

УВОД У АЛГЕБАРСКУ ТОПОЛОГИЈУ

- задаци за вежбу -

1. Нека је дат ланчasti комплекс (C_*, d_*) и нека је A Абелова група. Дефинишимо $D_n = \text{Hom}(A, C_n)$ (тј. D_n је скуп свих хомоморфизама из A у C_n) и пресликавање $\partial_n : D_n \rightarrow D_{n-1}$ на следећи начин. Ако је $f \in D_n = \text{Hom}(A, C_n)$, онда је $\partial_n(f) \in D_{n-1} = \text{Hom}(A, C_{n-1})$ дато са

$$\partial_n(f)(x) = d_n(f(x)),$$

тј. комутира дијаграм

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C_n \\ & \searrow \partial_n(f) & \downarrow d_n \\ & & C_{n-1} \end{array}$$

Доказати да је и (D_*, ∂_*) један ланчasti комплекс.

2. Одредити хомолошке групе ланчастог комплекса:

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6 \rightarrow \cdots$$

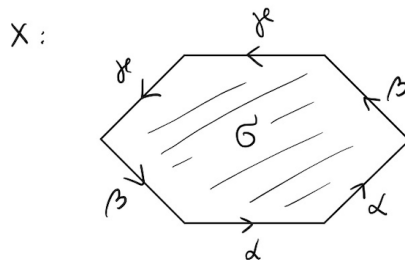
3. Одредити хомолошке групе ланчастог комплекса:

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}_5 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_5 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_5 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_5 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_5 \rightarrow \cdots$$

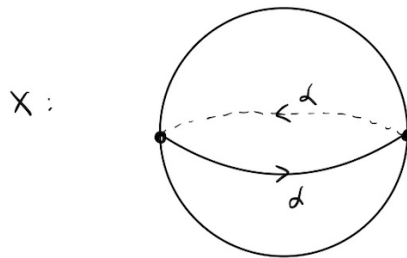
4. Одредити хомолошке групе површи M_g , $g \in \mathbb{N}$.

5. Одредити хомолошке групе површи N_h , $h \in \mathbb{N}$.

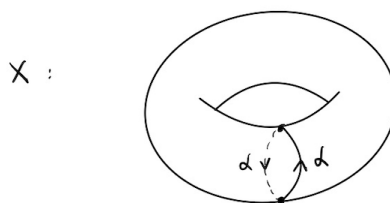
6. Одредити хомолошке групе простора X са слике.



7. Одредити хомолошке групе простора X са слике.



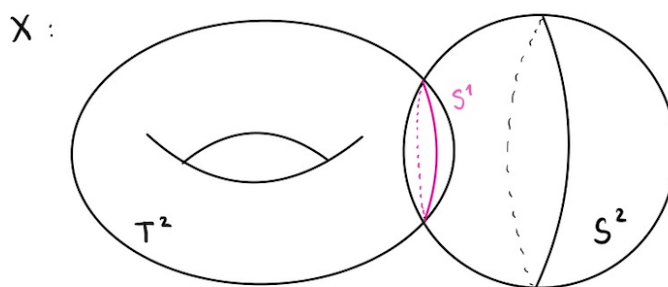
8. Одредити хомолошке групе простора X са слике.



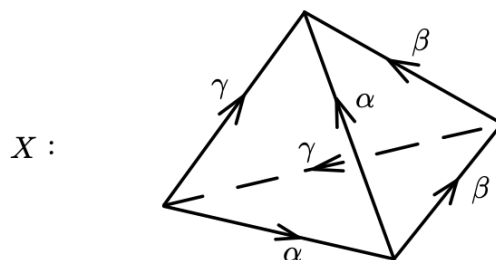
9. Нека је простор X састављен од торуса и сфере који се секу дуж кружнице као на слици.

(а) Помоћу Мајер-Вијеторисовог низа одредити хомологију простора X .

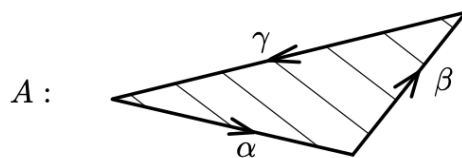
(б) Без коришћења Мајер-Вијеторисовог низа одредити хомологију простора X .



10. Простор X је настао од површи тетраедра идентификацијом ивица као на слици.



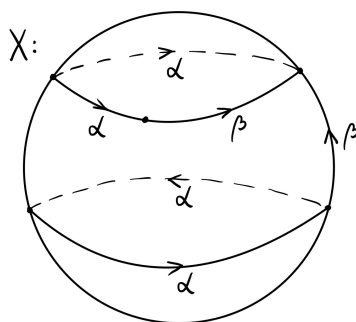
Уочимо потпростор A од X са слике (примећујемо да је A хомеоморфан диску D^2).



(а) Одредити хомолошке групе $H_n(X)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

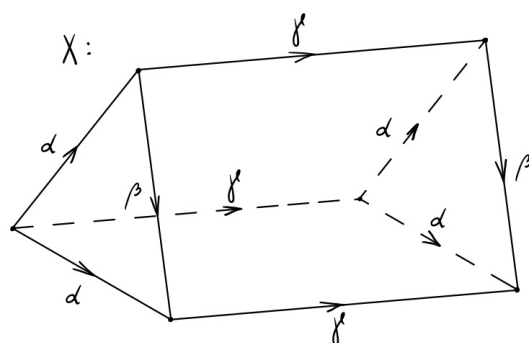
(б) Одредити релативне хомолошке групе $H_n(X, A)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

11. Простор X дат је сликом.



- (a) Одредити хомолошке групе $H_n(X)$ и $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
 (б) Одредити релативне хомолошке групе $H_n(X, \alpha \cup \beta)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

12. Простор X дат је сликом.



- (a) Одредити хомолошке групе $H_n(X)$ и $H_n(X; \mathbb{Z}_3)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
 (б) Одредити релативне хомолошке групе $H_n(X, \alpha \cup \beta)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

13. Нека је X простор чија је хомологија

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 4 \\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- (a) Одредити $H_n(X; \mathbb{Z}_5)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
 (б) Одредити $H_4(X \times S^3; \mathbb{Z}_2)$.

14. Израчунати $H_n(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}_4)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

15. Израчунати $H_n(S^2 \times S^3; \mathbb{Z}_5)$, $n \in \mathbb{N}_0$.