Тензорски производ и Tor функтор

A, B – Абелове групе

$F(A,B) := F[A \times B] = Ab\langle A\times B \mid - \rangle$ – слободна Абелова гр. генерисана елементима из $A \times B$

$R(A,B) \leq F(A,B)$

подгрупа генерисана са:

$(a_1+a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$ и $(a, b_1+b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$,

где су $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$.

Тензорски производ група A и B је

$$A \otimes B \overset{def}{=} F(A,B) / R(A,B)$$

Особине:

(1) $A \otimes B \cong B \otimes A$

(2) $\left(\bigoplus_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \otimes B \cong \bigoplus_{\alpha \in A} (A_\alpha \otimes B)$

(3) $A \otimes \left(\bigoplus_{\beta \in B} B_\beta\right) \cong \bigoplus_{\beta \in B} (A \otimes B_\beta)$

(4) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

(5) $G \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes G \cong G$

(6) $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{НЗД(n,m)}$

особине (5) и (6) су нам најкорисније за задатке

Tor функтор је функтор који пару Абелових група G и H додељује Абелову групу $Tor(G, H)$.
(Нећемо формално дефинисати Tor већ само навести битне особине.)

Особине: (1) A или B слободна $\Rightarrow \operatorname{Tor}(A,B)=0$

(специјално $\operatorname{Tor}(A,\mathbb{Z})=\operatorname{Tor}(\mathbb{Z},B)=0$)

(2) $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_n,B)\cong \ker(B\xrightarrow{\cdot n}B)$

(3) $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)\cong\mathbb{Z}_{\text{НЗД}(n,m)}$

(4) $\operatorname{Tor}(A,B)\cong\operatorname{Tor}(B,A)$

(5) $\operatorname{Tor}\left(\bigoplus_{\alpha\in A}A_\alpha,B\right)\cong\bigoplus_{\alpha\in A}\operatorname{Tor}(A_\alpha,B)$.

У задацима корисно (1) и (3)

Теорема о универзалним коефицијентима и Кинетова формула

Може се дефинисати хомологија простора X са коефицијентима у Абеловој групи G (ознака: $H_n(X;G)$), а ТОУК је алат за рачунање $H_n(X;G)$ када знамо $H_n(X)$.

($H_n(X)$ је исто што и $H_n(X;\mathbb{Z})$).

Теорема [о универзалним коефицијентима]

Нека је X тополошки простор и G Абелова. Тада је следећи низ тачан

$$0\to H_n(X)\otimes G\to H_n(X;G)\to\operatorname{Tor}(H_{n-1}(X),G)\to 0$$

и цепа се, тј.

$$H_n(X;G)\cong(H_n(X)\otimes G)\oplus\operatorname{Tor}(H_{n-1}(X),G),\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

1. Одредити $H_n(X;\mathbb{Z}_5)$, ако је $H_n(X)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0\\ \mathbb{Z}_5, & n=17\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & n=22\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

решење За $n \notin \{0,1,17,18,22,23\}$ је $H_n(X) = 0 = H_{n-1}(X)$, па је и $H_n(X;\mathbb{Z}_5) = 0$. Још ових 6 група да одредимо.

$$H_0(X;\mathbb{Z}_5) \cong H_0(X)\otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_1(X;\mathbb{Z}_5) \cong (H_1(X)\otimes\mathbb{Z}_5) \oplus \operatorname{Tor}(H_0(X),\mathbb{Z}_5) \cong 0 \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_5) = 0$$

$$H_{17}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (H_{17}(X)\otimes\mathbb{Z}_5) \oplus \operatorname{Tor}(\underbrace{H_{16}(X)}_{=0},\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5\otimes\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{18}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (\underbrace{H_{18}(X)}_{=0}\otimes\mathbb{Z}_5) \oplus \operatorname{Tor}(H_{17}(X),\mathbb{Z}_5) \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{22}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (H_{22}(X)\otimes\mathbb{Z}_5) \oplus \operatorname{Tor}(\underbrace{H_{21}(X)}_{=0},\mathbb{Z}_5) \cong (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2)\otimes\mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{23}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (\underbrace{H_{23}(X)}_{=0}\otimes\mathbb{Z}_5) \oplus \operatorname{Tor}(H_{22}(X),\mathbb{Z}_5) \cong \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_5) = 0$$

Теорема [Кинет] Нека су X и Y тополошки простори. Тада

$$H_n(X\times Y) \cong \left(\bigoplus_{i=0}^{n} H_i(X)\otimes H_{n-i}(Y)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \operatorname{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y))\right)$$

2. Одредити хомологију простора $X = \mathbb{R}P^3 \times N_4$.

решење

$$H_k(\mathbb{R}P^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0,3 \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad H_k(N_4) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3, & k=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

За $k \geq 6$ је $H_k(X) = 0$.

X путно пов. $\Rightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Још за $k \in \{1,2,3,4,5\}$.

$$H_1(X) \cong \left(H_0(\mathbb{R}P^3)\otimes H_1(N_4)\right) \oplus \left(H_1(\mathbb{R}P^3)\otimes H_0(N_4)\right) \oplus \mathrm{Tor}\left(H_0(\mathbb{R}P^3), H_0(N_4)\right) \cong$$

$$\cong \left(\mathbb{Z}\otimes(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3)\right) \oplus \left(\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}\right) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{0} \cong \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}^3$$

$$H_2(X) \cong \left(H_0(\mathbb{R}P^3)\otimes H_2(N_4)\right) \oplus \left(H_1(\mathbb{R}P^3)\otimes H_1(N_4)\right) \oplus \left(H_2(\mathbb{R}P^3)\otimes H_0(N_4)\right) \oplus$$

$$\oplus \mathrm{Tor}\left(H_0(\mathbb{R}P^3), H_1(N_4)\right) \oplus \mathrm{Tor}\left(H_1(\mathbb{R}P^3), H_0(N_4)\right) \cong$$

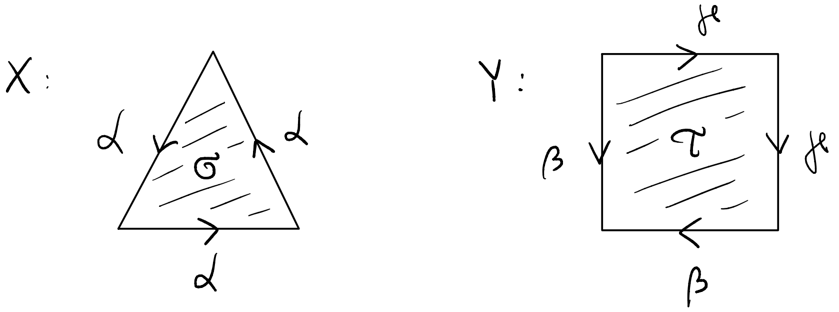
$$\cong 0 \oplus \left(\mathbb{Z}_2\otimes(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3)\right) \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2^4$$

$$H_3(X) \cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$$

$$H_4(X) \cong \left(\mathbb{Z}\otimes(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3)\right) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3$$

$$H_5(X) = 0. \quad \blacksquare$$

3. Дати су простори X и Y.



(а) Одредити хомологију од X и Y.

(б) Одредити $H_n(X;\mathbb{Z}_2)$ и $H_n(Y;\mathbb{Z}_2)$, $n\in\mathbb{N}_0$.

(в) Одредити $H_n(X;\mathbb{Z}_3)$ и $H_n(Y;\mathbb{Z}_3)$, $n\in\mathbb{N}_0$.

(г) Одредити хомологију простора $X\times Y$.

(д) Одредити $H_n(X\times Y;\mathbb{Z}_4)$.

Решење (а) Декомпозиција од X:

0-ћел: a

1-ћел: α

2-ћел: σ

$$C_*(X): \quad 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle \xrightarrow{d_0} 0$$

Очигледно је $d_n = 0$ за $n \neq 1,2$

$$d_1(\alpha) = a - a = 0$$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 3\alpha\rangle$$

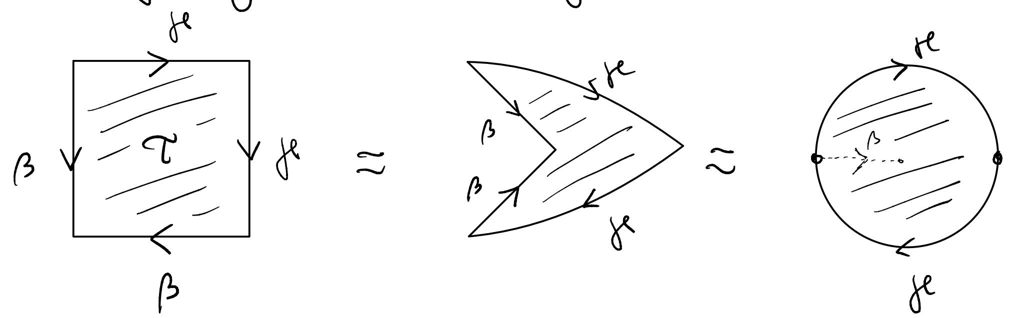
$$\ker d_2 = 0$$

Коначно, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ (јер је X путно повезан)

$$H_1(X) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle / \mathbb{Z}\langle 3\alpha\rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_n(X) = 0, \quad n \geq 2$$

Приметимо да у Y можемо да залепимо β:

$Y =$ 

$= \mathbb{R}P^2$

па је $H_n(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

(б) $H_n(X; \mathbb{Z}_2) = ?$

$$H_n(X;\mathbb{Z}_2) \cong \left(H_n(X) \otimes \mathbb{Z}_2\right) \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_2)$$

Како је $H_n(X) = 0$ и $H_{n-1}(X) = 0$ за $n \neq 0,1,2$, то је

$$H_n(X;\mathbb{Z}_2) = 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(X;\mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(X;\mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_3\otimes\mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_{\text{НОД}(3,2)} = \mathbb{Z}_1 = 0} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)}_{=0} = 0$$

$$H_2(X;\mathbb{Z}_2) \cong (0\otimes\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad H_n(X;\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$H_n(Y;\mathbb{Z}_2) = ?$

$$H_n(Y;\mathbb{Z}_2) \cong (H_n(Y)\otimes\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(Y),\mathbb{Z}_2)$$

Слично као за X,

$$H_n(Y;\mathbb{Z}_2) = 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(Y;\mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(Y;\mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)}_{0} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(Y;\mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{(0\otimes\mathbb{Z}_2)}_{0} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Z}_2$$

Коначно, $$H_n(X;\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n=0,1,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(б) $H_n(X;\mathbb{Z}_3) = ?$

$$H_n(X;\mathbb{Z}_3) \cong (H_n(X)\otimes\mathbb{Z}_3) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X),\mathbb{Z}_3)$$

и поново

$$H_n(X;\mathbb{Z}_3) = 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(X;\mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_3) \oplus \mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_1(X;\mathbb{Z}_3) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_3\otimes\mathbb{Z}_3)}_{\mathbb{Z}_3} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_3)}_{0} \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_2(X;\mathbb{Z}_3) \cong \underbrace{(0\otimes\mathbb{Z}_3)}_{0} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3)}_{\mathbb{Z}_3} \cong \mathbb{Z}_3$$

$$\Rightarrow \quad H_n(X;\mathbb{Z}_3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & n=0,1,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$H_n(Y;\mathbb{Z}_3)=?$

опет $H_n(Y;\mathbb{Z}_3)\cong 0$, $n\geqslant 3$.

$$H_0(Y;\mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_3) \oplus \mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_1(Y;\mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_3) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_3) = 0$$

$$H_2(Y;\mathbb{Z}_3) \cong (0\otimes\mathbb{Z}_3) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad H_n(Y;\mathbb{Z}_3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(2) $H_n(X\times Y)=?$

Кинетова формула:

$$H_n(X\times Y) \cong \left(\bigoplus_{i=0}^{n} H_i(X)\otimes H_{n-i}(Y)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y))\right)$$

Када је $n\geqslant 4$ је $H_n(X\times Y)=0$, па још да одредимо хомологију у димензијама 0, 1, 2 и 3.

$H_0(X\times Y)\cong\mathbb{Z}$ (јер је $X\times Y$ путно пов.)

$$H_1(X\times Y) \cong (H_0(X)\otimes H_1(Y)) \oplus (H_1(X)\otimes H_0(Y)) \oplus \mathrm{Tor}(H_0(X), H_0(Y)) \cong$$

$$\cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus(\mathbb{Z}_3\otimes\mathbb{Z})\oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3$$

$$H_2(X\times Y)\cong\big(H_2(X)\otimes H_0(Y)\big)\oplus\big(H_1(X)\otimes H_1(Y)\big)\oplus\big(H_0(X)\otimes H_2(Y)\big)\oplus$$

$$\oplus\ \mathrm{Tor}(H_0(X),H_1(Y))\oplus\mathrm{Tor}(H_1(X),H_0(Y))\cong$$

$$\cong(0\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}_3\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus(\mathbb{Z}\otimes 0)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z})$$

$$= 0$$

$$H_3(X\times Y)\cong(0\otimes\mathbb{Z})\oplus(0\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus(\mathbb{Z}_2\otimes 0)\oplus(\mathbb{Z}\otimes 0)\oplus$$

$$\oplus\ \mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z})\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},0) = 0$$

Коначно, $H_n(X\times Y)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3, & n=1\\ 0, & иначе\end{cases}$

(g) $H_n(X\times Y;\mathbb{Z}_4)\cong\big(H_n(X\times Y)\otimes\mathbb{Z}_4\big)\oplus\mathrm{Tor}(H_{n-1}(X\times Y),\mathbb{Z}_4)$

Очигледно je $H_n(X\times Y;\mathbb{Z}_4)=0$, $n\geq 3$.

$$H_0(X\times Y;\mathbb{Z}_4)\cong(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus\mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_4$$

$$H_1(X\times Y;\mathbb{Z}_4)\cong\big((\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3)\otimes\mathbb{Z}_4\big)\oplus\underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_4)}_{0}\cong$$

$$\cong(\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus(\mathbb{Z}_3\otimes\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2$$

$$H_2(X\times Y;\mathbb{Z}_4)\cong(0\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_4)\cong$$

$$\cong\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2.$$

$$\Rightarrow H_n(X\times Y;\mathbb{Z}_4)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_4, & n=0\\ \mathbb{Z}_2, & n=1,2\\ 0, & иначе\end{cases}$$