додајемо, а што је у супротном смеру одузимамо



$\Rightarrow H_1(T^2) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong C_1/0 \cong C_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$

$i=2$: $H_2(T^2) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 \cong C_2/0 \cong C_2 \cong \mathbb{Z}$

Коначно, $H_i(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0,2 \\ \mathbb{Z}^2, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Пример Клајнова боца K: 

0-ћел : a

1-ћел : α, β

2-ћел : σ

$$C_* : \cdots \to 0 \to \overset{C_2}{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle}} \xrightarrow{d_2} \overset{C_1}{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle}} \xrightarrow{d_1} \overset{C_0}{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}\langle a\rangle}} \to 0$$

$d_i = 0$ за $i \neq 1,2$

$C_i = 0$ за $i = 0,1,2 \Rightarrow H_i(K) = 0$ за $i \geq 3$.

$i=0$: K је путно повезан, па је $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

$i=1$: $d_1(\alpha) = a - a = 0$, $d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 \equiv 0$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$$

$\operatorname{im} d_2 = ?$

$$d_2(\underbrace{k \cdot \sigma}_{\text{произвољан ел. у } C_2}) = k \cdot d_2(\sigma) = k \cdot 2\beta = 2k \cdot \beta$$

$\Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \{k \cdot 2\beta \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle$

Дакле, $\operatorname{im} d_2 \cong \mathbb{Z}$, а представља $\operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle \leq C_1$

$\ker d_2 = ?$

$$0 = d_2(k \cdot \sigma) = 2k\beta \iff k = 0 \quad (\text{јер је } \beta \text{ ген. па } \beta \neq 0)$$

$$\iff \ker d_2 = 0$$

$$\Rightarrow H_1(K) \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong C_1 / \mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle = \frac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle} \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \underbrace{\alpha + \beta = \beta + \alpha}_{\text{због } \oplus \ \alpha \text{ и } \beta \text{ комутирају}}, 2\beta = 0 \rangle \cong \langle \alpha \mid - \rangle \oplus \langle \beta \mid 2\beta = 0 \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

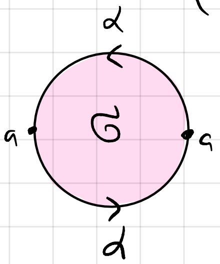
подсетимо се задавања група помоћу генератора и релација

(Видети у белешкама са вежби ОТ представљање групе преко генератора и релација стр. 69-74)

$i=2$: $H_2(K) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 \cong 0/0 = 0$

Коначно, $H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Пример $\mathbb{R}P^2$



$$C_*: \cdots \to 0 \to \underset{\substack{\| \\ C_2}}{\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle} \xrightarrow{d_2} \underset{\substack{\| \\ C_1}}{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle} \xrightarrow{d_1} \underset{\substack{\| \\ C_0}}{\mathbb{Z}\langle a\rangle} \to 0$$

$d_1(\alpha) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 \equiv 0$

$d_2(\sigma) = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \ker d_2 = 0, \quad \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle$

$H_i(\mathbb{R}P^2) = 0, \quad i \neq 0,1,2$

$H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$ (јер је путно повезан)

$H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = C_1 / \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle \cong \dfrac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle} \cong \langle \alpha \mid 2\alpha = 0\rangle \cong \mathbb{Z}_2$

$H_2(\mathbb{R}P^2) \cong \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = 0/0 = 0$

Дакле,

$$H_i(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}_2, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример Знамо $S^2=M_0$, $T^2=M_1$, $\mathbb{R}P^2=N_1$, $K=N_2$. Претходни резултати се могу уопштити:

$$H_i(M_g)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0\\ \mathbb{Z}^{2g}, & i=1\\ \mathbb{Z}, & i=2\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}, \qquad g\in\mathbb{N}_0$$

$$H_i(N_k)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0\\ \mathbb{Z}^{k-1}\oplus\mathbb{Z}_2, & i=1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Примећујемо: $H_2(M_g)\cong\mathbb{Z}$, $H_2(N_k)=0$. Важи и општије: ако је X повезана затворена многострукост, онда

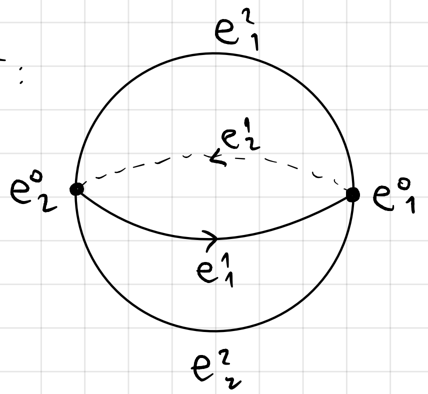
X је оријентабилна $\Leftrightarrow$ $H_n(X)\cong\mathbb{Z}$

X је неоријентабилна $\Leftrightarrow$ $H_n(X)=0$

Пример $\mathbb{R}P^n$: $e^0, e^1, \dots, e^n$

Ћелијска декомпозиција $\mathbb{R}P^n$ добијена је помоћу декомпозиције сфере:

S^2:



Код сфере S^n имамо:

$$C_*: \dots \to 0 \to C_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_0 \to 0$$

где је $C_k = \mathbb{Z}\langle e_1^k \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle e_2^k \rangle$, $k = \overline{0,n}$

$d_0 = 0$

$d_1(e_1^1) = e_1^0 - e_2^0$, $d_1(e_2^1) = e_2^0 - e_1^0$

$d_2(e_1^2) = e_1^1 + e_2^1$, $d_2(e_2^2) = e_1^1 + e_2^1$

$d_3(e_1^3) = e_1^2 - e_2^2$, $d_3(e_2^3) = e_2^2 - e_1^2$

$d_4(e_1^4) = e_1^3 + e_2^3$, $d_4(e_2^4) = e_1^3 + e_2^3$

$\vdots$

У случају $\mathbb{R}P^n$ имамо:

$$C_*: \dots \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^n \rangle \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}\langle e^{n-1} \rangle \to \dots \to \mathbb{Z}\langle e^2 \rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle e^1 \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle \to 0$$

где смо e^k добили идентификацијом e_1^k и e_2^k са S^n, па d_k код $\mathbb{R}P^n$ добијамо кад у d_k од S^n обришемо све индексе:

$d_1(e^1) = e^0 - e^0 = 0$

$d_2(e^2) = e^1 + e^1 = 2e^1$

$d_3(e^3) = e^2 - e^2 = 0$

$d_4(e^4) = e^3 + e^3 = 2e^3$

$\vdots$

Дакле, $d_{2i}(e^{2i}) = 2e^{2i-1}$, $d_{2i+1}(e^{2i+1}) = 0$, па добијамо

тј. d_{2i} је множење са 2

1° n парно

$$C_* : \quad \cdots \to 0 \to \underset{C_n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_{n-1}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_{n-2}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \cdots \xrightarrow{0} \underset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$H_0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_i(\mathbb{R}P^n) = 0, \quad i > n$$

$$H_{2i}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i} / \operatorname{im} d_{2i+1} = 0/0 = 0, \quad 0 < 2i \le n$$

$$H_{2i+1}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i+1} / \operatorname{im} d_{2i+2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2, \quad 2i+1 \le n$$

2° n непарно

$$C_* : \quad \cdots \to 0 \to \underset{C_n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_{n-1}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_{n-2}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \cdots \xrightarrow{0} \underset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$H_0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_i(\mathbb{R}P^n) = 0, \quad i > n$$

$$H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} \cong C_n / 0 \cong \mathbb{Z}$$

$$H_{2i}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i} / \operatorname{im} d_{2i+1} = 0/0 = 0, \quad 0 < 2i < n$$

$$H_{2i+1}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i+1} / \operatorname{im} d_{2i+2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2, \quad 2i+1 < n$$

Оба случаја можемо заједно записати као:

$$H_i(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0, \ i=n \text{ непарно} \\ \mathbb{Z}_2, & i \text{ непарно и } i \le n-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

VIII Теореме о универзалним коефицијентима и Кинетова формула

Тензорски производ и Tor функтор

деф. Нека су A и B Абелове групе и $F(A,B)$ слободна Абелова група генерисана елементима из $A\times B$, тј.

$$F(A,B) := F[A\times B] = \{\alpha_1(a_1,b_1)+\dots+\alpha_k(a_k,b_k) \mid k\in\mathbb{N},\ \alpha_i\in\mathbb{Z}\}.$$

Нека је $R(A,B)$ подгрупа од $F(A,B)$ генерисана елементима облика:

$$(a, b_1+b_2) - (a,b_1) - (a,b_2)$$

и

$$(a_1+a_2, b) - (a_1,b) - (a_2,b),$$

где $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$.

Тензорски производ група A и B дефинишемо као

$$A\otimes B \overset{\text{def}}{=} F(A,B)/R(A,B)$$

класу $[(a,b)]\in A\otimes B$ означавамо са $a\otimes b$.

Главна особина $\otimes$ је тзв. универзално својство

Теорема [универзално својство] За сваку Абелову гр. C и билинеарно пресликавање $\phi: A\times B\to C$ постоји $\tilde{\phi}: A\otimes B\to C$ тд. следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"'] & A\otimes B \arrow[d, dashed, "\tilde{\phi}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

тј. тд. $\tilde{\phi}\circ\pi = \phi$.

(π је природна проj. – $\pi(a,b) = a\otimes b$)

Особине тензорског производа:

(1) $A \otimes B \cong B \otimes A$

(2) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

(3) $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right) \otimes B \cong \bigoplus_{i\in I} (A_i \otimes B)$, $\quad A \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) \cong \bigoplus_{j\in J} (A \otimes B_j)$

(4) $\mathbb{Z} \otimes B \cong B \otimes \mathbb{Z} \cong B$ ($\mathbb{Z}$ је неутрал за $\otimes$)

(5) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\text{НЗД}(m,n)}$ (нпр. $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_3$)

Став Тензорски производ је десно тачан функтор, тј. ако је низ $B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ тачан и A Абелова, онда је и $\underbrace{A \otimes B' \xrightarrow{1\otimes f} A \otimes B \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes B'' \to 0}_{(*)}$ тачан.

Ако је $0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ КТН, у општем случају низ

$$0 \to A \otimes B' \xrightarrow{1\otimes f} A \otimes B \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes B'' \to 0$$

не мора бити тачан, али низ $(*)$ се може допунити неким другим групама са леве стране тд. буде тачан.

деф. Нека су A и B Абелове групе. Слободна резолвента групе B је тачан низ $0 \to F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \to 0$ где су F_0 и F_1 слободне. Тада имамо тачан низ:

$$0 \to \ker(1\otimes d) \to A \otimes F_1 \xrightarrow{1\otimes d} A \otimes F_0 \xrightarrow{1\otimes \varepsilon} A \otimes B \to 0$$

и дефинишемо Tor функтор групе A и B као:

$$\mathrm{Tor}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \ker(1\otimes d).$$

(може се показати да Tor не зависи од избора слободне резолвенте.)

Особине Tor функтора:

(1) $\text{Tor}(A,B) \cong \text{Tor}(B,A)$

(2) $\text{Tor}\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \text{Tor}(A_i, B)$, $\text{Tor}\left(A, \bigoplus_{j\in J} B_j\right) \cong \bigoplus_{j\in J} \text{Tor}(A, B_j)$

(3) Ако је B слободно, $\text{Tor}(A,B)=0$.
Специјално, $\text{Tor}(A,\mathbb{Z})=0$

(4) $\text{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{\text{НЗД}(m,n)}$

Теорема о универзалним коефицијентима

Сингуларни л.к. дефинисали смо као

$$S_n(X) = \{\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_k\sigma_k \mid \sigma_i : \Delta^n \to X \text{ непр.}, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Z}\} \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{Z}$$

Нека је G Абелова група. Тада

$$S_n(X) \otimes G \cong \left(\bigoplus_{\sigma} \mathbb{Z}\right) \otimes G \cong \bigoplus_{\sigma} (\mathbb{Z} \otimes G) \cong \bigoplus_{\sigma} G =$$

$$= \{\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_k\sigma_k \mid \sigma_i : \Delta^n \to X \text{ непр.}, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in G\}$$

деф. За топ. пар (X,A) и Абелову групу G дефинишемо

$$S_*(X,A;G) \overset{\text{def}}{=} S_*(X,A) \otimes G.$$

Ово је ланчасти комплекс са граничним оператором $d \otimes \mathbb{1}$.
$S_*(X,A;G)$ је сингуларни л.к. са коефицијентима у G.
Хомологија пара (X,A) са коеф. у G је

$$H_n(X,A;G) \overset{\text{def}}{=} H_n(S_*(X,A;G)).$$

Специјално, за $A=\emptyset$ имамо хомологију топ. пр. X са коеф. у G: $H_n(X;G) = H_n(X,\emptyset;G)$.

Дакле, хомологија са којом смо до сада радили је управо хомологија са коеф. у $\mathbb{Z}$:

$$H_n(X,A) \cong H_n(X,A;\mathbb{Z}).$$

Теорема [о универзалним коефицијентима] Нека је C_* л.к. слободних Абелових гр. и G Абелова група. Тада постоји природан КТН.

$$0 \to H_n(C_*) \otimes G \to H_n(C_* \otimes G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \to 0$$

који се цепа, тј.

$$H_n(C_* \otimes G) \cong \big(H_n(C_*) \otimes G\big) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G).$$

То да је КТН. природан значи да за свако ланчасто пресл. $\varphi: C_* \to D_*$ комутира следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(C_*) \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(C_* \otimes G) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(C_*) \otimes G \arrow[r] & H_n(C_* \otimes G) \arrow[r] & \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Специјално, кад за C_* узмемо сингуларни л.к. $S_*(X)$, где је X топ. пр., добијамо формулу за рачунање хомологије са коеф. у G преко „обичне" хомологије (са коеф. у $\mathbb{Z}$):

$$H_n(X;G) \cong \big(H_n(X) \otimes G\big) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G).$$

Пример $H_n(\mathbb{R}P^7) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,7 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1,3,5 \\ 0, & иначе \end{cases}$, $G=\mathbb{Z}_2$

$$H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_n(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big) \oplus \mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big)$$

$n\geq 8$: $H_n(\mathbb{R}P^7)$ и $H_{n-1}(\mathbb{R}P^7)$ су 0, па је $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2)=0$

$n=0$: $H_0(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong H_0(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$

$n=1$: $H_1(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_1(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}\big)\oplus\mathrm{Tor}\big(H_0(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$\cong (\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2$

$n=2,4,6$: $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_n(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big)\oplus\mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$\cong (0\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) \cong 0\oplus\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$

$n=3,5$: $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_n(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big)\oplus\mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$\cong (\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2$

$n=7$: $H_7(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}) \cong \big(H_7(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big)\oplus\mathrm{Tor}\big(H_6(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$\cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2$

Коначно, $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n=0,1,\dots,7 \\ 0, & n\geq 8 \end{cases}$

Кинетова формула

Кинетова формула нам даје везу између хомологије простора X и Y и хомологије њиховог производа $X\times Y$. Код фундаменталне групе имали смо једноставну формулу $\pi_1(X\times Y)\cong \pi_1(X)\times \pi_1(Y)$, док је у хомологији ситуација мало компликованија.

Теорема [Кинет] Нека су X и Y топ. пр. Тада постоји природан ктн. који се цепа:

$$0\to \bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)\to H_n(X\times Y)\to \bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}\big(H_p(X),H_q(Y)\big)\to 0$$

тј. имамо изоморфизам:

$$H_n(X\times Y)\cong\Big[\bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)\Big]\oplus\Big[\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}\big(H_p(X),H_q(Y)\big)\Big].$$

Пример Одредити $H_*(\mathbb{R}P^2\times S^2)$.

$$H_n(\mathbb{R}P^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0\\ \mathbb{Z}_2, & n=1\\ 0, & n\geq 2\end{cases}\qquad H_n(S^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0,2\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Приметимо да за $n\geq 4$ је или $H_p(X)=0$ или $H_q(X)=0$ у $\bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)$, па је $\bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)=0$.

Слично, за $n\geq 5$ је $\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}\big(H_p(X),H_q(Y)\big)=0$.

Дакле, за $n \geq 5$ је $H_n(\mathbb{R}P^2 \times S^2) = 0$.

$H_0(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ (јер је $\mathbb{R}P^2 \times S^2$ путно повезан)

$$H_1(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \big(H_0(\mathbb{R}P^2) \otimes H_1(S^2)\big) \oplus \big(H_1(\mathbb{R}P^2) \otimes H_0(S^2)\big) \oplus$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(H_0(\mathbb{R}P^2), H_0(S^2)) \cong$$
$$\cong \underbrace{(\mathbb{Z} \otimes 0)}_{0} \oplus \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}_2} \oplus \underbrace{\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{0} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \big(H_0(\mathbb{R}P^2) \otimes H_2(S^2)\big) \oplus \big(H_1(\mathbb{R}P^2) \otimes H_1(S^2)\big) \oplus \big(H_2(\mathbb{R}P^2) \otimes H_0(S^2)\big)$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(H_0(\mathbb{R}P^2), H_1(S^2)) \oplus \operatorname{Tor}(H_1(\mathbb{R}P^2), H_0(S^2)) \cong$$
$$\cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \oplus \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, 0) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})}_{0} \cong$$
$$\cong \mathbb{Z}$$

$$H_3(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong (\mathbb{Z} \otimes 0) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, 0) \oplus \operatorname{Tor}(0, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_4(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong (\mathbb{Z} \otimes 0) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z})$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, 0) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(0, 0) \oplus \operatorname{Tor}(0, \mathbb{Z}) = 0$$

Коначно,
$$H_n(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}_2, & n = 1, 3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases}$$