

УВОД У АЛГЕБАРСКУ ТОПОЛОГИЈУ

- семестар 2024/2025 -

Категорије и функције

Категорија $\mathcal{C}$ се састоји од:

1. класе објеката (ознака: $\text{obj}(\mathcal{C})$)
2. за сваки уређен пар (X, Y) објеката, имамо скуп морфизама (ознака: $\text{mor}(X, Y)$ или $\text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$) са доменом X и кодоменом Y (пишемо и $f: X \rightarrow Y$)
3. за сваку уређену тројку (X, Y, Z) објеката и морфизме $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ постоји морфизам композиције $g \circ f: X \rightarrow Z$.

Притом, важе следећа својства:

- **асоцијативност**: ако су $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ и $h: Z \rightarrow W$ морфизми, онда је $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- **идентитет**: за сваки објекат Y постоји морфизам $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ т.г. за сваки морфизам $f: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$ важе $\text{id}_Y \circ f = f$ и $h \circ \text{id}_Y = h$.

Примери 1. Set - категорија скупова

објекти = скупови

морфизми = преликавања између скупова

2. Top - категорија тополошких простора

објекти = тополошки простори

морфизми = непрекидана преликавања

3. Top - категорија тополошких простора са базном (митакнутом) топологом

објекти = тополошки простори са митакнутом топологом

морфизми = непрекидана пресликавања која чувају базну топологију

4. Gr - категорија група

објекти = групе

морфизми = хомоморфизми група

5. Нека је X скуп и $\leq$ парцијално уређење на њему.

Може се дефинисати морфизми "необична" категорија:

објекти = елементи скупа X

морфизми $\text{mor}(x, x') = \begin{cases} \{(x, x')\}, & x \leq x' \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$

Дакле, ако је $x \leq x'$, онда постоји само 1 морфизам и то је уређен пар (x, x') , а ако $x \not\leq x'$, онда нема морфизма са доменом x и кодоменом x' .

Ова категорија је "необична" јер морфизми нису пресликавања као у претходним примерима.

функтор је пресликавање међу категоријама. Прегледније, ако су $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ две категорије, **коваријантни функтор** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ се састоји од две функције:

- функције међу објектима

$$X \in \text{obj}(\mathcal{C}) \longmapsto F(X) \in \text{obj}(\mathcal{D})$$

- функције међу морфизмима

$$(f: X \rightarrow Y) \longmapsto (F(f): F(X) \rightarrow F(Y))$$

$\uparrow$ морфизам у $\mathcal{C}$

$\uparrow$ морфизам у $\mathcal{D}$

Примио, важе следећа својства:

1. $F(1_X) = 1_{F(X)}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Слично се дефинише и **контраваријантни функтор** $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Опет имамо две функције:

- $X \in \text{obj}(\mathcal{C}) \longmapsto G(X) \in \text{obj}(\mathcal{D})$

- $(f: X \rightarrow Y) \longmapsto (G(f): G(Y) \rightarrow G(X))$

$\uparrow$ овде је разлика
(окренуто је редослед X и Y)

и важе својства:

1. $G(1_X) = 1_{G(X)}$
2. $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$

1. Доказати да је фундаментална група коваријантни функциор из Top_0 у Gr .

решење $\pi_1 : \text{Top}_0 \rightarrow \text{Gr}$

Знамо да имамо функције међу објектима и морфизмима:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \longmapsto & \pi_1(X, x_0) \\ \uparrow \text{обј. } \text{Top}_0 & & \uparrow \text{обј. } \text{Gr} \\ (f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)) & \longmapsto & (f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)) \end{array}$$

Користимо ознаку $f_* := \pi_1(f)$

$\uparrow$ морфизам у Top_0 ,
 тј. непрекидно пресликавање

 $\uparrow$ морфизам у Gr ,
 тј. хомоморфизам група

Само још да проверимо особине 1. и 2.

1. $\pi_1(1_X) = (1_X)_* = 1_{\pi_1(X)} \quad \checkmark$

2. $\pi_1(g \circ f) = (g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \pi_1(g) \circ \pi_1(f) \quad \checkmark \quad \square$

2. Дати је скупи са релацијом поретка $(A, \leq_A)$. Нека је A категорија одређена овом релацијом (из примера 5 на стр. 2).

(а) Ако је $(B, \leq_B)$ скупи са релацијом поретка и B категорија одређена овом релацијом, описати произвољни функциор $F: A \rightarrow B$.

(б) Ако је C било која категорија, описати произвољни функциор $G: A \rightarrow C$.

решење $\text{obj}(A) = A$ - објекти категорије A

$$\text{mor}_A(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & x \leq_A y \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}, \quad x, y \in A$$

(a) Категорија $\mathcal{B}$ изгледа слично:

$$\text{obj}(\mathcal{B}) = B$$

$$\text{mor}_{\mathcal{B}}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & x \leq_B y \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}, \quad x, y \in B$$

$F: A \rightarrow B$ функтор, значи да имамо две функције (међу објектима и међу морфизмима):

$$F: \text{obj}(A) \rightarrow \text{obj}(B), \text{ тј. } F: A \rightarrow B$$

и за свако $x, y \in \text{obj}(A) = A$

$$F: \text{mor}_A(x, y) \rightarrow \text{mor}_B(F(x), F(y))$$

Како је $\text{mor}_A(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\}, & x \leq_A y \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$, једно има смисла

примати о функтору F када је $\text{mor}_A(x, y) \neq \emptyset$, тј. за $x \leq_A y$.

За да F буде добро дефинирано, мора да важи

$\text{mor}_B(F(x), F(y)) \neq \emptyset$, тј. $F(x) \leq_B F(y)$. Значе, $F: A \rightarrow B$ и

притом

$$x \leq_A y \Rightarrow F(x) \leq_B F(y),$$

та је F пресликавање скупова које чува поредак.

(b) Слично као под (a), имамо две функције

$$G: \text{obj}(A) \rightarrow \text{obj}(C)$$

$$G: \text{mor}_A(x, y) \rightarrow \text{mor}_C(G(x), G(y)), \quad x, y \in A$$

G представља уређење на $\text{obj}(C)$:

за $c, d \in \text{obj}(C)$ дефинишемо

$$c \leq_C d \Leftrightarrow (\exists x, y \in A) \ c = G(x) \wedge d = G(y) \wedge x \leq_A y. \quad \square$$

3. Нека је $(G, \cdot)$ група и $\mathcal{C}_G$ категорија са једним објектом $\text{obj}(\mathcal{C}_G) = \{G\}$ и скупом морфизама који чине множења елементима из G („множење“ = операција у G). Ако је H група, пошљамо функцијор $F: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$.

решење Замислимо дакле $\text{obj}(\mathcal{C}_G) = \{G\}$ и имамо само један скуп морфизама $\text{mor}_{\mathcal{C}_G}(G, G) = \{g_*: G \rightarrow G \mid g \in G\}$, где је g_* дајмо са:

$$g_*(x) := g \cdot x, \quad x \in G.$$

Приметимо да је $1_{G*} = \text{id}_G: G \rightarrow G$ (1_G -неутрал у G)

$$g_{1*} \circ g_{2*} = (g_1 \cdot g_2)_*$$

Ако је $F: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$ функцијор, имамо две функције

$$F: \text{obj}(\mathcal{C}_G) \rightarrow \text{obj}(\mathcal{C}_H), \text{ тј. } F: G \rightarrow H$$

и $F: \text{mor}_{\mathcal{C}_G}(G, G) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{C}_H}(H, H)$ и важе особине 1. и 2.

из дефиниције функцијора:

ознаке: id = идентичко пресликавање
 1 = неутрал у групи

$$F(\text{id}_G) = \text{id}_H, \text{ тј. } F(1_{G*}) = 1_{H*} \quad (*)$$

$$F((g_1 \cdot g_2)_*) = F(g_{1*} \circ g_{2*}) \stackrel{2.}{=} F(g_{1*}) \circ F(g_{2*}) \quad (**)$$

Морфизам g_* пошљивамо са елементом $g \in G$ и кажемо $F(g_*)$ одговара $F(g) \in H$, тј. је $F: G \rightarrow H$ тј. важе $(*)$ и $(**)$, тј. F је хомоморфизам група. $\square$

Ланчови комплекси

$C_n, n \in \mathbb{Z}$ - Абелове групе

$d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ - хомоморфизми такви

где је $d_{n-1} \circ d_n = 0$

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ & \searrow 0 & \downarrow d_{n-1} \\ & & C_{n-2} \end{array}$$

ланчови комплекс (C_*, d_*) је :

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \dots \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \dots$$

(Некад ћемо уместо d_n писати само d имајући у виду да су пресликавања $d: C_n \rightarrow C_{n-1}$ и $d: C_m \rightarrow C_{m-1}$ у једном случају различита)

Хомологију ланчовог комплекса C_* дефинишемо на следећи начин:

$$\text{имено } \text{im } d_{n+1} \subseteq \ker d_n \subseteq C_n$$

↑
ово важи због
улова $d_n \circ d_{n+1} = 0$

$$H_n(C_*) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d_n / \text{im } d_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

n -та хомолошка група ланчовог комплекса (C_*, d_*)

↑
количина због
погубљења у C_n

Нека су (C'_*, d'_*) и (C''_*, d''_*) два ланчова комплекса.

Ланчово пресликавање $\varphi: C'_* \rightarrow C''_*$ је нека пресликавање

$$\varphi_n: C'_n \rightarrow C''_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

тј. је $\varphi_{n-1} \circ d'_n = d''_n \circ \varphi_n$, тј. комутира следећи дијаграм:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} C'_{n-2} \rightarrow \dots \\
 & & \varphi_{n+1} \downarrow & \curvearrowright & \varphi_n \downarrow & \curvearrowright & \varphi_{n-1} \downarrow \curvearrowright \varphi_{n-2} \downarrow \\
 \dots & \rightarrow & C''_{n+1} & \xrightarrow{d''_{n+1}} & C''_n & \xrightarrow{d''_n} & C''_{n-1} \xrightarrow{d''_{n-1}} C''_{n-2} \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Коментар Постоји категорија $\mathcal{C}$ ланчаних комплекса (морфизми су ланчана пресликавања) па се H_n може видети и као функција из $\mathcal{C}$ у категорију Абелових група и хомоморфизма, тј.

$$H_n : \mathcal{C} \rightarrow Ab, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Нека су (C_*, d_*^C) и (D_*, d_*^D) л.к. и $\varphi : C_* \rightarrow D_*$ ланчано пресликавање. Ако је $E_n := C_{n-1} \oplus D_n$ и $d_n^E : E_n \rightarrow E_{n-1}$ дамо са
- $$d_n^E(a, b) := \left(-d_{n-1}^C(a), \varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b) \right),$$
- за $a \in C_{n-1}, b \in D_n, n \in \mathbb{Z}$, покажи да је (E_*, d_*^E) л.к.

решење

Знамо:

- ① $d_{n-1}^C \circ d_n^C = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$

- ② $d_{n-1}^D \circ d_n^D = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$

- ③ $\varphi_{n-1} \circ d_n^C = d_n^D \circ \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Желимо да покажемо да је и $d_{n-1}^E \circ d_n^E = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Нека је $(a, b) \in E_n = C_{n-1} \oplus D_n$ (тј. $a \in C_{n-1}, b \in D_n$)

$$\begin{aligned}
 (d_{n-1}^E \circ d_n^E)(a, b) &= d_{n-1}^E \left(-d_{n-1}^C(a), \varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b) \right) \\
 &= \left(-d_{n-2}^C(-d_{n-1}^C(a)), \varphi_{n-2}(-d_{n-1}^C(a)) + d_{n-1}^D(\varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b)) \right) \\
 &= \left(\underbrace{(d_{n-2}^C \circ d_{n-1}^C)(a)}_{\text{① } 0}, \underbrace{-d_{n-2}^D(\varphi_{n-1}(a)) + d_{n-1}^D(\varphi_{n-1}(a))}_{\text{③ } 0} + \underbrace{(d_{n-1}^D \circ d_n^D)(b)}_{\text{② } 0} \right) \\
 &= (0, 0) \quad \square
 \end{aligned}$$

деф. Кажемо да је H_n Аделових група и хомоморфизам

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow \cdots$$

тачан на месту n уколико је $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$. H_n који је
тачан на сваком месту (тј. $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{Z}$)

називамо **дугим тачним H_n -ом** (крате: дтн.).

Кратки тачни H_n (крате: ктн.) је тачан H_n облика

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

Пример Хомологија дтн. је тривијална. Значи нека је дтн. дтн.

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

тј. $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

То дефиниција је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n / \ker d_n = 0$.

Кажемо да се ктн.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \quad (\star)$$

црта ако је $B \cong A \oplus C$.

Следа Следи тривијално из еквивалентности:

(1) ктн. $(\star)$ се црта;

(2) постоји $h: B \rightarrow A$ тј. $h \circ f = \operatorname{Id}_A$;

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

$\nwarrow$
h

(3) постоји $k: C \rightarrow B$ тј. $g \circ k = \operatorname{Id}_C$;

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

$\nearrow$
k

(4) C је слободна Аделова група.

2. Определите гомологические группы латтисного комплекса:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \rightarrow \dots$$

решение У нас $C_n = \mathbb{Z}_4$ и d_n — это умножение на 2 за каждое $n \in \mathbb{N}$.

(Это замкнутый цикл л.к. пер $d_n \circ d_{n+1} = \cdot 4$, а $4 \equiv 0 \pmod{4}$.)

Значит, $d_n(x) = 2x$ и $d_{n+1}(x) = 2x$

$\ker d_n = ?$

$$x \in \ker d_n \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ в } \mathbb{Z}_4 \Leftrightarrow 2x \equiv_4 0$$

Значит, если $x \in \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, то легко увидеть, что в решении уравнения $2x \equiv_4 0$ только 0 и 2, т.е. $\ker d_n = \{0, 2\}$

$\operatorname{im} d_{n+1} = ?$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} d_{n+1} &= \{d_{n+1}(x) \mid x \in \mathbb{Z}_4\} = \{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3\} \\ &= \{0, 2, 0, 2\} = \{0, 2\} \end{aligned}$$

Конечно, $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \{0, 2\} / \{0, 2\} = 0$.

(Другим образом, C_* — это гл.к.) 

3. Определите гомологические группы латтисного комплекса:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

решение У нас $C_n = \mathbb{Z}$ для всех n и

$d_n(x) = 2x$, n — чётно

$d_n(x) = 0$, n — нечётно

Могли бы и вернуть чётно-нечётно, всё равно же, сами означавали, что C_n, d_n

1° n парно

$\ker d_n = ?$

ова једнакост је у $\mathbb{Z}$
па смо да поделимо
са 2 (нпр. у $\mathbb{Z}_4$ не
било смисла)

$$x \in \ker d_n \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

тј. $\ker d_n = 0$ ($0 =$ тривијална група, тј. садржи само нулу)

$\operatorname{im} d_{n+1} = ?$ $n+1$ је непарно!

$$\operatorname{im} d_{n+1} = \{ d_{n+1}(x) \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 0 \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 0 \} = 0$$

$$H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = 0/0 = 0$$

2° n непарно

$\ker d_n = ?$

$$x \in \ker d_n \Leftrightarrow d_n(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \forall$$

тј. $\ker d_n = \mathbb{Z}$

$\operatorname{im} d_{n+1} = ?$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} d_{n+1} &= \{ d_{n+1}(x) \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 2x \mid x \in \mathbb{Z} \} = \\ &= \{ -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots \} = 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

Коначно, $H_n(C_*) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ \mathbb{Z}_2, & n \text{ непарно} \end{cases}$ ■

4. Визуелизујте хомолошке групе ланцастих комплекса

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

решение Када л.к. почиње са $0 \rightarrow \dots$ подразумева се да су наредне све нуле и слично јесте да $\dots \rightarrow 0$ су све нуле, тј.

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Нумерујемо прве у низу премакима, резултат:

$$\dots \rightarrow \overset{5}{0} \rightarrow \overset{4}{0} \rightarrow \overset{3}{0} \rightarrow \overset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2} \overset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{0}{\mathbb{Z}} \rightarrow \overset{-1}{0} \rightarrow \overset{-2}{0} \rightarrow \overset{-3}{0} \rightarrow \dots$$

тј. $C_0 = C_1 = C_2 = \mathbb{Z}$, $C_n = 0$ за $n \neq 0, 1, 2$

$d_2 = \cdot 2$, $d_n = 0$ за $n \neq 2$

Како је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ и $\ker d_n \subseteq C_n$, јасно је да је $H_n(C_*) = 0$ за $n \neq 0, 1, 2$, па само још да одредимо H_0 , H_1 и H_2 .

$n=0$: $\ker d_0 = \mathbb{Z}$, $\operatorname{im} d_1 = 0 \Rightarrow H_0(C_*) \cong \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$

$n=1$: $\ker d_1 = \mathbb{Z}$, $\operatorname{im} d_2 = 2\mathbb{Z}$ (као у зг 3.)

$\Rightarrow H_1(C_*) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$

$n=2$: $\ker d_2 = 0$ (као у зг 3.), $\operatorname{im} d_3 = 0$

$\Rightarrow H_2(C_*) = 0$

Коначно, $H_n(C_*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ 

Лема [цук-цук] Нека је дат планар низ ланцавих комплекса

$$0 \rightarrow C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_* \rightarrow 0$$

Тада постоји гит.

$$\dots \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*) \rightarrow H_n(E_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*) \rightarrow H_{n-1}(D_*) \rightarrow \dots$$

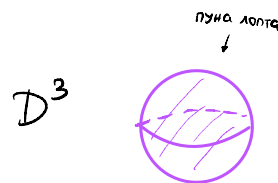
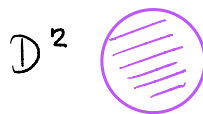
Хелмјски комплекси

Неформална дефиниција Хелмјски комплекс (или CW-комплекс) састоји се од ћелија и функција лепљења.

Ћелија = дискови D^n

нпр. D^0 •

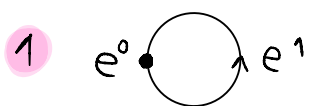
D^1 —



функција лепљења = границу ћелије лепимо на ћелије мање димензије.

Сваки Хелмјски комплекс јесте тополошки простор, али обрнуто не важи. Представљање тополошког простора као Хелмјски комплекс је Хелмјска декомпозиција тог простора. Један топ. пр. може имати више Хелмјских декомпозиција.

Пример $S^1 = \bigcirc$ - можемо направити разне декомпозиције ове кружнице

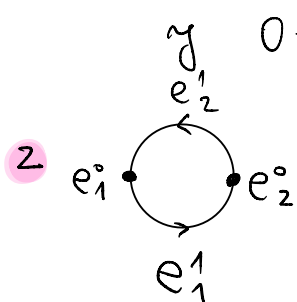


једна 0-ћелија: • e^0

једна 1-ћелија: $\rightarrow e^1$

ћелију e^1 лепимо тако што јој почетак и крај залепимо

у 0-ћелију e^0



две 0-ћелије: e_1^0, e_2^0

две 1-ћелије: e_1^1, e_2^1

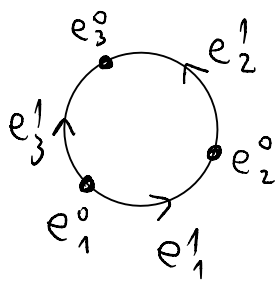
e_j^i ← димензија ћелије
← индексирање ћелија димензије i

↑ стандардна ознака за ћелије

почетак од e_1^1 лепимо на e_1^0 , а крај на e_2^0

почетак од e_2^1 лепимо на e_2^0 , а крај на e_1^0

3



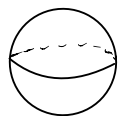
тип 0-келіе: e_1^0, e_2^0, e_3^0

тип 1-келіе: e_1^1, e_2^1, e_3^1

Пример

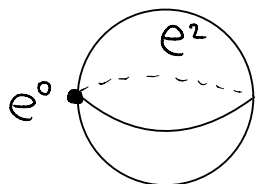
Сферу

S^2



можно декомпозовати на
білиші частини, але середня гора те нам білиш ер значає.

1

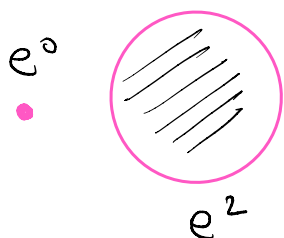


једна 0-келіе: e^0

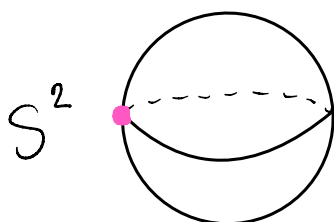
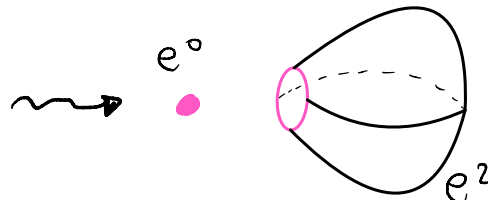
једна 2-келіе: e^2 (диск)

(целу протину диска e^2 залепимо на e^0)

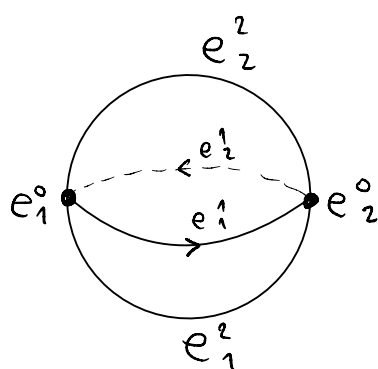
илустрација:



искривимо
диск



2

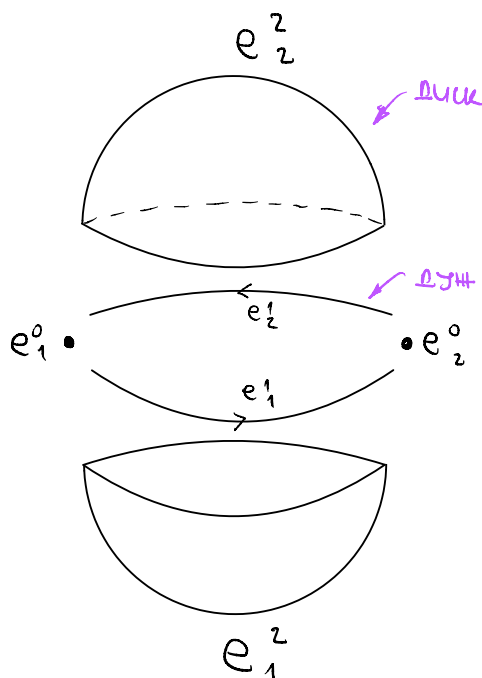


гло 0-келіе: e_1^0, e_2^0

гло 1-келіе: e_1^1, e_2^1

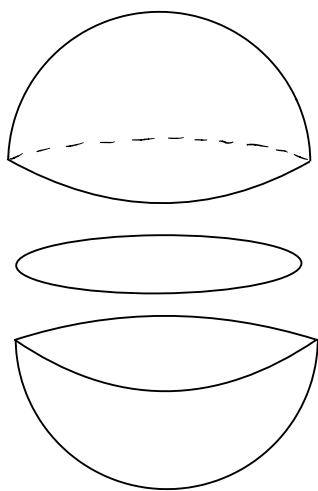
гло 2-келіе: e_1^2, e_2^2

Задатна декомпозиција:



Келију e_1^2 келимо тако што јој пола границе закећемо на e_1^0 , а пола на e_2^0 (слично и за e_2^2)

Пример Ово није кел. декомпозиција сфере S^2 :



јер "келија" у средини није глас вет кружности S^1 .

Пример Реална пројективна равнина $\mathbb{RP}^2$

$$\mathbb{RP}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim, \quad \text{где је релација } \sim \text{ дава } \omega:$$

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad y = \lambda x$$

$\sim$ је релација еквиваленције, па је $\mathbb{RP}^2$ један количански простор (кон. пр. смо радим на OT)

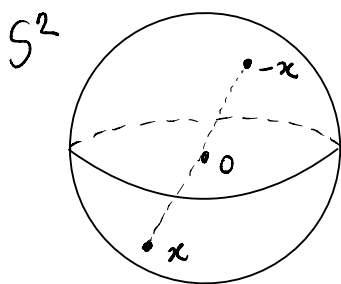
Закле, $\mathbb{RP}^2$ = скуп свих права у $\mathbb{R}^3$ које пролазе кроз координатни почетак

Може се показати да имамо хомеоморфизам

$$\mathbb{RP}^2 \cong S^2 / \sim$$

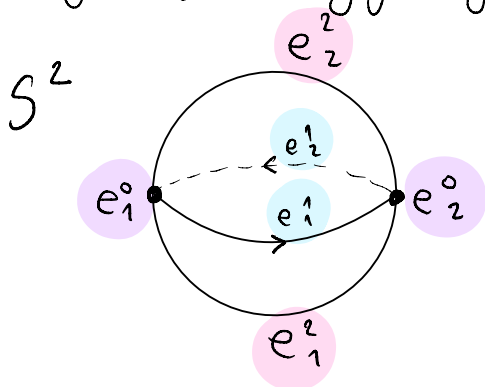
где је $\sim$ даје дава ω

$$x \sim -x, \quad x \in S^2$$

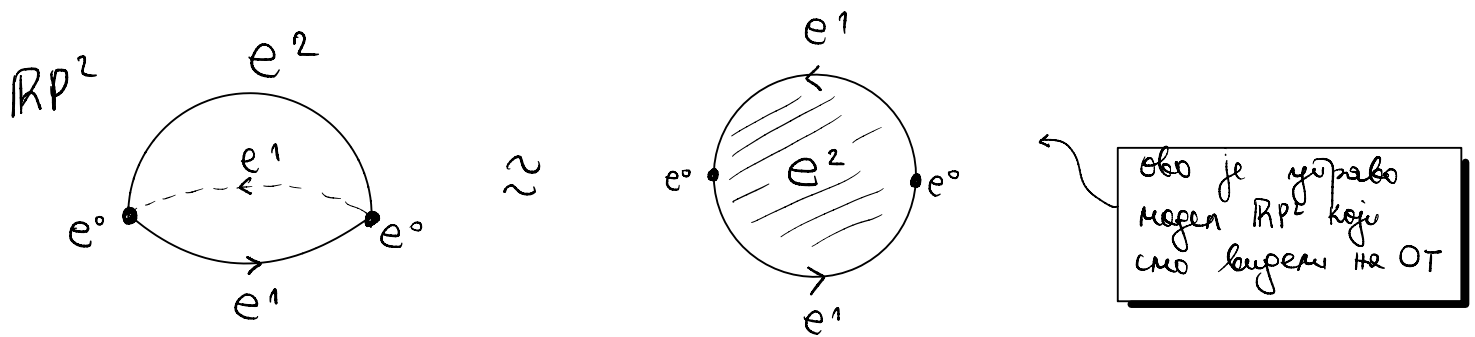


идентификујемо сваке две антиподалне тачке

Хелмхолтска декомпозиција од S^2 или даје декомпозицију од $\mathbb{RP}^2$



Антиподалном идентифицирањем се идентификује e_1^0 са e_2^0 , e_1^1 са e_2^1 и e_1^2 са e_2^2 , тј. $\mathbb{RP}^2$ има по 1 ћелију у димензијама 0, 1 и 2



Пример Сфера S^n , $n \in \mathbb{N}$

Као и код S^2 имамо две занимљиве декомпозиције

- 1 једна 0-келја: e^0 (претња од e^n се зове e^0)
једна n -келја: e^n
- 2 две 0-келје: e_1^0, e_2^0
две 1-келје: e_1^1, e_2^1
 $\vdots$
две n -келје: e_1^n, e_2^n

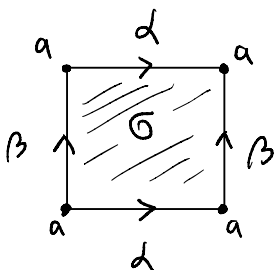
Пример Реални пројективни простор RP^n , $n \in \mathbb{N}$

$$RP^n \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \sim \approx S^n / \sim$$

$x \sim \lambda x$
 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

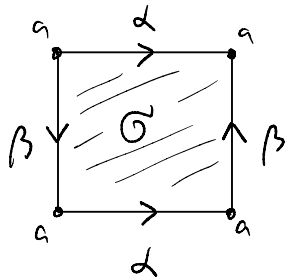
келјска декомпозиција: $e^0, e^1, e^2, \dots, e^n$

Пример Топус T^2



- 0-кел: a
1-кел: α, β
2-кел: G

Планер Кусьхово Сога K



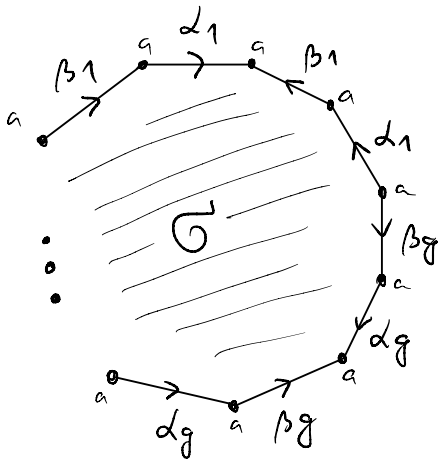
0-ken: a

1-ken: d, b

2-ken: σ

Планер Пелеруу

M_g :

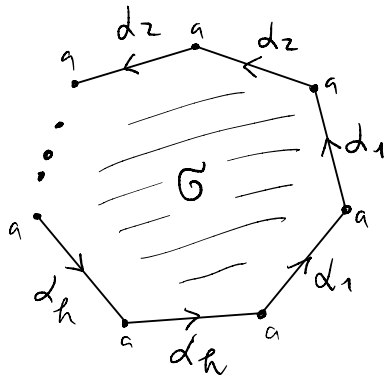


0-ken: a

1-ken: $d_1, b_1, \dots, d_g, b_g$

2-ken: σ

N_h :



0-ken: a

1-ken: $d_1, \dots, d_h$

2-ken: σ

Сога кено риваини кенужку аомовуру.

Челујском комплексу X припадајућемо л.к.

$$C_*(X): \quad \cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{слободна Абелова група генерисана челујским глм. } n$
(тј. $C_n \cong \mathbb{Z}^{k_n}$, $k_n = \text{ор. чел. глм. } n$)

$d_n = \text{свака } n\text{-челуја се слика у своју границу}$

Хомологије челујског комплекса X дефинише се као

$$H_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(C_*(X))$$

$\uparrow$ хомологије л.к. дер. на стр. 7

Ако су X и Y два челујска комплекса и $f: X \rightarrow Y$ непрекидно,
онда f индукује пресликавање $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, дамо се
 $f_*([x]) = [f(x)]$.

Особине: (1) $(1_X)_* = 1_{H_n(X)}$, $n \in \mathbb{N}_0$

(2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(3) $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

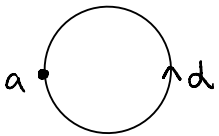
Напомена: тополошки простор може имати различите челујске
декомпозиције, али коју год декомпозицију одберемо добићемо
исту хомологију.

Коментар: $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$, где је $k = \text{ор. компоненти путање}$
повезаности од X .

1. Определить гомологический спектр

(a) S^1 ; (б) S^2 ; (в) $S^n, n \geq 3$; (г) $\mathbb{R}P^2$; (д) T^2 ; (е) K .

решение

(a) S^1 :  — это цепочка 0 и 1-клеток

$$C_*(S^1): \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1} \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

Вспомогательное $d_n = 0$ для $n \neq 1$.

$$C_1 = \mathbb{Z} \langle d \rangle = \{ \lambda d \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$$

множество всех целых кратных d

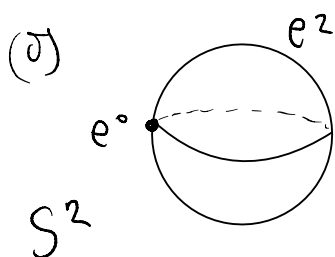
$$C_0 = \mathbb{Z} \langle a \rangle = \{ \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$$

$d_1: C_1 \rightarrow C_0$ — связь цепочек d и a в пространстве, т.е.
в "край — начало" d и a

$$d_1(d) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{край}}}{a} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{начало}}}{a} = 0$$

Следовательно, $H_n(S^1) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = C_n / 0 = C_n$, т.е.

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$C_*(S^2): \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_2}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

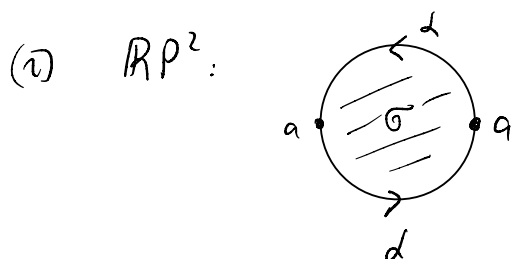
Вспомогательное $d_n = 0$ для каждого n , но не

$$H_n(S^2) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = C_n / 0 = C_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(6) Считая как $y(\sigma)$. $S^n: e^0, e^n$

$$C_*(S^n): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_n}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$C_*(RP^2): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \overset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2} \overset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1} \overset{C_0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\sigma \quad \quad d \quad \quad a$

Очевидно же $dn = 0$ за $n \neq 1, 2$

$$d_1(d) = a - a = 0$$

$$d_2(\sigma) = d + d = 2d$$

идем у круг по прямой и ако су
супериме у смеру кривања идемо,
а иначе резултатно

- $H_0(RP^2) = \ker d_0 / \text{im } d_1 = C_0 / 0 = \mathbb{Z}$

- $H_1(RP^2) = \ker d_1 / \text{im } d_2 = C_1 / \text{im } d_2$

$$C_1 = \mathbb{Z} \langle d \rangle$$

$$\text{im } d_2 = ?$$

$$C_2 = \mathbb{Z} \langle \sigma \rangle = \{ \lambda \sigma \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$$

$$d_2(\lambda \sigma) = \lambda d_2(\sigma) = 2\lambda d$$

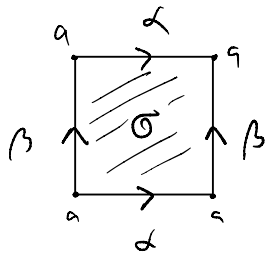
$$\Rightarrow \text{im } d_2 = \{ \lambda \cdot (2d) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \langle 2d \rangle$$

Котануто, $H_1(RP^2) = C_1 / \text{im } d_2 = \mathbb{Z} \langle d \rangle / \mathbb{Z} \langle 2d \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

- $H_2(RP^2) \cong \ker d_2 / \underbrace{\text{im } d_3}_0 = \ker d_2 = 0$

Котануто, $H_n(RP^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

(g) T^2 :



$$C_*(T^2): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha, \beta}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{d_1} \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$C_2 \quad C_1 \quad C_0$

Prove $d_n = 0$ for $n \neq 1, 2$

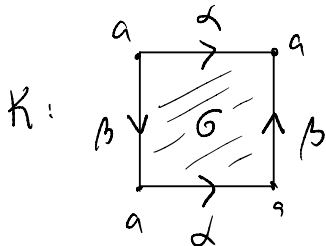
$$d_1(\alpha) = a - a = 0, \quad d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \beta - \alpha - \beta = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

So, $d_n = 0$ for all $n \in \mathbb{N}_0$, we have

$$H_n(T^2) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = C_n / 0 = C_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0, 2 \\ \mathbb{Z}^2, & n=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(g)



$$C_*(K): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha, \beta}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{d_1} \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

$C_2 \quad C_1 \quad C_0$

$$d_n = 0, \quad n \neq 1, 2$$

$$d_1(\alpha) = d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$$

$$\text{for } n \neq 2: \quad \ker d_n = C_n$$

$$\operatorname{im} d_n = 0$$

За $n=2$:

$$\ker d_2 = ?$$

$$0 = d_2(\lambda\alpha) = 2\lambda\beta \Rightarrow \lambda=0 \text{ (jer je } \beta \text{ непересекающ)}$$

$$\Rightarrow \ker d_2 = 0$$

$$\operatorname{im} d_2 = ?$$

$$d_2(\lambda\alpha) = 2\lambda\beta$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \{ \lambda \cdot (2\beta) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \langle 2\beta \rangle$$

- $H_0(K) = \ker d_0 / \operatorname{im} d_1 \cong \mathbb{Z}$
- $H_1(K) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = C_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z} \langle \alpha \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \beta \rangle / \mathbb{Z} \langle 2\beta \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
- $H_2(K) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = 0$

$$\text{Короче, } H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Два типа твх пар

Нека је (X, A) CW-пар, тј. X и A су клеточни комплекси и A је подскуп комплекса од X . Овом пару могу се придружити пар латиса комплекса $C_*(X)$, $C_*(A)$ и $C_*(X, A)$ који формирају следи кит.

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$$

На основу уик-уик леме имамо следи гит.

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

где i — встраивание i_* и j_* индуцированы вложением

$$i: A \hookrightarrow X \quad \text{и} \quad j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A).$$

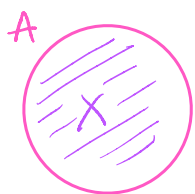
- Если A — все связные компоненты пути связности X , тогда

$$H_0(X, A) = 0.$$

Следствие $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$ для всех $n \geq 1$.

Напомним Это же следствие не верно для каждого топологического пар (X, A) , а только в ситуации с предыдущим параграфом.

Пример $X = D^2$, $A = \partial D^2 = S^1$



X — путь связности, но A — все связные компоненты пути связности, то есть $H_0(X, A) = 0$.

На основе следствия имеем $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$, $n \geq 1$.

$$X/A = D^2/S^1 \cong S^2,$$

то есть

$$H_n(X, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Подсказка из ОТ: $A \subseteq X$ — ретракт X если существует непрерывная функция $\tau: X \rightarrow A$ т.е. $\tau|_A = \text{id}_A$ (т.е. $\tau \circ i = \text{id}_A$, где $i: A \hookrightarrow X$ — вложение).

2. Нека је A ретракцијом од X . Докажи да је

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

решење

Имамо прелиминара:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow \Pi_A & \downarrow \tau \\ & & A \end{array}$$

тј. $\tau \circ i = \Pi_A$.

Ако је $f \circ g$ дијекција,
онда је f "на", а g
је "1-1"

Посматрајмо гом. пара (X, A) :

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\tau \circ i = \Pi_A \Rightarrow \tau_* \circ i_* = \Pi_{H_n(A)} \Rightarrow i_* \text{ је "1-1"} \Rightarrow \partial = 0$$

Како је $\partial = 0$, горњи гом. можемо да поделимо на кџн. за $n \in \mathbb{N}_0$:

$$0 \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \rightarrow 0$$

$\uparrow$
 τ_*

Како је $\tau_* \circ i_* = \Pi_{H_n(A)}$, то се овај кџн. пише, тј.

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

3. Нека је $A \subseteq X$ и $i: A \hookrightarrow X$ хомеоморфна еквиваленција.

Тада је $H_n(X, A) = 0$ за $n \in \mathbb{N}$.

решење

Посматрајмо гом. пара (X, A) :

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Како је i хомеоморфна еквиваленција, то постоји $\varphi: X \rightarrow A$ т.г.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ & \xleftarrow{\varphi} & \end{array}$$

$$\varphi \circ i \simeq \Pi_A, \quad i \circ \varphi \simeq \Pi_X$$

$$\Rightarrow \varphi_* \circ i_* = \Pi_{H_n(A)}, \quad i_* \circ \varphi_* = \Pi_{H_n(X)}$$

$\Rightarrow i_*$ је изоморфизам.

Из гл. 1. имамо:

$$\left. \begin{aligned} 0 = \ker i_* = \operatorname{im} \partial \Rightarrow \partial = 0 \Rightarrow j_* \text{ је „} H_0 \text{“} \\ H_n(X) = \operatorname{im} i_* = \ker j_* \Rightarrow j_* = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_n(X, A) = 0$$



Дефиницијом редуктовану хомологију са

$$\tilde{H}_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(X), \quad n \geq 1,$$

док за $n=0$, $\tilde{H}_0(X)$ је Абелова група тип.

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

(тип. $\tilde{H}_0(X)$ добијено кад из $H_0(X)$ склопимо једну $\mathbb{Z}$)

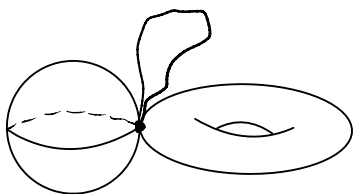
Пр.

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Лема $\tilde{H}_i(X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_k) \cong \tilde{H}_i(X_1) \oplus \tilde{H}_i(X_2) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_i(X_k)$

Пр.

$$X = S^1 \vee S^2 \vee T^2$$



$$\tilde{H}_i(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

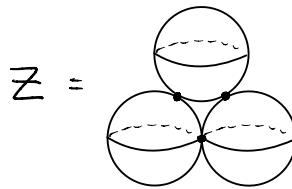
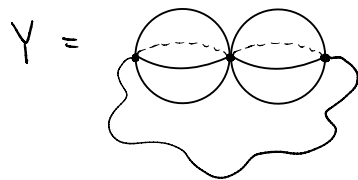
$$\tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_i(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z}, & i=2 \end{cases}$$

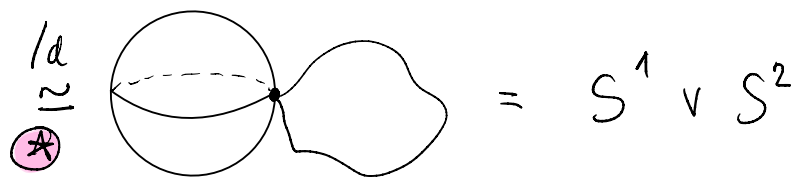
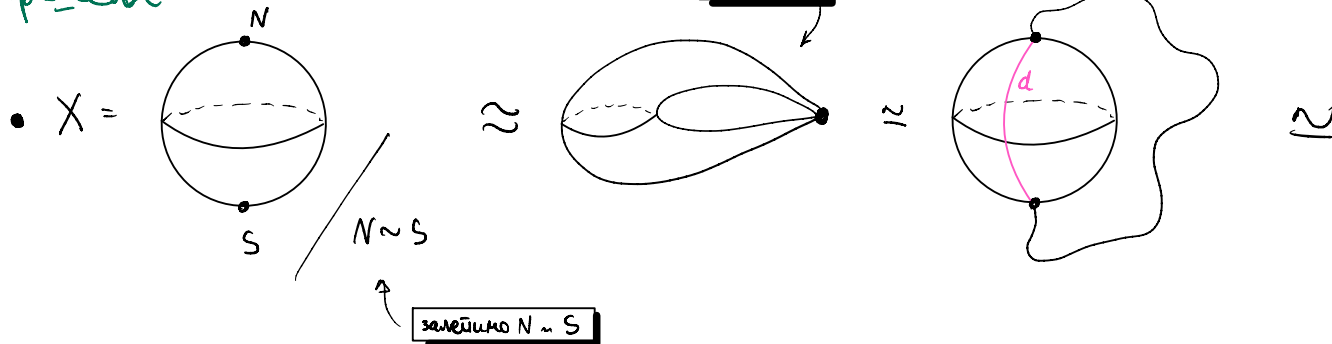
$$\tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Изредити хомологију простора

$$X = S^2 / N \sim S$$



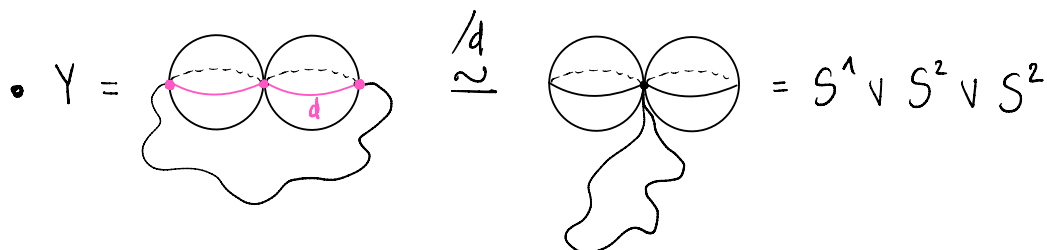
решење



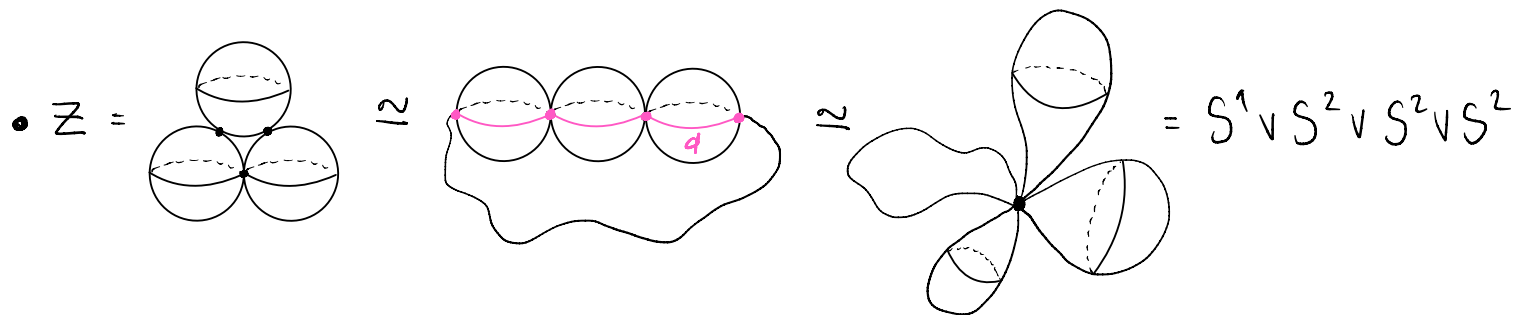
$$\Rightarrow \tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Када изредимо хомологију изједно је да ли рачунамо H или $\tilde{H}$ јер се разликују само за једно $\mathbb{Z}$ у дим. 0

погоднији из OT: ако је (X, A) CW-пар и $A \approx *$,
 онда $X \cong X/A$ (ово користимо у )



$$\Rightarrow \tilde{H}_i(Y) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_i(S^1) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \oplus \tilde{H}_i(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ \mathbb{Z}^3, & i=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \square$$

Комментар Користимо две типичне операције:

Декартов производ $\times$ и директну суму $\oplus$

Нека су $G_n, n \in \mathbb{N}$ Абелеве групе

$$G_1 \times G_2 \times \dots = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n = \left\{ (g_1, g_2, g_3, \dots) \mid g_i \in G_i \right\}$$

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n \mid g_n \in G_n, \text{ сви сем коначно } \right. \\ \left. \text{много } g_n \text{ су } 0 \right\}$$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ је формална сума, тј. може се замишљати и у облику $(g_1, g_2, \dots)$.

Дакле, $\prod_{n \in \mathbb{N}} G_n =$ сви нумови $(g_1, g_2, \dots)$

$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n =$ они нумови $(g_1, g_2, \dots)$ тј. су сви сем коначно много $g_n = 0$

та је $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$

Стегујемо, ако имамо коначно много група, $\times$ и $\oplus$ су исто, тј.

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n \cong G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n.$$

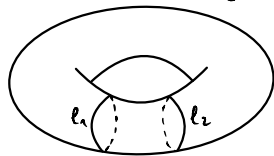
Здесь мы рассматриваем $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ представляющую одну группу:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_3^2 \quad \text{итог.}$$

5. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 окружности на торе:



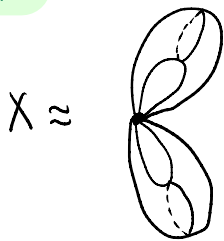
Определим гомологию пространства:

$$(a) X = T^2 / \ell_1 \vee \ell_2$$

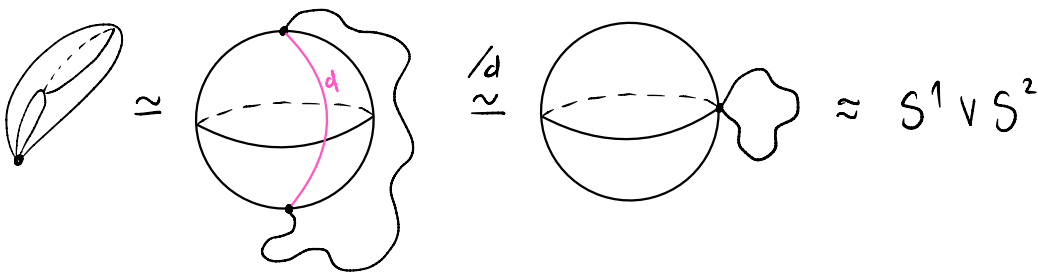
$$(b) Y = (T^2 / \ell_1) / \ell_2$$

решение

(a)



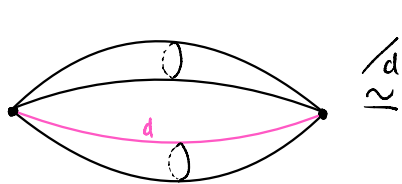
букет две ушпиптунг сферы



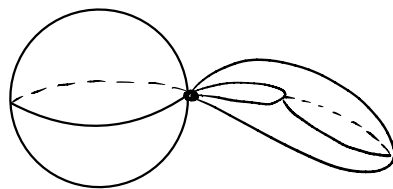
$$\Rightarrow X \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2$$

$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n=1,2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

(5) $Y \approx$



$\cong$



$$\approx S^1 \vee S^2 \vee S^2$$

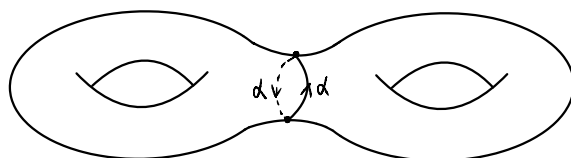
$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n=2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$



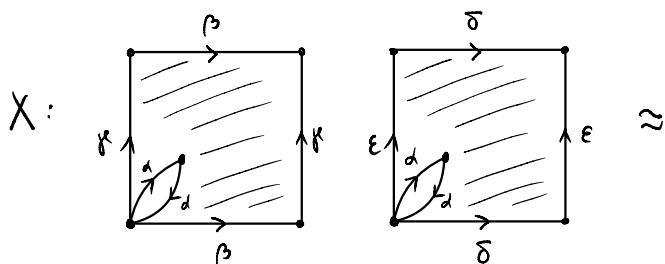
6.

Вычислим гомологию пространства X .

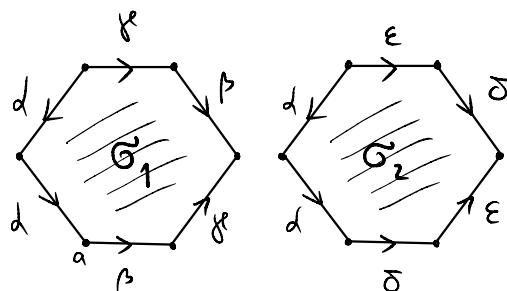
X :



решение



$\approx$



0-клетка: a

1-клетка: $d, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$

2-клетка: σ_1, σ_2

$$C_* : 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle \sigma_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \sigma_2 \rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle d \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \beta \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \gamma \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \delta \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \epsilon \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \xrightarrow{d_0} 0$$

$$\bullet d_0 = 0$$

$$\bullet d_1(d) = d_1(\beta) = d_1(\gamma) = d_1(\delta) = d_1(\epsilon) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$\bullet d_2(\sigma_1) = \beta + \gamma - \beta - \gamma + d + d = 2d$$

$$d_2(\sigma_2) = \delta + \epsilon - \delta - \epsilon + d + d = 2d$$

$\text{im } d_2 = ?$

использовать
элементы $\gamma \in C_2$

$$d_2(k\sigma_1 + l\sigma_2) = 2(k+l)d \Rightarrow \text{im } d_2 = \mathbb{Z}\langle 2d \rangle$$

$$\ker d_2 = ?$$

$$0 = d_2(k\sigma_1 + l\sigma_2) = 2(k+l)\alpha \xrightarrow{\text{интегрируем}} k+l=0 \Rightarrow l=-k \\ \Rightarrow \ker d_2 = \mathbb{Z} \langle \sigma_1 - \sigma_2 \rangle$$

$$n=0: H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

$$n=1: H_1(X) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z} \langle \alpha \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \beta \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \gamma \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \delta \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \varepsilon \rangle / \mathbb{Z} \langle 2\alpha \rangle \\ \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4$$

$$n=2: H_2(X) = \ker d_2 / \underbrace{\operatorname{im} d_3}_0 \cong \mathbb{Z}$$

$$\text{Котането, } H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0, 2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Мајер - Витторплов HHS

Нека су $X_1, X_2 \subseteq X$ топ. $\operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2 = X$. Тада имамо гит.

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{((i_1)_*, (i_2)_*)} \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

$$\text{где су } \begin{array}{ccccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xrightarrow{j_1} & X \\ & \searrow i_2 & X_2 & \nearrow j_2 & \\ & & & & \end{array} \text{ инклузије.}$$

Пример

Конус простора X је: $CX \stackrel{\text{def}}{=} X \times [0, 1] /_{X \times \{1\}}$

Сусетније простора X је: $SX \stackrel{\text{def}}{=} X \times [0, 1] / \begin{matrix} (x, 0) \sim (y, 0) \\ (x, 1) \sim (y, 1) \\ x, y \in X \end{matrix}$

Нпр. ако је $X = S^1 = \bigcirc$

$$S^1 \times [0, 1] = \text{цилиндр}$$

$$CS^1 = \text{конус} \approx \text{диск} = D^2$$

Скупом горњи крај цилиндра у тачку

$$SS^1 = \text{сфера} = S^2$$

Скупом горњег и доњег краја цилиндра у тачке

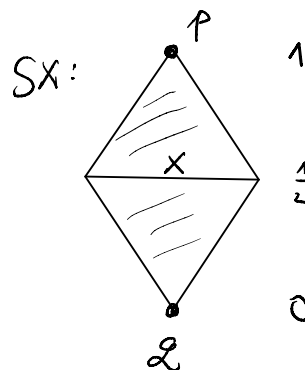
Може се показати да је $CX \cong *$ (за сваки простор X), па је

$$H_n(CX) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сада ћемо помоћу М-В теореме да израчунамо хомологије од SX преко хомологије од X .

$$X_1 := SX \setminus \{p\} \cong CX \cong *$$

$$X_2 := SX \setminus \{q\} \cong CX \cong *$$



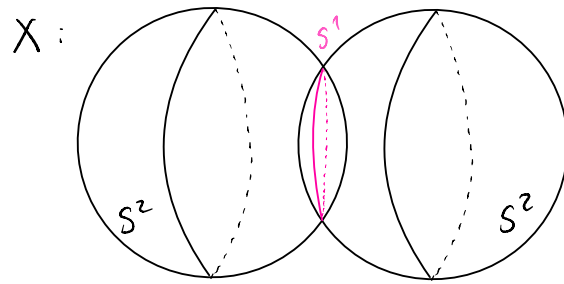
М-В-теорема:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(CX) \oplus \tilde{H}_{n+1}(CX) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(SX) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(CX) \oplus \tilde{H}_n(CX) \rightarrow \cdots$$

$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \text{добивамо изоморфизам } \tilde{H}_{n+1}(SX) \cong \tilde{H}_n(X).$$

7. Нека је X састављен од две сфере S^2 које се секу унутар кружнице S^1 као на слици:



Користећи М-В теорему одредити композицију од X .

решење

$X_1 =$ лева сфера S^2

$X_2 =$ десна сфера S^2

$X_1 \cap X_2 = S^1$

М-В теор:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(S^1) \rightarrow \tilde{H}_n(S^2) \oplus \tilde{H}_n(S^2) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^1) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^2) \oplus \tilde{H}_{n-1}(S^2) \rightarrow \cdots$$

$n \geq 3$:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

тако је $H_n(X) = 0$

$n=2$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

ово је КВН. и пошто је $\mathbb{Z}$ слободна, он се узима, пај.

$$H_2(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3$$

$n=1$:

$$0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0 \Rightarrow H_1(X) = 0$$

$n=0$:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{H}_0(X) = 0, \text{ пај. } H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

Контракто,

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}^3, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Тензорски производ и Tor функциор

A, B - Абелове групе

$F(A, B) := F[A \times B] = A \otimes \langle A \times B \rangle$ - модул Абелове гр. генерисан елементима из $A \times B$

$$R(A, B) \leq F(A, B)$$

↑ подгрупа генерисана од:

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \quad \text{и} \quad (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2),$$

где су $a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B$.

Тензорски производ група A и B је

$$A \otimes B \stackrel{\text{def}}{=} F(A, B) / R(A, B)$$

Особине:

- (1) $A \otimes B \cong B \otimes A$

- (2) $\left(\bigoplus_{\alpha \in A} A_\alpha \right) \otimes B \cong \bigoplus_{\alpha \in A} (A_\alpha \otimes B)$

- (3) $A \otimes \left(\bigoplus_{\beta \in B} B_\beta \right) \cong \bigoplus_{\beta \in B} (A \otimes B_\beta)$

- (4) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

- (5) $G \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes G \cong G$

- (6) $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{\gcd(n, m)}$

Особине (5) и (6)
у нас најкорисније
за задатке

Tor функциор је функциор који пару Абелових група

G и H додељује Абелову групу $\text{Tor}(G, H)$.

(Нетешко формално дефинисати Tor без само навести
баш све особине.)

Особине: (1) A или B лободжна $\Rightarrow \text{Tor}(A, B) = 0$

(шведженто $\text{Tor}(A, \mathbb{Z}) = \text{Tor}(\mathbb{Z}, B) = 0$)

(2) $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, B) \cong \ker(B \xrightarrow{n} B)$

(3) $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\gcd(n, m)}$

(4) $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$

(5) $\text{Tor}(\bigoplus_{d \in A} A_d, B) \cong \bigoplus_{d \in A} \text{Tor}(A_d, B)$

у збоджених
коэффициентах (1) и (3)

Теорема о универсальных коэффициентах и Кунета формула

Може се дефинисати хомологија простора X са коэффициентами
у Абеловој групи G (остатак: $H_n(X; G)$), а тоук је
алат за рачунање $H_n(X; G)$ када знамо $H_n(X)$.
($H_n(X)$ је исто што и $H_n(X; \mathbb{Z})$).

Теорема [о универсальним коэффициентах]

Нека је X тополошки простор и G Абелова. Тада је веретина
такаква

$$0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow 0$$

и цета је, тј.

$$H_n(X; G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X), G), n \in \mathbb{N}_0.$$

1. Узгредити $H_n(X; \mathbb{Z}_5)$, ако је $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_5, & n=17 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n=22 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

решение За $n \notin \{0, 1, 17, 18, 22, 23\}$ је $H_n(X) = 0 = H_{n-1}(X)$, па је

и $H_n(X; \mathbb{Z}_5) = 0$. Још ових 6 случаја се одређују.

$$H_0(X; \mathbb{Z}_5) \cong H_0(X) \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_1(X; \mathbb{Z}_5) \cong (H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \text{Tor}(H_0(X), \mathbb{Z}_5) \cong 0 \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_5) = 0$$

$$H_{17}(X; \mathbb{Z}_5) \cong (H_{17}(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \underset{0}{\text{Tor}(H_{16}(X), \mathbb{Z}_5)} \cong \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{18}(X; \mathbb{Z}_5) \cong (H_{18}(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \underset{0}{\text{Tor}(H_{17}(X), \mathbb{Z}_5)} \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{22}(X; \mathbb{Z}_5) \cong (H_{22}(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \underset{0}{\text{Tor}(H_{21}(X), \mathbb{Z}_5)} \cong (\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_5}) \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{23}(X; \mathbb{Z}_5) \cong (H_{23}(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \underset{0}{\text{Tor}(H_{22}(X), \mathbb{Z}_5)} \cong \text{Tor}(\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_5}, \mathbb{Z}_5) = 0$$

Теорема [Кинет] Нека су X и Y тополошки простори. Тада

$$H_n(X \times Y) \cong \left(\bigoplus_{i=0}^n H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \text{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y)) \right)$$

2. Одредити хомологије простора $X = \mathbb{R}P^3 \times N_4$.

решение

$$H_k(\mathbb{R}P^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 3 \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_k(N_4) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3, & k = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

За $k \geq 6$ је $H_k(X) = 0$.

X путно пов. $\Rightarrow H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Још за $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$H_1(X) \cong (H_0(\mathbb{RP}^3) \otimes H_1(N_4)) \oplus (H_1(\mathbb{RP}^3) \otimes H_0(N_4)) \oplus \text{Tor}(H_0(\mathbb{RP}^3), H_0(N_4)) \cong \\ \cong (\mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3)) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}) \oplus \underset{0}{\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}^3$$

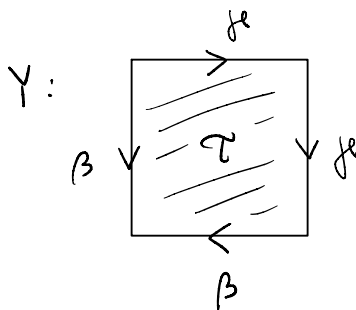
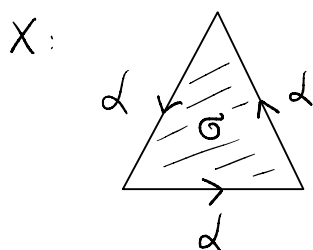
$$H_2(X) \cong (H_0(\mathbb{RP}^3) \otimes H_2(N_4)) \oplus (H_1(\mathbb{RP}^3) \otimes H_1(N_4)) \oplus (H_2(\mathbb{RP}^3) \otimes H_0(N_4)) \oplus \\ \oplus \text{Tor}(H_0(\mathbb{RP}^3), H_1(N_4)) \oplus \text{Tor}(H_1(\mathbb{RP}^3), H_0(N_4)) \cong \\ \cong 0 \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3)) \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2^4$$

$$H_3(X) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$H_4(X) \cong (\mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3)) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3$$

$$H_5(X) = 0. \quad \square$$

3. Даны 2 пространства X и Y .



- Определить гомологию of X и Y .
- Определить $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$ и $H_n(Y; \mathbb{Z}_2)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- Определить $H_n(X; \mathbb{Z}_3)$ и $H_n(Y; \mathbb{Z}_3)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- Определить гомологию пространства $X \times Y$.
- Определить $H_n(X \times Y; \mathbb{Z}_4)$.

решение

(a) Декомпозиция of X :

0-клетка: a

1-клетка: α

2-клетка: σ

$$C_*(X) : 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle \sigma \rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle \alpha \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \xrightarrow{d_0} 0$$

Omnigetto je $d_n = 0$ za $n \neq 1, 2$

$$d_1(\alpha) = a - a = 0$$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$$

$$\Rightarrow \text{im } d_2 = \mathbb{Z}\langle 3\alpha \rangle$$

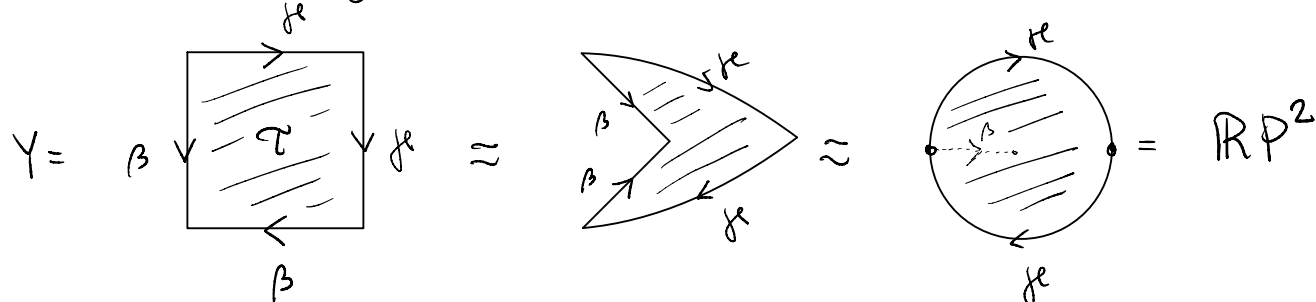
$$\ker d_2 = 0$$

Konечно, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ (jer je X ugotovo povezan)

$$H_1(X) = \ker d_1 / \text{im } d_2 \cong \mathbb{Z}\langle \alpha \rangle / \mathbb{Z}\langle 3\alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_n(X) = 0, \quad n \geq 2$$

Страница 70 у Y можно записать β :



$$\text{та же } H_n(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(5) \quad H_n(X; \mathbb{Z}_2) = ?$$

$$H_n(X; \mathbb{Z}_2) \cong (H_n(X) \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_2)$$

Како же $H_n(X) = 0$ и $H_{n-1}(X) = 0$ за $n \neq 0, 1, 2$, то же

$$H_n(X; \mathbb{Z}_2) = 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(X; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(0, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(X; \mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_{3 \otimes 2} = \mathbb{Z}_1 = 0} \oplus \underbrace{\text{Tor}(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)}_0 = 0$$

$$H_2(X; \mathbb{Z}_2) \cong (0 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2) = 0$$

$$\Rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_n(Y; \mathbb{Z}_2) = ?$$

$$H_n(Y; \mathbb{Z}_2) \cong (H_n(Y) \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(Y), \mathbb{Z}_2)$$

Смущено как и X ,

$$H_n(Y; \mathbb{Z}_2) = 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(Y; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(0, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(Y; \mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \oplus \underbrace{\text{Tor}(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)}_0 \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(Y; \mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{(0 \otimes \mathbb{Z}_2)}_0 \oplus \underbrace{\text{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Короче, } H_n(X; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n=0,1,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(*) \quad H_n(X; \mathbb{Z}_3) = ?$$

$$H_n(X; \mathbb{Z}_3) \cong (H_n(X) \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_3)$$

и походу

$$H_n(X; \mathbb{Z}_3) = 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(X; \mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus \text{Tor}(0, \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_1(X; \mathbb{Z}_3) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_3)}_{\mathbb{Z}_3} \oplus \underbrace{\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3)}_0 \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_2(X; \mathbb{Z}_3) \cong \underbrace{(0 \otimes \mathbb{Z}_3)}_0 \oplus \underbrace{\text{Tor}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)}_{\mathbb{Z}_3} \cong \mathbb{Z}_3$$

$$\Rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}_3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & n=0,1,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_n(Y; \mathbb{Z}_3) = ?$$

$$\text{иначе } H_n(Y; \mathbb{Z}_3) \cong 0, \quad n \geq 3.$$

$$H_0(Y; \mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus \text{Tor}(0, \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$$

$$H_1(Y; \mathbb{Z}_3) \cong (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_3) = 0$$

$$H_2(Y; \mathbb{Z}_3) \cong (0 \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3) = 0$$

$$\Rightarrow H_n(Y; \mathbb{Z}_3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(1) H_n(X \times Y) = ?$$

Кунета формула:

$$H_n(X \times Y) \cong \left(\bigoplus_{i=0}^n H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \text{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y)) \right)$$

Когда же $n \geq 4$ же $H_n(X \times Y) = 0$, мы уже его определили коммутативу у гоменизиране 0, 1, 2 и 3.

$$H_0(X \times Y) \cong \mathbb{Z} \quad (\text{жер же } X \times Y \text{ пунто пов.})$$

$$H_1(X \times Y) \cong (H_0(X) \otimes H_1(Y)) \oplus (H_1(X) \otimes H_0(Y)) \oplus \text{Tor}(H_0(X), H_0(Y)) \cong$$

$$\cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

$$H_2(X \times Y) \cong (H_2(X) \otimes H_0(Y)) \oplus (H_1(X) \otimes H_1(Y)) \oplus (H_0(X) \otimes H_2(Y)) \oplus$$

$$\oplus \text{Tor}(H_0(X), H_1(Y)) \oplus \text{Tor}(H_1(X), H_0(Y)) \cong$$

$$\cong (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z} \otimes 0) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z})$$

$$= 0$$

$$H_3(X \times Y) \cong (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes 0) \oplus (\mathbb{Z} \otimes 0) \oplus$$

$$\oplus \text{Tor}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, 0) = 0$$

Короче, $H_n(X \times Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, & n=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

9) $H_n(X \times Y; \mathbb{Z}_4) \cong (H_n(X \times Y) \otimes \mathbb{Z}_4) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X \times Y), \mathbb{Z}_4)$

Очевидно же $H_n(X \times Y; \mathbb{Z}_4) = 0, n \geq 3.$

$$H_0(X \times Y; \mathbb{Z}_4) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4) \oplus \text{Tor}(0, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4$$

$$H_1(X \times Y; \mathbb{Z}_4) \cong \left((\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) \otimes \mathbb{Z}_4 \right) \oplus \underbrace{\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4)}_0 \cong$$

$$\cong (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4) \oplus (\mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(X \times Y; \mathbb{Z}_4) \cong (0 \otimes \mathbb{Z}_4) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4) \cong$$

$$\cong \text{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2.$$

$$\Rightarrow H_n(X \times Y; \mathbb{Z}_4) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_4, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1, 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

