

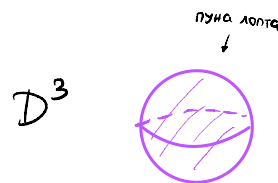
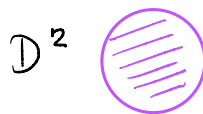
Хелмјски комплекси

Неформална дефиниција Хелмјски комплекс (или CW-комплекс) састоји се од ћелија и функција лепљења.

Ћелија = дискови D^n

нпр. D^0 •

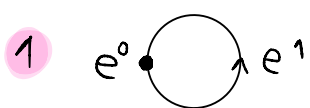
D^1 —



функција лепљења = границу ћелије лепимо на ћелије мање димензије.

Сваки Хелмјски комплекс јесте тополошки простор, али обрнуто не важи. Представљање тополошког простора као Хелмјског комплекса је Хелмјска декомпозиција тог простора. Један топ. пр. може имати више Хелмјских декомпозиција.

Пример $S^1 = \bigcirc$ - можемо направити разне декомпозиције ове кружнице

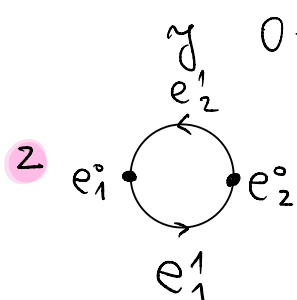


једна 0-ћелија: • e^0

једна 1-ћелија: $\rightarrow e^1$

ћелију e^1 лепимо тако што јој почетак и крај залепимо

у 0-ћелију e^0



две 0-ћелије: e_1^0, e_2^0

две 1-ћелије: e_1^1, e_2^1

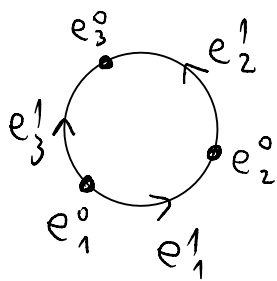
e_j^i ← димензија ћелије
← индексирање ћелија димензије i

↑ стандардна ознака за ћелије

почетак од e_1^1 лепимо на e_1^0 , а крај на e_2^0

почетак од e_2^1 лепимо на e_2^0 , а крај на e_1^0

3



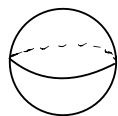
тип 0-келіе: e_1^0, e_2^0, e_3^0

тип 1-келіе: e_1^1, e_2^1, e_3^1

Пример

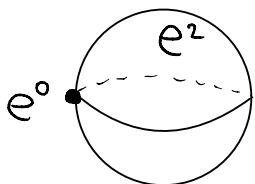
Сферу

S^2



можемо декомпозувати на
вигляд на площині, але середина глобули нам більш відома.

1

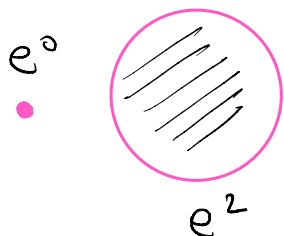


її 0-келіе: e^0

її 2-келіе: e^2 (диск)

(целу протину диска e^2 залежно на e^0)

иллюстрація:

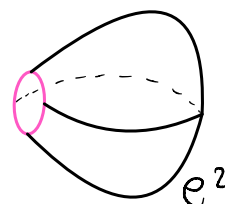


искривимо
диск

e^0

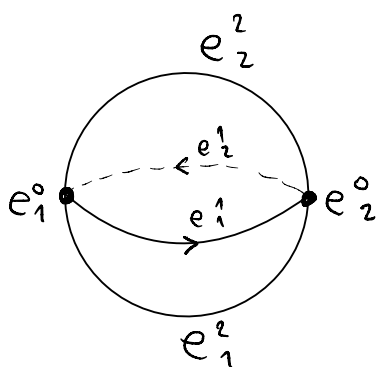


e^0



S^2

2

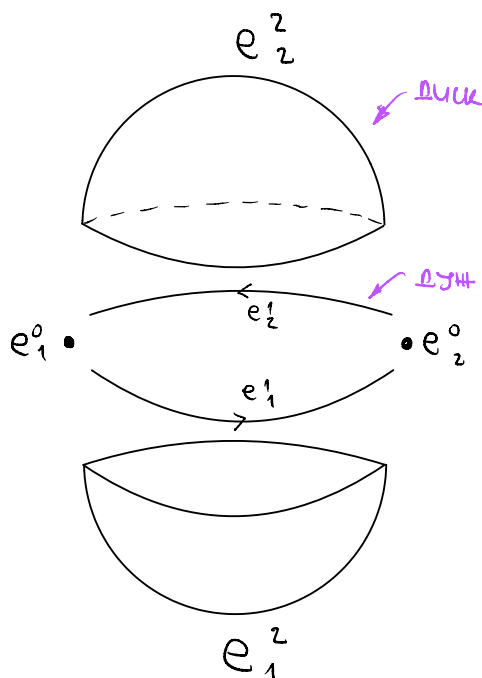


гло 0-келіе: e_1^0, e_2^0

гло 1-келіе: e_1^1, e_2^1

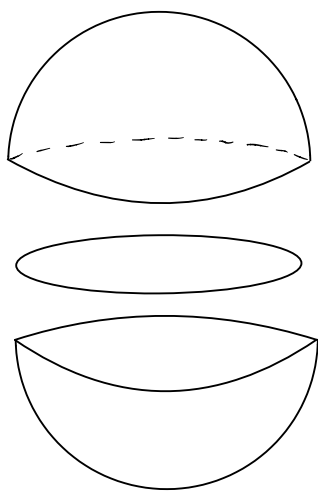
гло 2-келіе: e_1^2, e_2^2

Заглатна нпротрауије:



Келују e_1^2 лелмо токо мно јој поа пранице зделемо на e_1^1 , а поа на e_1^1 (смио и за e_2^2)

Пример Ово нје кел. декомпозиција сфере S^2 :



јер „келја“ у средине нје диск већ кружица S^1 .

Пример Реална пројективна равнина $\mathbb{RP}^2$

$$\mathbb{RP}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim, \quad \text{где је релација } \sim \text{ дава } \omega:$$

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad y = \lambda x$$

$\sim$ је релација еквиваленције, па је $\mathbb{RP}^2$ један количански простор (кон. пр. смо радим на OT)

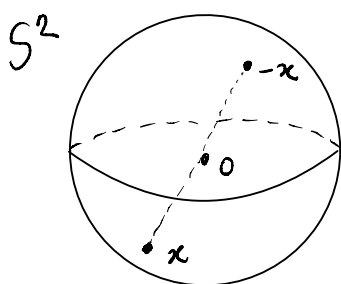
Закле, $\mathbb{RP}^2$ = скуп свих права у $\mathbb{R}^3$ које пролазе кроз координатни почетак

Може се показати да имамо хомеоморфизам

$$\mathbb{RP}^2 \cong S^2 / \sim$$

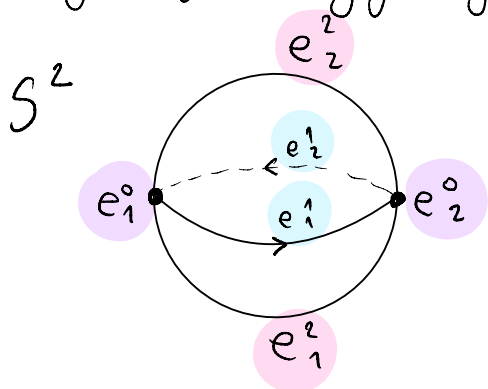
где је $\sim$ даје дава ω

$$x \sim -x, \quad x \in S^2$$

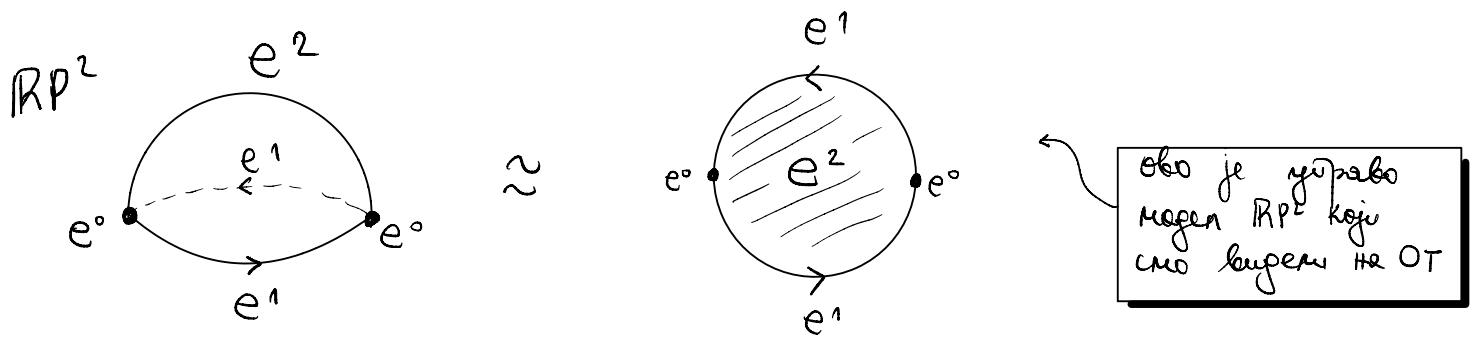


идентификујемо сваке две антиподалне тачке

Хелмхолтска декомпозиција од S^2 или даје декомпозицију од $\mathbb{RP}^2$



Антиподалном идентификујућом се идентификује e_1^0 са e_2^0 , e_1^1 са e_2^1 и e_1^2 са e_2^2 , тј. $\mathbb{RP}^2$ има по 1 ћелију у димензијама 0, 1 и 2



Пример Сфера S^n , $n \in \mathbb{N}$

Као и код S^2 имамо две занимљиве декомпозиције

- 1 једна 0-келја: e^0 (претња од e^n се зове на e^0)
једна n -келја: e^n
- 2 две 0-келје: e_1^0, e_2^0
две 1-келје: e_1^1, e_2^1
 $\vdots$
две n -келје: e_1^n, e_2^n

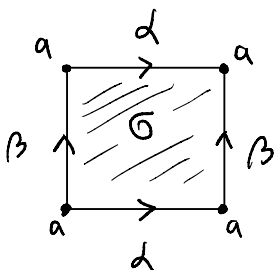
Пример Реални пројективни простор RP^n , $n \in \mathbb{N}$

$$RP^n \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \sim \approx S^n / \sim -x$$

$x \sim \lambda x$
 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

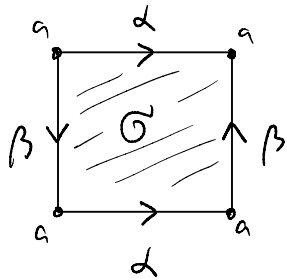
келјска декомпозиција: $e^0, e^1, e^2, \dots, e^n$

Пример Топус T^2



- 0-кел: a
1-кел: α, β
2-кел: G

Планер Кусьхово Сога K



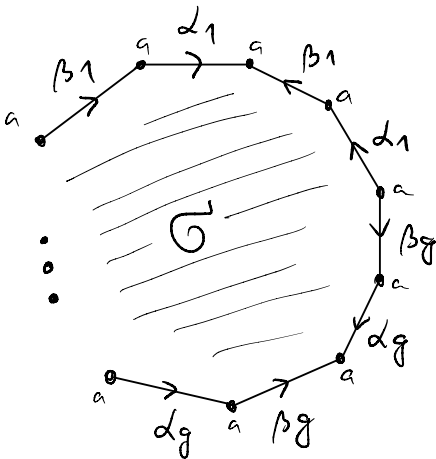
0-кен: a

1-кен: d, b

2-кен: G

Планер Пелеруу

M_g :

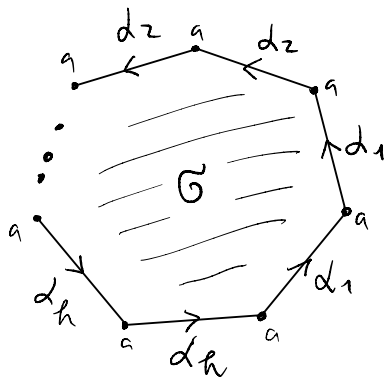


0-кен: a

1-кен: $d_1, b_1, \dots, d_g, b_g$

2-кен: G

N_h :



0-кен: a

1-кен: $d_1, \dots, d_h$

2-кен: G

Сога кено риваини кенужку аомовуру.

Келујском комплексу X припадајућемо л.к.

$$C_*(X): \quad \cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{слободна Абелова група генерисана келујским дим. } n$
(тј. $C_n \cong \mathbb{Z}^{k_n}$, $k_n = \text{ор. кел. дим. } n$)

$d_n = \text{свака } n\text{-келуја се слика у своју границу}$

Хомологије келујског комплекса X дефинише се као

$$H_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(C_*(X))$$

$\uparrow$ хомологије л.к. деф. на стр. 7

Ако су X и Y два келујска комплекса и $f: X \rightarrow Y$ непрекидно,
онда f индукује пресликавање $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, дава се
 $f_*([x]) = [f(x)]$.

Особине: (1) $(1_X)_* = 1_{H_n(X)}$, $n \in \mathbb{N}_0$

(2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(3) $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

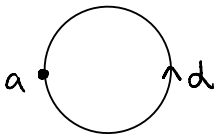
Напомена: тополошки простор може имати различите келујске
декомпозиције, али коју год декомпозицију одберемо добићемо
исту хомологију.

Коментар: $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$, где је $k = \text{ор. компоненти путање}$
повезаности од X .

1. Определить гомологический спектр

(a) S^1 ; (б) S^2 ; (в) $S^n, n \geq 3$; (г) $\mathbb{R}P^2$; (д) T^2 ; (е) K .

решение

(a) S^1 :  — это цепочка 0 и 1-клеток

$$C_*(S^1): \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1} \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

Вспомогательное $d_n = 0$ для $n \neq 1$.

$$C_1 = \mathbb{Z} \langle d \rangle = \{ \lambda d \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$$

множество всех целых кратных d

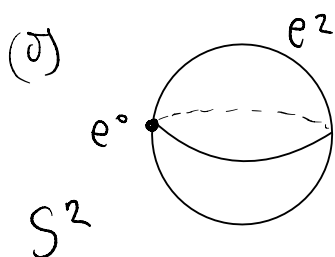
$$C_0 = \mathbb{Z} \langle a \rangle = \{ \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$$

$d_1: C_1 \rightarrow C_0$ — связь цепочек d и a в пространстве, т.е. d — "край — начало" a

$$d_1(d) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{край}}}{a} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{начало}}}{a} = 0$$

Следовательно, $H_n(S^1) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = C_n / 0 = C_n$, т.е.

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$C_*(S^2): \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_2}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

Вспомогательное $d_n = 0$ для каждого n , но не

$$H_n(S^2) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = C_n / 0 = C_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(6) Считано као $y(0)$. $S^n: e^0, e^n$

$$C_*(S^n): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_n}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$C_*(RP^2): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2} \overset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1} \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\sigma \quad \quad d \quad \quad a$

Осимега је $dn = 0$ за $n \neq 1, 2$

$$d_1(a) = a - a = 0$$

$$d_2(\sigma) = d + d = 2d$$

идемо у круг по правци и ако су
супротице у смеру кретања одирамо,
а иначе еђузимамо

- $H_0(RP^2) = \ker d_0 / \text{im } d_1 = C_0 / 0 = \mathbb{Z}$

- $H_1(RP^2) = \ker d_1 / \text{im } d_2 = C_1 / \text{im } d_2$

$$C_1 = \mathbb{Z} \langle d \rangle$$

$$\text{im } d_2 = ?$$

$$C_2 = \mathbb{Z} \langle \sigma \rangle = \{ \lambda \sigma \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$$

$$d_2(\lambda \sigma) = \lambda d_2(\sigma) = 2\lambda d$$

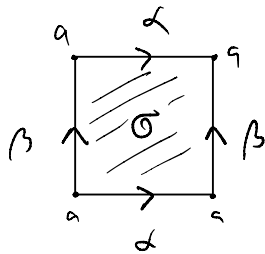
$$\Rightarrow \text{im } d_2 = \{ \lambda \cdot (2d) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \langle 2d \rangle$$

Котлауто, $H_1(RP^2) = C_1 / \text{im } d_2 = \mathbb{Z} \langle d \rangle / \mathbb{Z} \langle 2d \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

- $H_2(RP^2) \cong \ker d_2 / \underbrace{\text{im } d_3}_0 = \ker d_2 = 0$

Котлауто, $H_n(RP^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

(g) T^2 :



$$C_*(T^2): \dots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha, \beta}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{d_1} \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

Prove $d_n = 0$ for $n \neq 1, 2$

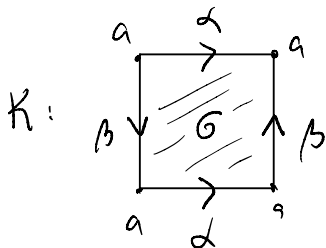
$$d_1(\alpha) = a - a = 0, \quad d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \beta - \alpha - \beta = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

So, $d_n = 0$ for all $n \in \mathbb{N}_0$, we have

$$H_n(T^2) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = C_n / 0 = C_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0, 2 \\ \mathbb{Z}^2, & n=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(g)



$$C_*(K): \dots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha, \beta}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{d_1} \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$$d_n = 0, \quad n \neq 1, 2$$

$$d_1(\alpha) = d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$$

$$\text{for } n \neq 2: \quad \ker d_n = C_n$$

$$\operatorname{im} d_n = 0$$

За $n=2$:

$$\ker d_2 = ?$$

$$0 = d_2(\lambda\alpha) = 2\lambda\beta \Rightarrow \lambda=0 \text{ (jer je } \beta \text{ неперенос)}$$

$$\Rightarrow \ker d_2 = 0$$

$$\operatorname{im} d_2 = ?$$

$$d_2(\lambda\alpha) = 2\lambda\beta$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \{ \lambda \cdot (2\beta) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \langle 2\beta \rangle$$

- $H_0(K) = \ker d_0 / \operatorname{im} d_1 \cong \mathbb{Z}$
- $H_1(K) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = C_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z} \langle \alpha \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \beta \rangle / \mathbb{Z} \langle 2\beta \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
- $H_2(K) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = 0$

$$\text{Короче, } H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Два типа твх пар

Нека је (X, A) CW-пар, тј. X и A су ћелуски комплекс и A је подскуп комплексу X . Овом пару могу се придружити пар латасити комплекса $C_*(X)$, $C_*(A)$ и $C_*(X, A)$ који формирају сирети кит.

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$$

На основу уик-уик леме имамо сирети гит.

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

где i — встраивание i_* и j_* индуцированы вложением

$$i: A \hookrightarrow X \quad \text{и} \quad j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A).$$

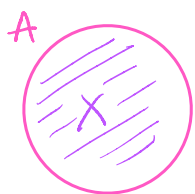
- Если A — все связные компоненты пути связности X , тогда

$$H_0(X, A) = 0.$$

Следствие $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$ для всех $n \geq 1$.

Напоминание Это же следствие не верно для каждого топологического пар (X, A) , а только в ситуации с связными компонентами, как мы видели.

Пример $X = D^2$, $A = \partial D^2 = S^1$



X — путь связности, но A — все связные компоненты пути связности, то есть $H_0(X, A) = 0$.

На основе следствия имеем $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$, $n \geq 1$.

$$X/A = D^2/S^1 \cong S^2,$$

то есть

$$H_n(X, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Подсказка из ОТ: $A \subseteq X$ — ретракт X если существует непрерывная функция $\tau: X \rightarrow A$ т.е. $\tau|_A = \text{id}_A$ (т.е. $\tau \circ i = \text{id}_A$, где $i: A \hookrightarrow X$ — вложение).

2. Нека је A ретракцијом од X . Докажи да је

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

решење

Имамо прелиминарне:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow \Pi_A & \downarrow \tau \\ & & A \end{array}$$

тј. $\tau \circ i = \Pi_A$.

Ако је $f \circ g$ дијекција,
онда је f "на", а g
је "1-1"

Посматрајмо гом. паре (X, A) :

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\tau \circ i = \Pi_A \Rightarrow \tau_* \circ i_* = \Pi_{H_n(A)} \Rightarrow i_* \text{ је "1-1"} \Rightarrow \partial = 0$$

Како је $\partial = 0$, горњи гом. можемо да поделимо на кџн. за $n \in \mathbb{N}_0$:

$$0 \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \rightarrow 0$$

$\uparrow$
 τ_*

Како је $\tau_* \circ i_* = \Pi_{H_n(A)}$, то се овај кџн. пише, тј.

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

3. Нека је $A \subseteq X$ и $i: A \hookrightarrow X$ хомеоморфска еквиваленција.

Тада је $H_n(X, A) = 0$ за $n \in \mathbb{N}$.

решење

Посматрајмо гом. паре (X, A) :

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Како је i хомеоморфска еквиваленција, то постоји $\varphi: X \rightarrow A$ т.г.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ & \xleftarrow{\varphi} & \end{array}$$

$$\varphi \circ i \simeq \Pi_A, \quad i \circ \varphi \simeq \Pi_X$$

$$\Rightarrow \varphi_* \circ i_* = \Pi_{H_n(A)}, \quad i_* \circ \varphi_* = \Pi_{H_n(X)}$$

$\Rightarrow i_*$ је изоморфизам.

Из гл. 1. имамо:

$$\left. \begin{aligned} 0 = \ker i_* = \operatorname{im} \partial \Rightarrow \partial = 0 \Rightarrow j_* \text{ је „} \# \text{a} \text{“} \\ H_n(X) = \operatorname{im} i_* = \ker j_* \Rightarrow j_* = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_n(X, A) = 0$$



Дефиницијом редуктовану хомологију са

$$\tilde{H}_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(X), \quad n \geq 1,$$

док за $n=0$, $\tilde{H}_0(X)$ је Абелова група тип.

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

(тип. $\tilde{H}_0(X)$ добијено кад из $H_0(X)$ склопимо једну $\mathbb{Z}$)

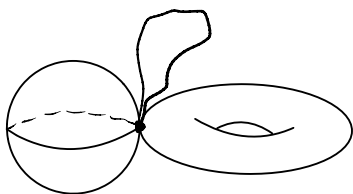
Пр.

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Лема $\tilde{H}_i(X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_k) \cong \tilde{H}_i(X_1) \oplus \tilde{H}_i(X_2) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_i(X_k)$

Пр.

$$X = S^1 \vee S^2 \vee T^2$$



$$\tilde{H}_i(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

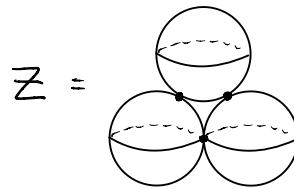
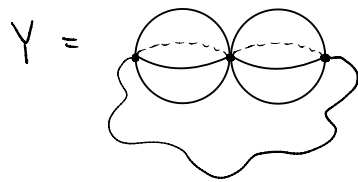
$$\tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_i(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z}, & i=2 \end{cases}$$

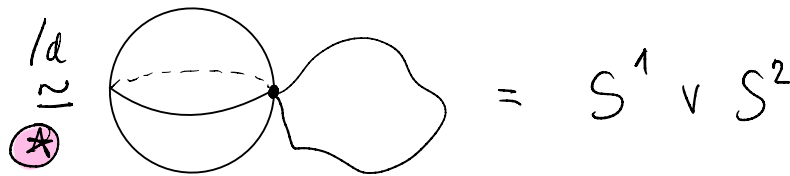
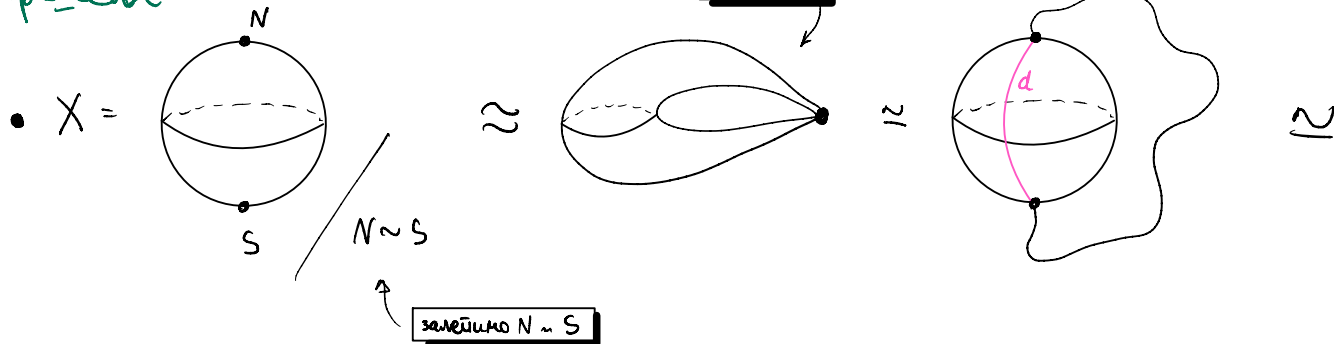
$$\tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Изредити хомологију простора

$$X = S^2 / N \sim S$$



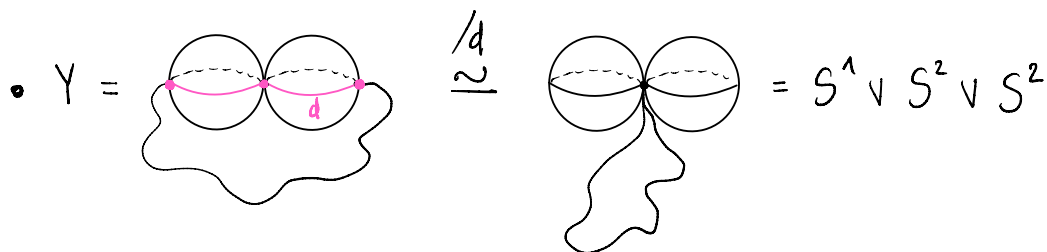
решење



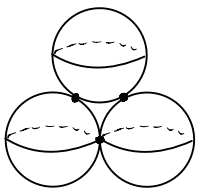
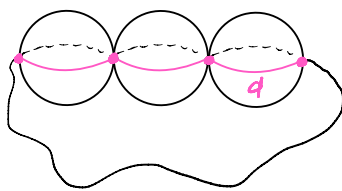
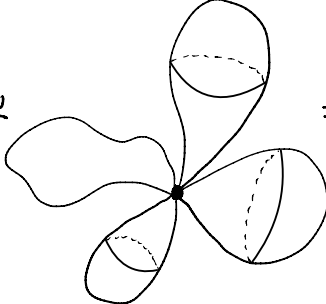
$$\Rightarrow \tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Када изредити хомологију изједно је да ли рачунамо H или $\tilde{H}$ јер се разликују само за једно $\mathbb{Z}$ у дим. 0

погодније из OT: ако је (X, A) CW-пар и $A \approx *$,
онда $X \cong X/A$ (ово користиш у )



$$\Rightarrow \tilde{H}_i(Y) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

• $\mathbb{Z} =$  $\xrightarrow{12}$  $\xrightarrow{12}$  $= S^1 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2$

$$\Rightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z}^3, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \square$$

Коментар Користимо две типичне операције:

Декартов производ $\times$ и директну суму $\oplus$

Нека су $G_n, n \in \mathbb{N}$ Абелеве групе

$$G_1 \times G_2 \times \dots = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n = \left\{ (g_1, g_2, g_3, \dots) \mid g_i \in G_i \right\}$$

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n \mid g_n \in G_n, \text{ сви сем коначно } \right. \\ \left. \text{много } g_n \text{ су } 0 \right\}$$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ је формална сума, тј. може се замишљати и у облику $(g_1, g_2, \dots)$.

Дакле, $\prod_{n \in \mathbb{N}} G_n =$ сви n -торци $(g_1, g_2, \dots)$

$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n =$ они n -торци $(g_1, g_2, \dots)$ тј. су сви сем коначно много $g_n = 0$

та је $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$

Стегујемо, ако имамо коначно много група, $\times$ и $\oplus$ су исто, тј.

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n \cong G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n.$$

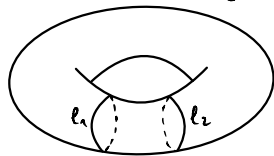
Здесь мы рассматриваем $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ представляющую одну группу:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_3^2 \quad \text{итог.}$$

5. Даны две окружности на торе:

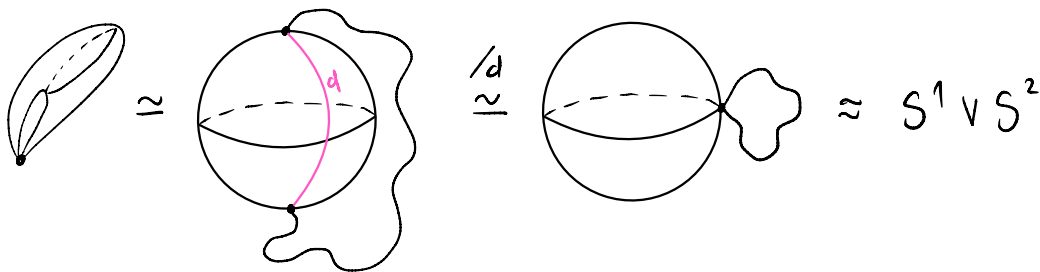


Определим гомологию пространства:

$$(a) X = T^2 / l_1 \vee l_2 \quad (b) Y = (T^2 / l_1) / l_2$$

решение

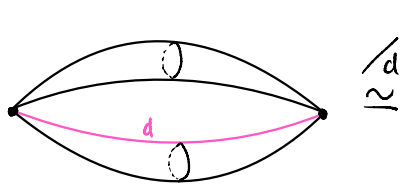
(a) $X \approx$ букет две замкнутые сферы



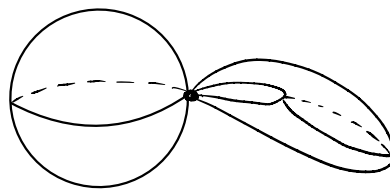
$$\Rightarrow X \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2$$

$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n=1,2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

(5) $Y \approx$



$\cong$



$$\approx S^1 \vee S^2 \vee S^2$$

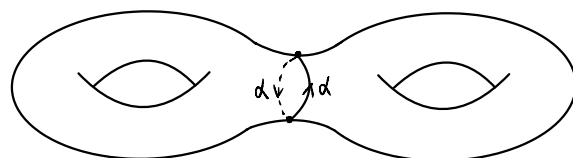
$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n=2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$



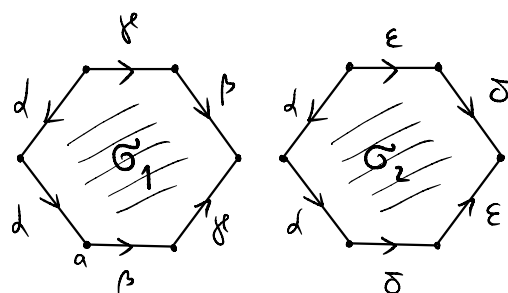
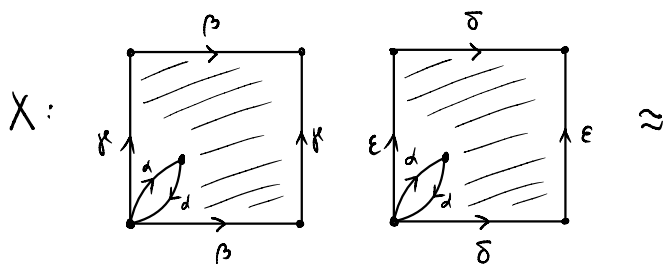
6.

Вычислим гомологию пространства X .

X :



решение



0-клетка: a

1-клетка: $d, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$

2-клетка: σ_1, σ_2

$$C_*: 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle \sigma_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \sigma_2 \rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle d \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \beta \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \gamma \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \delta \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \varepsilon \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \xrightarrow{d_0} 0$$

$$\bullet d_0 = 0$$

$$\bullet d_1(d) = d_1(\beta) = d_1(\gamma) = d_1(\delta) = d_1(\varepsilon) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$\bullet d_2(\sigma_1) = \beta + \gamma - \beta - \gamma + d + d = 2d$$

$$d_2(\sigma_2) = \delta + \varepsilon - \delta - \varepsilon + d + d = 2d$$

$$\text{im } d_2 = ?$$

использовать
элементы $\gamma \in C_2$

$$d_2(k\sigma_1 + l\sigma_2) = 2(k+l)d \Rightarrow \text{im } d_2 = \mathbb{Z}\langle 2d \rangle$$

$$\ker d_2 = ?$$

$$0 = d_2(k\sigma_1 + l\sigma_2) = 2(k+l)\alpha \xrightarrow{\text{интегрируем}} k+l=0 \Rightarrow l=-k \\ \Rightarrow \ker d_2 = \mathbb{Z} \langle \sigma_1 - \sigma_2 \rangle$$

$$n=0: H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

$$n=1: H_1(X) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z} \langle \alpha \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \beta \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \gamma \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \delta \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \varepsilon \rangle / \mathbb{Z} \langle 2\alpha \rangle \\ \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4$$

$$n=2: H_2(X) = \ker d_2 / \underbrace{\operatorname{im} d_3}_0 \cong \mathbb{Z}$$

$$\text{Котането, } H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0, 2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Майер - Вейтсорово HHS

Нека су $X_1, X_2 \subseteq X$ топ. $\operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2 = X$. Тога можемо гледи.

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{((i_1)_*, (i_2)_*)} \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

$$\text{где су } \begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & \nearrow i_1 & & \searrow j_1 & \\ X_1 \cap X_2 & & & & X \\ & \searrow i_2 & & \nearrow j_2 & \\ & & X_2 & & \end{array} \text{ инклузије.}$$

Пример

Конте простора X је: $CX \stackrel{\text{def}}{=} X \times [0, 1] /_{X \times \{1\}}$

Суштенније простора X је: $SX \stackrel{\text{def}}{=} X \times [0, 1] / \begin{matrix} (x, 0) \sim (y, 0) \\ (x, 1) \sim (y, 1) \\ x, y \in X \end{matrix}$

Нпр. ако је $X = S^1 = \bigcirc$

$$S^1 \times [0, 1] = \text{цилиндр}$$

$$CS^1 = \text{конус} \approx \text{диск} = D^2$$

Скупом горњи крај цилиндра у тачку

$$SS^1 = \text{сфера} = S^2$$

Скупом горњег и доњег краја цилиндра у тачке

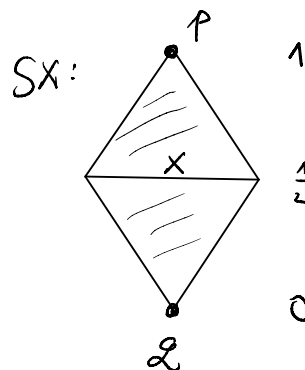
Може се показати да је $CX \cong *$ (за сваки простор X), па је

$$H_n(CX) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сада ћемо помоћу М-В теореме да израчунамо хомологије од SX преко хомологије од X .

$$X_1 := SX \setminus \{p\} \cong CX \cong *$$

$$X_2 := SX \setminus \{q\} \cong CX \cong *$$



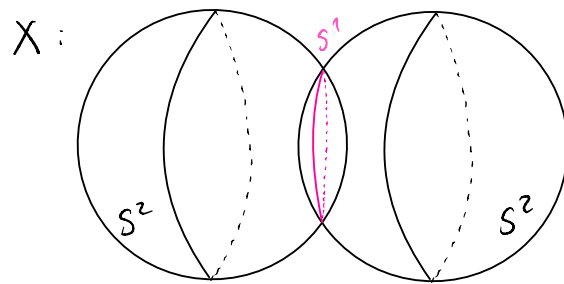
М-В-теорема:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(CX) \oplus \tilde{H}_{n+1}(CX) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(SX) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(CX) \oplus \tilde{H}_n(CX) \rightarrow \cdots$$

$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \text{добивамо изоморфизам } \tilde{H}_{n+1}(SX) \cong \tilde{H}_n(X).$$

7. Нека је X састављен од две сфере S^2 које се секу унутар кружнице S^1 као на слици:



Користећи М-В теорему одредити композицију од X .

решење

X_1 = лева сфера S^2

X_2 = десна сфера S^2

$X_1 \cap X_2 = S^1$

М-В теор:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(S^1) \rightarrow \tilde{H}_n(S^2) \oplus \tilde{H}_n(S^2) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^1) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^2) \oplus \tilde{H}_{n-1}(S^2) \rightarrow \cdots$$

$n \geq 3$:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

тако је $H_n(X) = 0$

$n=2$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

ово је КВН. и пошто је $\mathbb{Z}$ слободна, он се узима, пај.

$$H_2(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3$$

$n=1$:

$$0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0 \Rightarrow H_1(X) = 0$$

$n=0$:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{H}_0(X) = 0, \text{ пај. } H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$