

Категорије и функције

Категорија $\mathcal{C}$ се састоји од:

1. класе објеката (ознака: $\text{obj}(\mathcal{C})$)
2. за сваки уређен пар (X, Y) објеката, имамо скуп морфизама (ознака: $\text{mor}(X, Y)$ или $\text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$) са доменом X и кодоменом Y (пишемо и $f: X \rightarrow Y$)
3. за сваку уређену тројку (X, Y, Z) објеката и морфизме $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ постоји морфизам композиције $g \circ f: X \rightarrow Z$.

Притом, важе следећа својства:

- **асоцијативност**: ако су $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ и $h: Z \rightarrow W$ морфизми, онда је $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- **идентитет**: за сваки објекат Y постоји морфизам $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ т.г. за сваки морфизам $f: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$ важе $\text{id}_Y \circ f = f$ и $h \circ \text{id}_Y = h$.

Примери 1. Set - категорија скупова

објекти = скупови

морфизми = преликавања између скупова

2. Top - категорија тополошких простора

објекти = тополошки простори

морфизми = непрекидана преликавања

3. Top - категорија тополошких простора са базном (митакнутом) тополошком

објекти = тополошки простори са митакнутом тополошком

морфизми = непрекидана пресликавања која чувају базну топологију

4. Gr - категорија група

објекти = групе

морфизми = хомоморфизми група

5. Нека је X скуп и $\leq$ парцијално уређење на њему.

Може се дефинисати морфизми "необична" категорија:

објекти = елементи скупа X

морфизми $\text{mor}(a, a') = \begin{cases} \{(a, a')\}, & a \leq a' \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$

Дакле, ако је $a \leq a'$, онда постоји само 1 морфизам и то је уређен пар (a, a') , а ако $a \not\leq a'$, онда нема морфизма са доменом a и кодоменом a' .

Ова категорија је "необична" јер морфизми нису пресликавања као у претходним примерима.

Функтор је пресликавање међу категоријама. Прегледније, ако су $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ две категорије, **коваријантни функтор** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ се састоји од две функције:

- функције међу објектима

$$X \in \text{obj}(\mathcal{C}) \longmapsto F(X) \in \text{obj}(\mathcal{D})$$

- функције међу морфизмима

$$(f: X \rightarrow Y) \longmapsto (F(f): F(X) \rightarrow F(Y))$$

$\uparrow$ морфизам у $\mathcal{C}$

$\uparrow$ морфизам у $\mathcal{D}$

Примио, важе следећа својства:

1. $F(1_X) = 1_{F(X)}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Слично се дефинише и **контраваријантни функтор** $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Опет имамо две функције:

- $X \in \text{obj}(\mathcal{C}) \longmapsto G(X) \in \text{obj}(\mathcal{D})$

- $(f: X \rightarrow Y) \longmapsto (G(f): G(Y) \rightarrow G(X))$

$\uparrow$ овде је разлика
(окренуто је редослед X и Y)

и важе својства:

1. $G(1_X) = 1_{G(X)}$
2. $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$

1. Доказати да је фундаментална група коваријантни функциор из Top_0 у Gr .

решење $\pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Gr}$

Знамо да имамо функције међу објектима и морфизмима:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \longmapsto & \pi_1(X, x_0) \\ \uparrow \text{обј. } \text{Top}_0 & & \uparrow \text{обј. } \text{Gr} \\ (f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)) & \longmapsto & (f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)) \end{array}$$

Користимо ознаку $f_* := \pi_1(f)$

$\uparrow$ морфизам у Top_0 ,
 тј. непрекидно пресликавање

 $\uparrow$ морфизам у Gr ,
 тј. хомоморфизам групе

Само још да проверимо особине 1. и 2.

1. $\pi_1(1_X) = (1_X)_* = 1_{\pi_1(X)} \quad \checkmark$

2. $\pi_1(g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \pi_1(g) \circ \pi_1(f) \quad \checkmark \quad \square$

2. Дати је скупи са релацијом поретка $(A, \leq_A)$. Нека је A категорија одређена овом релацијом (из примера 5 на стр. 2).

(а) Ако је $(B, \leq_B)$ скупи са релацијом поретка и B категорија одређена овом релацијом, описати произвољни функциор $F: A \rightarrow B$.

(б) Ако је C било која категорија, описати произвољни функциор $G: A \rightarrow C$.

решење $\text{obj}(A) = A$ - објекти категорије A

$$\text{mor}_A(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & x \leq_A y \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}, \quad x, y \in A$$

(a) Категорија B изгледа слично:

$$\text{obj}(B) = B$$

$$\text{mor}_B(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & x \leq_B y \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}, \quad x, y \in B$$

$F: A \rightarrow B$ функтор, значи да имамо две функције (међу објектима и међу морфизмима):

$$F: \text{obj}(A) \rightarrow \text{obj}(B), \text{ тј. } F: A \rightarrow B$$

и за свако $x, y \in \text{obj}(A) = A$

$$F: \text{mor}_A(x, y) \rightarrow \text{mor}_B(F(x), F(y))$$

Како је $\text{mor}_A(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & x \leq_A y \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$, једно има смисла

примати о функтору F када је $\text{mor}_A(x, y) \neq \emptyset$, тј. за $x \leq_A y$.

За да F буде добро дефинирано, мора да важи

$\text{mor}_B(F(x), F(y)) \neq \emptyset$, тј. $F(x) \leq_B F(y)$. Значе, $F: A \rightarrow B$ и

притом

$$x \leq_A y \Rightarrow F(x) \leq_B F(y),$$

та је F пресликавање скупова које чува поредак.

(b) Слично као под (a), имамо две функције

$$G: \text{obj}(A) \rightarrow \text{obj}(C)$$

$$G: \text{mor}_A(x, y) \rightarrow \text{mor}_C(G(x), G(y)), \quad x, y \in A$$

G представља уређење на $\text{obj}(C)$:

за $c, d \in \text{obj}(C)$ дефинишемо

$$c \leq_C d \Leftrightarrow (\exists x, y \in A) \quad c = G(x) \wedge d = G(y) \wedge x \leq_A y. \quad \square$$

3. Нека је $(G, \cdot)$ група и $\mathcal{C}_G$ категорија са једним објектом $\text{obj}(\mathcal{C}_G) = \{G\}$ и скутом морфизама који чине множенња елементима из G („множење“ = операција у G). Ако је H група, постоји функциор $F: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$.

решење Замислимо дакле $\text{obj}(\mathcal{C}_G) = \{G\}$ и имамо само један скуп морфизама $\text{mor}_{\mathcal{C}_G}(G, G) = \{g_*: G \rightarrow G \mid g \in G\}$, где је g_* дефинисано са:

$$g_*(x) := g \cdot x, \quad x \in G.$$

Позначимо да је $1_{G*} = \text{id}_G: G \rightarrow G$ (1_G -неутрал у G)

$$g_{1*} \circ g_{2*} = (g_1 \cdot g_2)_*$$

Ако је $F: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$ функциор, имамо две функције

$$F: \text{obj}(\mathcal{C}_G) \rightarrow \text{obj}(\mathcal{C}_H), \text{ тј. } F: G \rightarrow H$$

и $F: \text{mor}_{\mathcal{C}_G}(G, G) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}_H}(H, H)$ и важе особине 1. и 2.

из дефиниције функциора:

ознаке: id = идентичко пресликавање
 1 = неутрал у групи

$$F(\text{id}_G) = \text{id}_H, \text{ тј. } F(1_{G*}) = 1_{H*} \quad (*)$$

$$F((g_1 \cdot g_2)_*) = F(g_{1*} \circ g_{2*}) \stackrel{2.}{=} F(g_{1*}) \circ F(g_{2*}) \quad (**)$$

Морфизам g_* повезујемо са елементом $g \in G$ и кажемо $F(g_*)$ одговара $F(g) \in H$, тј. је $F: G \rightarrow H$ тј. важе $(*)$ и $(**)$, тј. F је хомоморфизам група. $\square$