

Ланчови комплекси

$C_n, n \in \mathbb{Z}$ - Абелеве групе

$d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ - хомоморфизми такви

где је $d_{n-1} \circ d_n = 0$

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ & \searrow 0 & \downarrow d_{n-1} \\ & & C_{n-2} \end{array}$$

ланчови комплекс (C_*, d_*) је :

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \dots \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \dots$$

(Некад ћемо уместо d_n писати само d имајући у виду да су пресликавања $d: C_n \rightarrow C_{n-1}$ и $d: C_m \rightarrow C_{m-1}$ у једном случају различита)

Хомологију ланчовог комплекса C_* дефинишемо на следећи начин:

$$\text{имено } \text{im } d_{n+1} \subseteq \ker d_n \subseteq C_n$$

↑
ово важи због
улова $d_n \circ d_{n+1} = 0$

$$H_n(C_*) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d_n / \text{im } d_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

n -та хомолошка група ланчовог комплекса (C_*, d_*)

↑
количина због
погутања у C_n

Нека су (C'_*, d'_*) и (C''_*, d''_*) два ланчова комплекса.

Ланчово пресликавање $\varphi: C'_* \rightarrow C''_*$ је нека пресликавање

$$\varphi_n: C'_n \rightarrow C''_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

тј. је $\varphi_{n-1} \circ d'_n = d''_n \circ \varphi_n$, тј. комутира следећи дијаграм:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} C'_{n-2} \rightarrow \dots \\
 & & \varphi_{n+1} \downarrow & \curvearrowright & \varphi_n \downarrow & \curvearrowright & \varphi_{n-1} \downarrow \curvearrowright \varphi_{n-2} \downarrow \\
 \dots & \rightarrow & C''_{n+1} & \xrightarrow{d''_{n+1}} & C''_n & \xrightarrow{d''_n} & C''_{n-1} \xrightarrow{d''_{n-1}} C''_{n-2} \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Коментар Постоји категорија $\mathcal{C}$ ланчаних комплекса (морфизми су ланчана пресликавања) па се H_n може видети и као функција из $\mathcal{C}$ у категорију Абелових група и хомоморфизма, тј.

$$H_n : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Нека су (C_*, d_*^C) и (D_*, d_*^D) л.к. и $\varphi : C_* \rightarrow D_*$ ланчано пресликавање. Ако је $E_n := C_{n-1} \oplus D_n$ и $d_n^E : E_n \rightarrow E_{n-1}$ дамо са
- $$d_n^E(a, b) := \left(-d_{n-1}^C(a), \varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b) \right),$$
- за $a \in C_{n-1}, b \in D_n, n \in \mathbb{Z}$, покажи да је (E_*, d_*^E) л.к.

решење

Знамо:

- ① $d_{n-1}^C \circ d_n^C = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$

- ② $d_{n-1}^D \circ d_n^D = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$

- ③ $\varphi_{n-1} \circ d_n^C = d_n^D \circ \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Желимо да покажемо да је и $d_{n-1}^E \circ d_n^E = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Нека је $(a, b) \in E_n = C_{n-1} \oplus D_n$ (тј. $a \in C_{n-1}, b \in D_n$)

$$\begin{aligned}
 (d_{n-1}^E \circ d_n^E)(a, b) &= d_{n-1}^E \left(-d_{n-1}^C(a), \varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b) \right) \\
 &= \left(-d_{n-2}^C(-d_{n-1}^C(a)), \varphi_{n-2}(-d_{n-1}^C(a)) + d_{n-1}^D(\varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b)) \right) \\
 &= \left(\underbrace{(d_{n-2}^C \circ d_{n-1}^C)(a)}_{\text{① } 0}, \underbrace{-d_{n-2}^D(\varphi_{n-1}(a)) + d_{n-1}^D(\varphi_{n-1}(a))}_{\text{③ } 0} + \underbrace{(d_{n-1}^D \circ d_n^D)(b)}_{\text{② } 0} \right) \\
 &= (0, 0) \quad \square
 \end{aligned}$$

деф. Кажемо да је H_n Абелових група и хомоморфизам

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow \cdots$$

тачан на месту n уколико је $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$. H_n који је
тачан на сваком месту (тј. $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{Z}$)

називамо **дугим тачним H_n -ом** (крате: дтн.).

Кратки тачни H_n (крате: ктн.) је тачан H_n облика

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

Пример Хомологија дтн. је тривијална. Значи нека је дтн. дтн.

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

тј. $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

То дефиниција је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n / \ker d_n = 0$.

Кажемо да се ктн.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad (\star)$$

цела ако је $B \cong A \oplus C$.

Следећи критеријуми су еквивалентни:

(1) ктн. $(\star)$ се цела;

(2) постоји $h: B \rightarrow A$ тј. $h \circ f = \operatorname{id}_A$;

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

$\nwarrow$
 h

(3) постоји $k: C \rightarrow B$ тј. $g \circ k = \operatorname{id}_C$;

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

$\nearrow$
 k

(4) C је слободна Абелова група.

2. Определите гомологические группы ланцового комплекса:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \rightarrow \dots$$

решение У нас $C_n = \mathbb{Z}_4$ и d_n — это умножение на 2 за каждое $n \in \mathbb{N}$.

(Это замкнутый цикл л.к. пер $d_n \circ d_{n+1} = \cdot 4$, а $4 \equiv 0 \pmod{4}$.)

Значит, $d_n(x) = 2x$ и $d_{n+1}(x) = 2x$

$\ker d_n = ?$

$$x \in \ker d_n \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ в } \mathbb{Z}_4 \Leftrightarrow 2x \equiv_4 0$$

Значит, $x \in \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, но так как будем решать уравнение $2x \equiv_4 0$ только 0 и 2, т.е. $\ker d_n = \{0, 2\}$

$\operatorname{im} d_{n+1} = ?$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} d_{n+1} &= \{d_{n+1}(x) \mid x \in \mathbb{Z}_4\} = \{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3\} \\ &= \{0, 2, 0, 2\} = \{0, 2\} \end{aligned}$$

Конечно, $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \{0, 2\} / \{0, 2\} = 0$.

(Другим путем, C_* — это гл. $\square$)

3. Определите гомологические группы ланцового комплекса:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

решение У нас $C_n = \mathbb{Z}$ для все n и

$d_n(x) = 2x$, n — четно

$d_n(x) = 0$, n — нечетно

Могли бы и вернуть парно-нечетно, но ведь то же, сами означавали что C_n, d_n

1° n парно

$\ker d_n = ?$

ова једнакост је у $\mathbb{Z}$
па смо да поделимо
са 2 (нпр. у $\mathbb{Z}_4$ не
било смисла)

$$x \in \ker d_n \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

тј. $\ker d_n = 0$ ($0 =$ тривијална група, тј. садржи само нулу)

$\operatorname{im} d_{n+1} = ?$ $n+1$ је непарно!

$$\operatorname{im} d_{n+1} = \{ d_{n+1}(x) \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 0 \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 0 \} = 0$$

$$H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = 0/0 = 0$$

2° n непарно

$\ker d_n = ?$

$$x \in \ker d_n \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall$$

тј. $\ker d_n = \mathbb{Z}$

$\operatorname{im} d_{n+1} = ?$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} d_{n+1} &= \{ d_{n+1}(x) \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 2x \mid x \in \mathbb{Z} \} = \\ &= \{ -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots \} = 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

Коначно, $H_n(C_*) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ \mathbb{Z}_2, & n \text{ непарно} \end{cases}$ ■

4. Визуелизујте ланцавост ланца комплексних

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

решение Када л.к. почиње са $0 \rightarrow \dots$ подразумева се да су наредна две нуле и смисла јесте да $\dots \rightarrow 0$ су две нуле, тј.

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Нумерујемо прве у низу премакима, резултат:

$$\dots \rightarrow \overset{5}{0} \rightarrow \overset{4}{0} \rightarrow \overset{3}{0} \rightarrow \overset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2} \overset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{0}{\mathbb{Z}} \rightarrow \overset{-1}{0} \rightarrow \overset{-2}{0} \rightarrow \overset{-3}{0} \rightarrow \dots$$

тј. $C_0 = C_1 = C_2 = \mathbb{Z}$, $C_n = 0$ за $n \neq 0, 1, 2$

$d_2 = \cdot 2$, $d_n = 0$ за $n \neq 2$

Како је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ и $\ker d_n \subseteq C_n$, јасно је да је $H_n(C_*) = 0$ за $n \neq 0, 1, 2$, па само још да одредимо H_0 , H_1 и H_2 .

$n=0$: $\ker d_0 = \mathbb{Z}$, $\operatorname{im} d_1 = 0 \Rightarrow H_0(C_*) \cong \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$

$n=1$: $\ker d_1 = \mathbb{Z}$, $\operatorname{im} d_2 = 2\mathbb{Z}$ (као у зг 3.)

$\Rightarrow H_1(C_*) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$

$n=2$: $\ker d_2 = 0$ (као у зг 3.), $\operatorname{im} d_3 = 0$

$\Rightarrow H_2(C_*) = 0$

Коначно, $H_n(C_*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ 

Лема [цук-цук] Нека је дат планаран низ ланцавих комплекса

$$0 \rightarrow C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_* \rightarrow 0$$

Тада постоји гит.

$$\dots \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*) \rightarrow H_n(E_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*) \rightarrow H_{n-1}(D_*) \rightarrow \dots$$