ТОПОЛОГИЈА Б

2021/2022

асистент Милица Јовановић

e-mail milica_jovanovic@math.rs

сајт poincare.math.rs/~milica_jovanovic

кабинет 824

САДРЖАЈ

Количнички простори

дефиниција Нека су X и Y тополошки простори. Пресликавање $f: X \to Y$ је количничко ако:

(1) f је „на";

(2) $(\forall U \subseteq Y)\ U \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$

у деф. смо могли заменити $\mathcal{T}_X$ и $\mathcal{T}_Y$ са $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$

Лако се види:

ако је f непрекидно, „на" и отворено (или затворено), онда је f количничко.

лема 1 Нека су X, Y и Z тополошки простори, $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Ако је f количничко, онда:

$$g \text{ је непрекидно} \iff g \circ f \text{ је непрекидно}$$

доказ: $\Rightarrow$: композиција непрекидних пресликавања је непр.

$\Leftarrow$:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Нека је $U \in \mathcal{T}_Z$. Показујемо $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$.

$U \in \mathcal{T}_Z \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ — јер је $g \circ f$ непр.

$\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_X$

јер је f количничко $\Rightarrow g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$. ■

Дефиниција Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. Пресликавање $r: X \to A$ је ретракција ако је непрекидно и $r|_A = \mathbb{1}_A$, тј. комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\mathbb{1}_A"'] & A \end{tikzcd}$$

A зовемо ретракт од X.

($i(a)=a$ - инклузија; $\mathbb{1}_A(a)=a$ - идентитета)

Свака ретракција је количничко пресликавање

Дефиниција Нека је X тополошки простор, Y скуп и $f: X \longrightarrow Y$ „на". Количничка топологија на Y је $\mathcal{T}_Y \overset{def}{=} \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$. (Ово је најфинија топологија таква да је f непрекидно.)

Количнички простор можемо задати на 3 начина:

1. помоћу релације еквиваленције

Нека је $\sim$ рел. екв. на тополошком простору X. Имамо природну пројекцију

$$\pi: X \xrightarrow{\text{„на"}} X/_\sim$$
$$x \longmapsto [x]$$

и топологију на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} \overset{def}{=} \{U \subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}.$$

2. Колапс подскупа

Нека је X топ. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишимо релацију $\sim$ на X са:

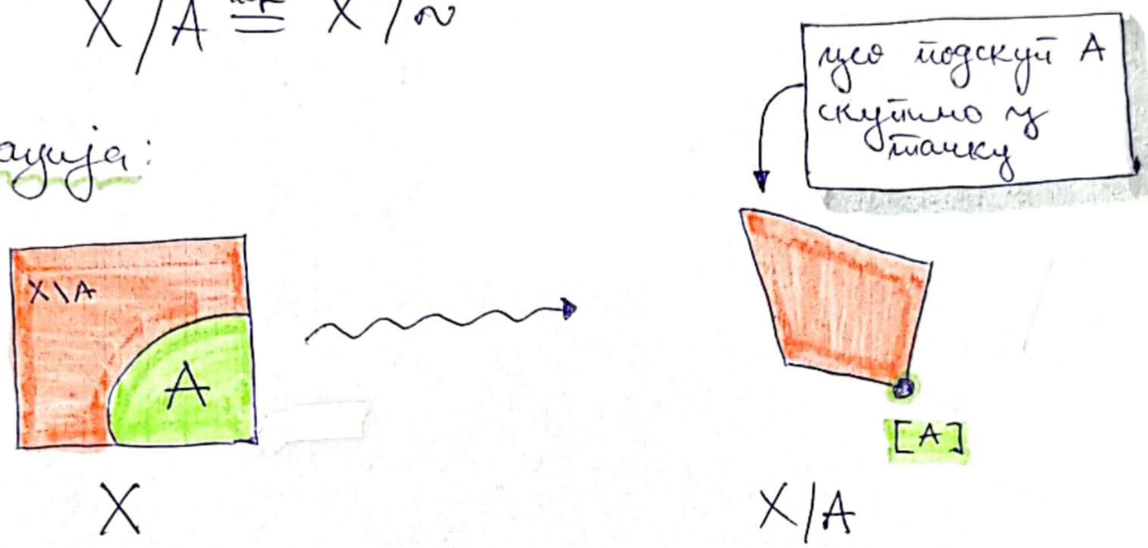
$$x \sim y \overset{def}{\iff} x = y \ \lor \ x, y \in A$$

$\sim$ је релација екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{def}{=} X/\sim$$

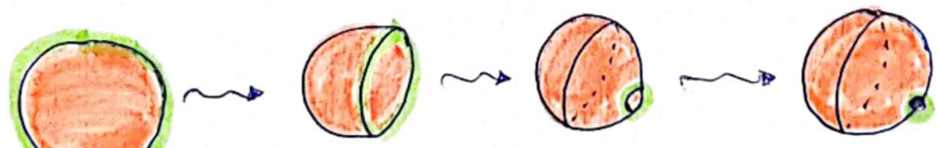
Илустрација:

(1)



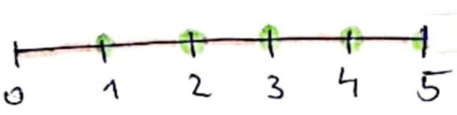
(2) $X/X \approx *$ ($*$ представља једну тачку)

(3) $D^2/S^1 \approx S^2$



D^2 $\qquad$ $D^2/S^1 = S^2$

(4) $[0,5]/\{1,2,3,4,5\} \approx$ 



3. Количник помоћу пресликавања

Нека је X топ. пр. и $f : X \to Y$ непрекидно.

Релација $\sim$ на X дата са:

$$x \sim y \overset{def}{\iff} f(x) = f(y)$$

је рел. екв. па

$$X/f \overset{def}{=} X/\sim .$$

Лема 2 Ако је $f : X \to Y$ количничко, онда $X/f \cong Y$.

доказ:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/f \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Нека је $g : X/f \to Y$ дато са

$$g([x]) := f(x)$$

добра дефинисаност:

$$[x_1] = [x_2] \iff x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2) \iff g([x_1]) = g([x_2])$$

Из дефиниције је очигледно $g \circ \pi = f$.

Како је π количничко и f непр. $\overset{\text{лема 1}}{\Longrightarrow}$ g је непр.

Показујемо да је g хомеоморфизам.

g је „1-1“: $g([x_1]) = g([x_2]) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 \Rightarrow [x_1] = [x_2]$

g је „на“: $y \in Y \overset{f \text{ је „на“}}{\Longrightarrow} (\exists x \in X)\, f(x) = y \Rightarrow g([x]) = y$

$\Rightarrow g$ је бијекција па постоји g^{-1}.

g^{-1} је непр.:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, "g^{-1}"] \\ & X/f \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ је количничко} \\ \pi \text{ непр.} \end{array}\right\} \overset{\text{лема 1}}{\Longrightarrow} g^{-1}$ је непр.

$\Rightarrow g$ је хомео. $\Rightarrow Y \approx X/f$. ■

лема 3 Нека је $\sim$ рел. екв. на X, $X/\sim$ је T_2 и $A \in \mathcal{K}_X$ сече све класе еквиваленције. Тада $X/\sim \;\approx A/\sim_A$. $\left(\sim_A = \sim \cap (A \times A) \right)$

доказ:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "\pi \circ i_A"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & X/\sim \end{tikzcd}$$

$\pi \circ i_A$ је количничко:

(1) „на" јер сече све класе

(2) непр. јер су π и i_A непр.

(3) затворено јер слика компакт у T_2

$\overset{\text{лема 2}}{\Longrightarrow} X/\sim \;\approx A/_{\pi \circ i_A} = A/\sim_A$. ■

1. Доказати

(а) $[0,1]/\{0,1\} \approx S^1$;

(б) $\mathbb{R}/\sim \;\approx S^1$, где је $\sim$ релација на $\mathbb{R}$ дата са: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

решење

(а)
$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ {[0,1]/f} \arrow[ur, dotted, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

Нека је $f: [0,1] \to S^1$ дато са

$f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

f је непр., „на" и затворено (јер слика компакт у T_2), па је количничко.

$\overset{\text{лема 2}}{\Longrightarrow}$ $S^1 \approx [0,1]/f$.

Шта је $[0,1]/f$?

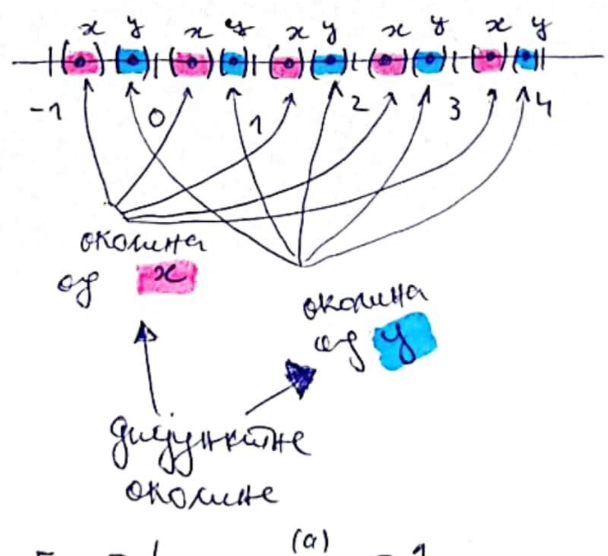
$x \sim y \iff f(x) = f(y) \iff x = y \ \vee \ |x-y| = 1$

$\iff x = y \ \vee \ \{x,y\} = \{0,1\}$

$\Rightarrow [0,1]/f \approx [0,1]/\{0,1\}$.

(б) Нека је $A = [0,1]$ - то је компакт који сече све класе.

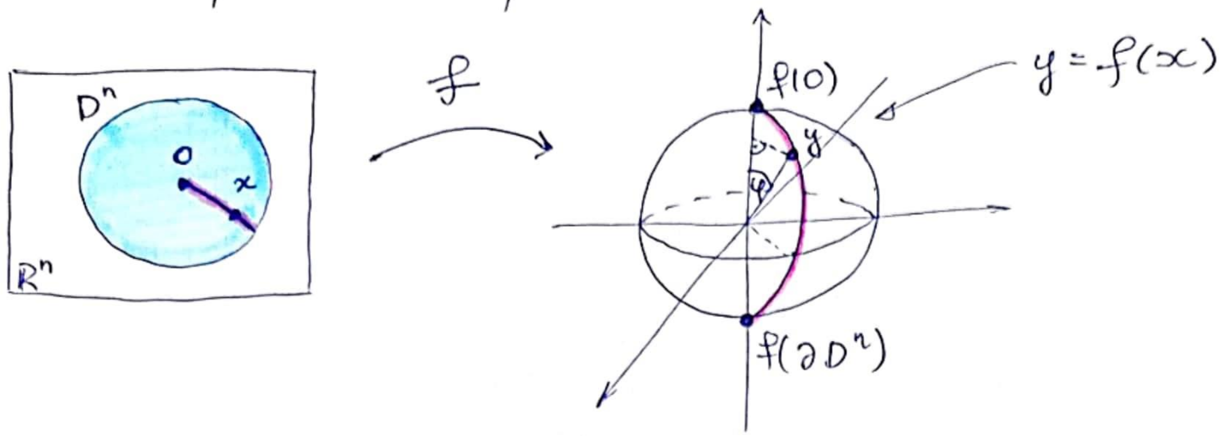
$\mathbb{R}/\sim$ је T_2 :



$\overset{\text{лема 3}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{R}/\sim \ \approx A/\sim_A = [0,1]/\{0,1\} \overset{(а)}{\approx} S^1$. ■

$\boxed{2.}$ Доказати $D^n/\partial D^n \approx S^n$.

решење Дефинишимо пресликавање $f: D^n \to S^n$



$y_i = \alpha x_i \quad , \quad i = \overline{1,n}$ (α треба наћи)

$$\frac{\|x\|}{1} = \frac{\varphi}{\pi} \Rightarrow \varphi = \pi \cdot \|x\|$$

$$y_{n+1} = \cos\varphi = \cos(\pi\|x\|)$$

мора да важи: $\sum_{i=1}^{n+1} \|y_i\|^2 = 1$

$$1 = \sum_{i=1}^{n+1} \|y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha^2 \|x_i\|^2 + \cos^2(\pi\|x\|) = \|x\|\alpha^2 + \cos^2(\pi\|x\|)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}$$

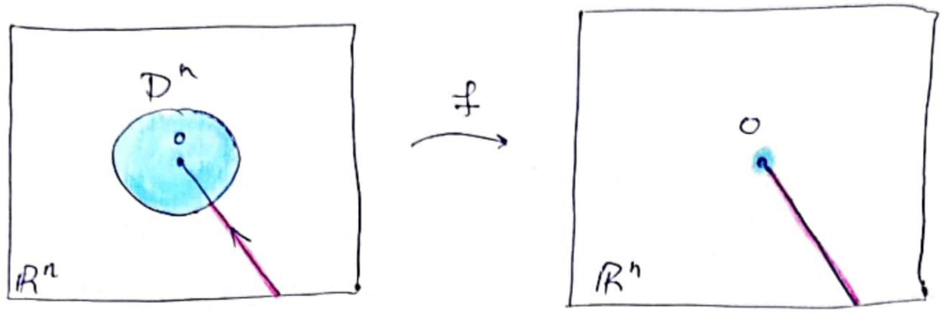
$$\Rightarrow f(x) := \begin{cases} \left(x_1 \cdot \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}, \dots, x_n \cdot \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}, \cos(\pi\|x\|)\right), & x \neq 0 \\ (0, \dots, 0, 1), & x = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} - f \text{ је „на"} \\ - f \text{ је „непр." } (\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)) \\ - f \text{ је затворено (компакт} \to T_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ је количничко} \overset{\text{леме 2}}{\Rightarrow} S^n \approx D^n/f = D^n/\partial D^n$$

$\blacksquare$

3. Доказати $\mathbb{R}^n/D^n \approx \mathbb{R}^n$

решење



Нека је $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \|x\|\leq 1 \quad (\text{тј. } x\in D^n) \\ x-\frac{x}{\|x\|}, & \|x\|\geq 1 \quad (\text{тј. } x\in \mathbb{R}^n\setminus(\text{int}\, D^n)) \end{cases}$$

- f је „на“
- f је непр. (на основу леме о лепљењу јер $D^n, \mathbb{R}^n\setminus(\text{int}\, D^n)\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$)
- f је затворено (показујемо накнадно)

$\Rightarrow$ f је количничко

$\Downarrow$ лема 2

$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n/f = \mathbb{R}^n/D^n$.

Још до видимо да је f затворено.

$$A\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{\Longrightarrow} f(A)\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$$

1° $A\subseteq D^n$ или $A\subseteq \mathbb{R}^n\setminus D^n$ очигледно.

$\boxed{2^\circ}$ A сече и D^n и $\mathbb{R}^n \setminus D^n$

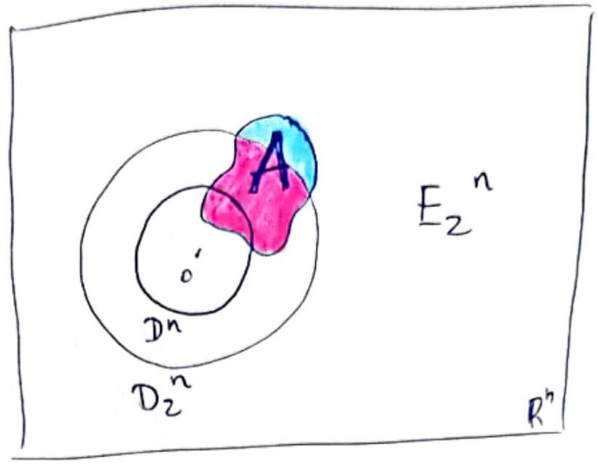
уведимо ознаке

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

$D_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\}$

$E_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 1\}$

$E_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 2\}$



Нека је $g: E_2^n \to E_1^n$ дато са $g(x) = x - \frac{x}{\|x\|}$.

Очигледно је g хомеоморфизам.

$f(A) = f(A \cap \mathbb{R}^n) = f(A \cap (D_2^n \cup E_2^n)) =$

$= f(A \cap D_2^n) \cup f(A \cap E_2^n)$

(*) $A \cap D_2^n \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n}$ јер је A затворен, а D_2^n компактан

$\Rightarrow f(A \cap D_2^n) \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f(A \cap D_2^n) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$

(**) $f(A \cap E_2^n) = g(A \cap E_2^n)$

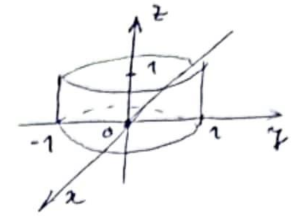
$A \cap E_2^n \in \mathcal{F}_{E_2^n} \Rightarrow g(A \cap E_2^n) \in \mathcal{F}_{E_1^n}$ (јер је g хомео.)

и E_1^n је затворен, па је $f(A \cap E_2^n) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$

Из (*) и (**) следи $f(A) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$. ■

Неки количнички модели у равни

1) цилиндар



$$C = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$$

параметризација: $f(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$,

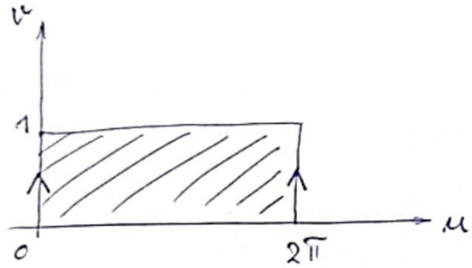
$$f : [0,2\pi]\times[0,1] \longrightarrow C$$

f је непр., „на" и затворено (компакт $\to T_2$)

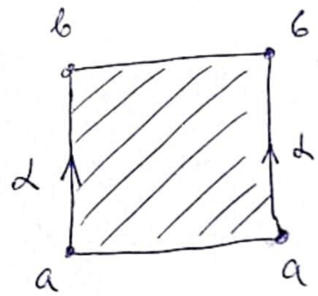
$\Rightarrow$ f је количничко $\Rightarrow$ $[0,2\pi]\times[0,1]/f \cong C$

$$f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \Leftrightarrow v_1=v_2 \wedge (u_1=u_2 \vee |u_1-u_2|=2\pi)$$

тј. $\{u_1,u_2\}=\{0,2\pi\}$



тј.



2) торус $f:[0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow T^2$

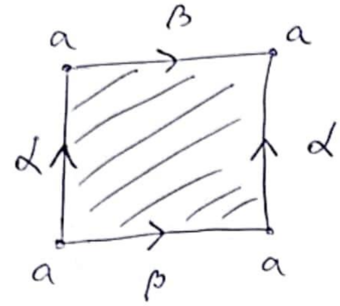
$$f(u,v) := \big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)$$

f је непр., „на" и затворено (компакт $\to T_2$)

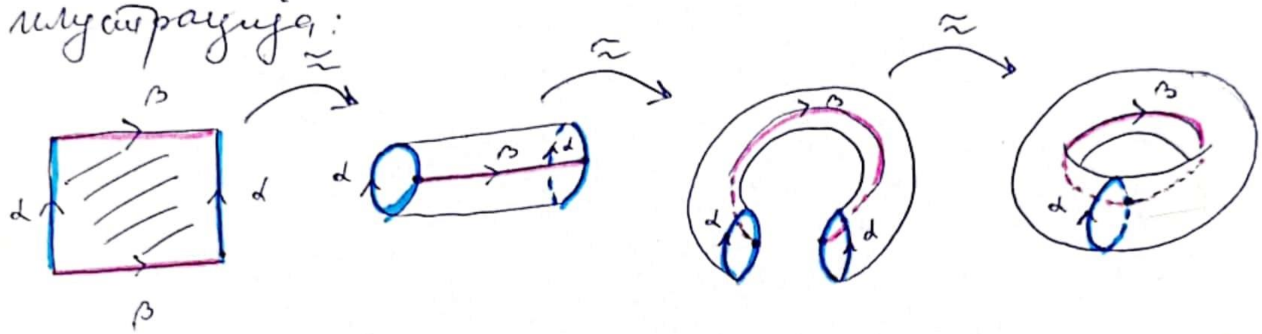
$\Rightarrow$ f је количничко $\Rightarrow$ $[0,2\pi]^2/f \cong T^2$

$f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \iff |u_1-u_2|,\ |v_1-v_2| \in \{0, 2\pi\}$

$\Rightarrow\ T^2 \cong$



илустрација:



3 Мебијусова трака $\quad f : [0,2\pi]\times[-\varepsilon, \varepsilon] \to M$

довољно мало

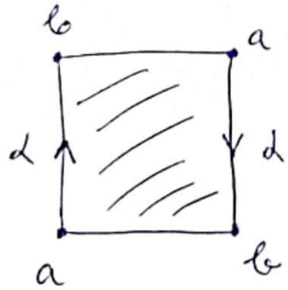
$f(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + v\left(\sin\frac{u}{2}\cos u, \sin\frac{u}{2}\sin u, \cos\frac{u}{2}\right)$

f је непр., „на" и затворено $\Rightarrow$ f је количничко

$\Rightarrow\ [0,2\pi]\times[-\varepsilon,\varepsilon]/_f \cong M$

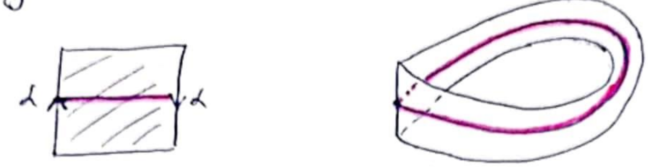
$f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \iff |u_1-u_2|=2\pi \ \wedge\ v_1+v_2=0$

$\Rightarrow\ M \cong$



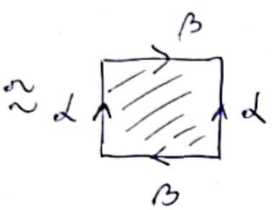
Битне кружнице на M:

- централна



- гранична

4. Клајнова флаша

$K \approx$ 

5. Реални пројективни простор

На $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ дефинишемо рел. екв. $\sim$

$$x \sim y \overset{def}{\iff} (\exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ y = \lambda x$$

$$\mathbb{R}P^n \overset{def}{=} (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/_{\sim}$$

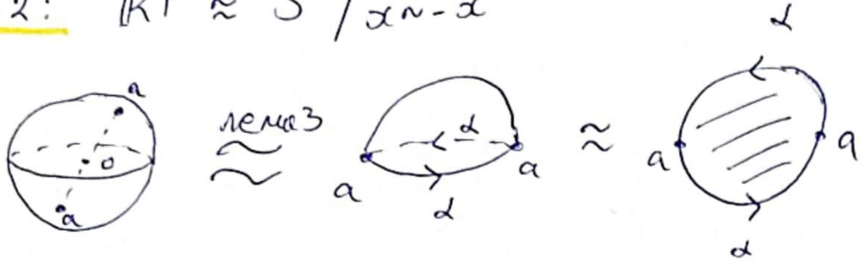
Класе еквиваленције су праве кроз коорд. почетак без O.
Сфера S^n је компакт који сече сваку класу у две антиподалне тачке

$$\xRightarrow{\text{лема 3}} \mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/_{\sim} \approx S^n/_{x\sim -x}$$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 \approx S^1/_{x\sim -x}$

$\approx S^1 \Rightarrow \mathbb{R}P^1 \approx S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 \approx S^2/_{x\sim -x}$



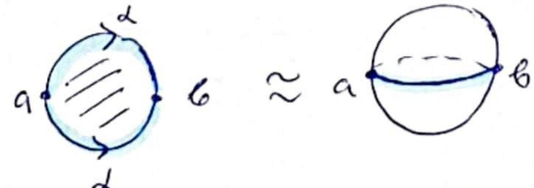
$\approx D^2/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^2}$

$n\geq 3$: $\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{x\sim -x} \approx D^n/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^n}$

Ниједан потпростор од $\mathbb{R}^3$ није хомеоморфан са $\mathbb{R}P^2$, тј. они се не могу утопити (видети) у $\mathbb{R}^3$.

„Сечење и лепљење“

ПР пример (1)



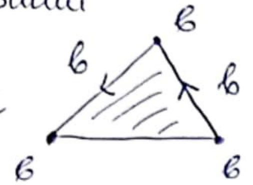
$= S^2$

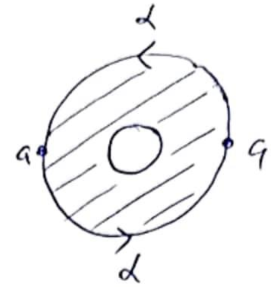
(2)

= уштинута сфера

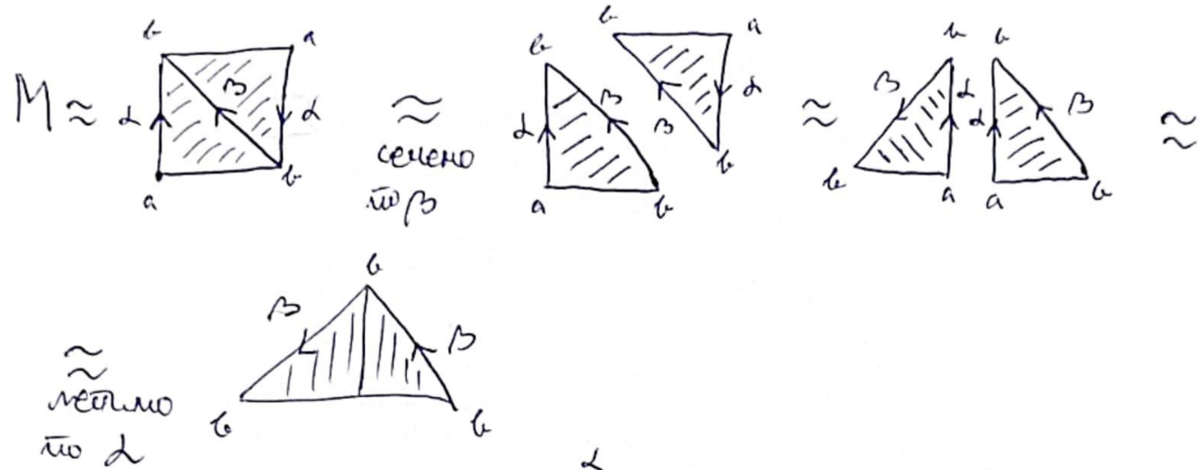
могла се видети и овако:

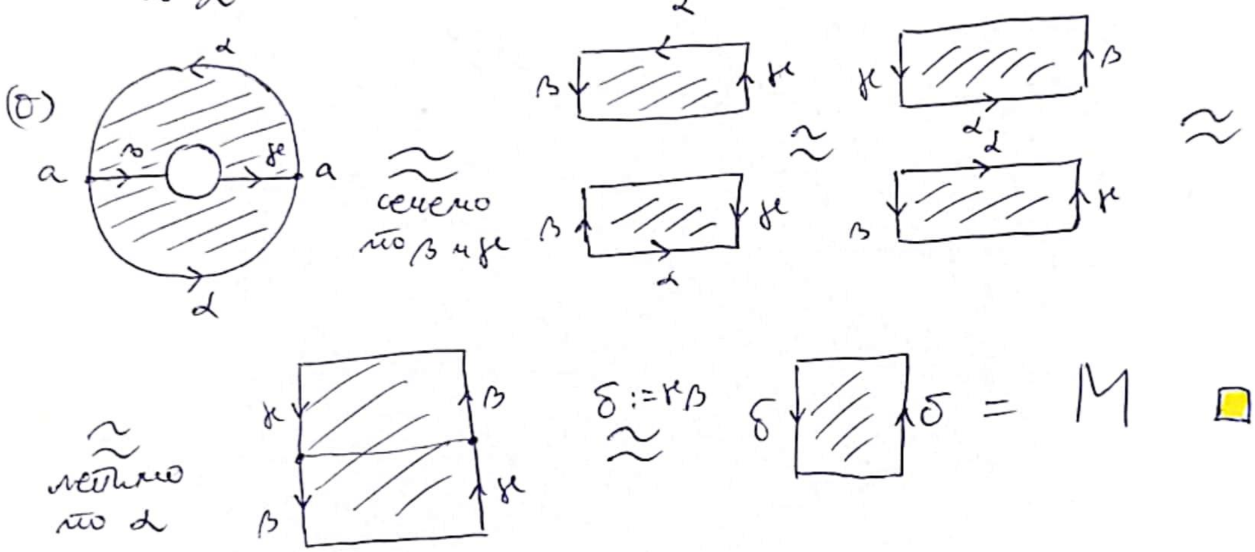
1. Доказати

(а) $M \approx$ 

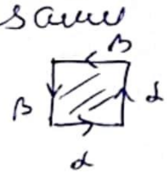
(б) $M \approx$ 

решење

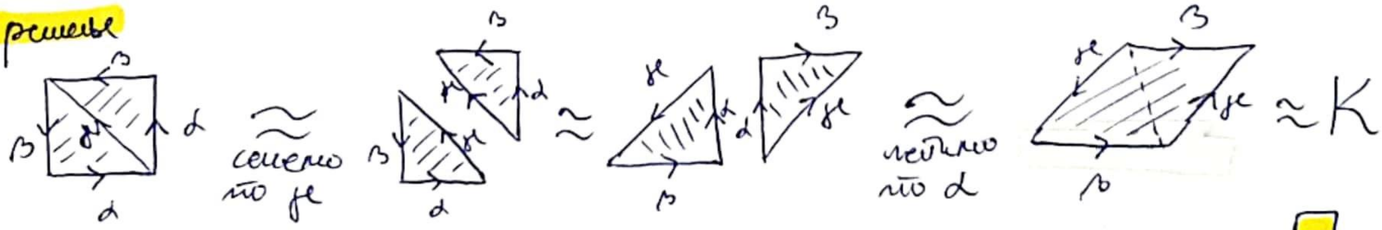
(а) 

(б) 

2. Доказати

$K \approx$ 

решење



Дисјунктна унија простора

X, Y – тополошки простори

$X \sqcup Y$ је топ. пр. са базом $\mathcal{B}_{X \sqcup Y} = \mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$

(ако $X \cap Y \neq \emptyset$, узмемо $X_1 \approx X$ и $Y_1 \approx Y$ т.д. $Y_1 \cap X_1 = \emptyset$)

Ако је $A \subseteq X \sqcup Y$:

$$A \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y} \iff A \cap X \in \mathcal{T}_X \;\wedge\; A \cap Y \in \mathcal{T}_Y$$

Постоје природна утапања $X \hookrightarrow X \sqcup Y$ и $Y \hookrightarrow X \sqcup Y$.

Букет простора

X, Y – тополошки простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ произвољне

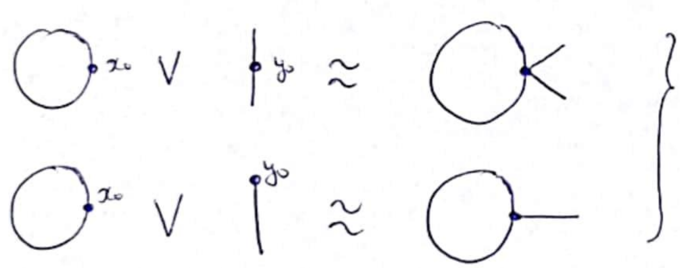
$$X \vee Y := X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$$

ПР

пример (1)

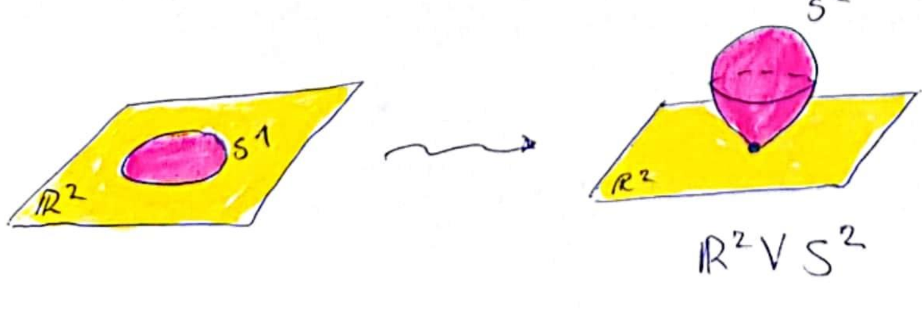
(2)

(3)



зависи од избора тачака

(4) $\mathbb{R}^2 / S^1 \approx \mathbb{R}^2 \vee S^2$

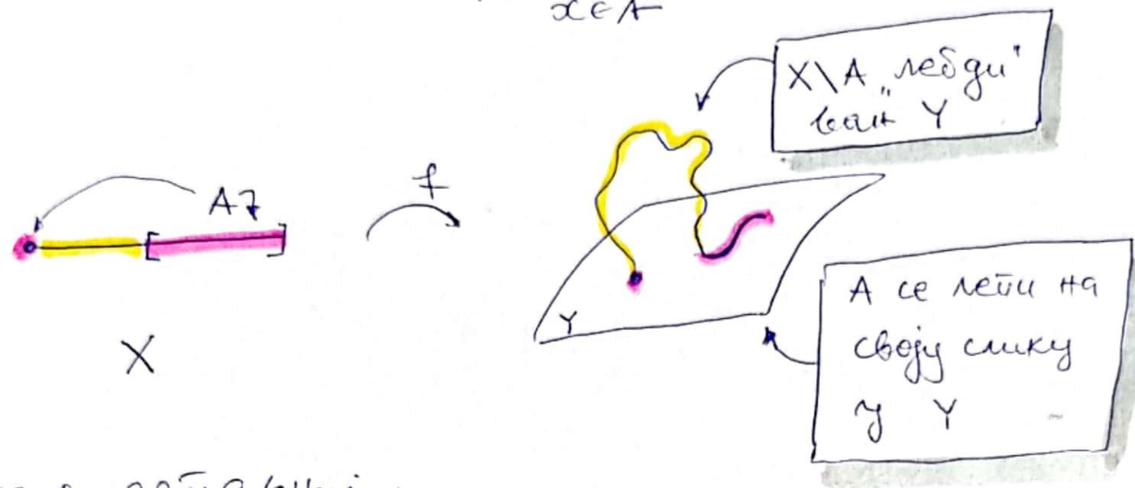


$\mathbb{R}^2 \vee S^2$

Лепљење пресликавањем

X, Y – тополошки простори, $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ непр.

$$X \cup_f Y := X \sqcup Y \Big/ {\scriptstyle x \sim f(x),\ x \in A}$$



Мало детаљније:

$$X \cup_f Y = X \sqcup Y / \sim, \text{ где је } \sim:$$

$x_1, x_2 \in X$: $\quad x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee (x_1, x_2 \in A \wedge f(x_1) = f(x_2))$

$x \in X, y \in Y$: $\quad x \sim y \Leftrightarrow x \in A \wedge f(x) = y$

$y_1, y_2 \in Y$: $\quad y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

1. Ако је $f: X \to Y$, доказати $X \cup_f Y \approx Y$. $(A = X)$

решење

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup Y & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & \approx ? & \\ X \sqcup Y / g & & \\ \approx ? & & \\ X \cup_f Y & & \end{array}$$

Нека је g дато са:

$g(x) := f(x), \quad x \in X$

$g(y) := y, \quad y \in Y$

g је количничко:

(1) $g|_X$ и $g|_Y$ су непр. $\Rightarrow$ g је непр.

(2) g је „на"

(3) $B \subseteq Y$: Нека је

$$g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \sqcup B \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \quad \text{и} \quad B \in \mathcal{T}_Y$$

Дакле, $g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y} \Rightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_Y$

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ g је количничко

$$\xRightarrow{\text{лема 2}} \quad X \sqcup Y/_g \approx Y.$$

Још да видимо шта је $X \sqcup Y/g$.

- $x_1, x_2 \in X$: $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- $x \in X, y \in Y$: $g(x) = g(y) \Leftrightarrow f(x) = y$
- $y_1, y_2 \in Y$: $g(y_1) = g(y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2$

$$\Rightarrow \quad X \sqcup Y/g \approx X \cup_f Y.$$

Коначно, $X \cup_f Y \approx Y$. $\blacksquare$

$\boxed{2.}$ Нека су X, Y топ. пр, $A \subseteq X$ и $f: A \to Y$ константно пресликавање. Доказати $X \cup_f Y \simeq X/A \vee Y$.

решење

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X/A \vee Y \\ X \sqcup Y/_g & \end{tikzcd}$$

Нека је

$g(x) := [x]$ ← класа у X/A

$g(y) := y$, $x \in X, y \in Y$

g је количничко.

(1) $g|_X : X \xrightarrow{\pi} X/A \hookrightarrow X/A \vee Y$ непр.
$g|_Y : Y \hookrightarrow X/A \vee Y$ непр. $\Big\}$ $\Rightarrow$ g је непр.

(2) g је „на"

(3) $B \subseteq X/A \vee Y$ т.д. $g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y}$.

Показујемо $B \in \mathcal{T}_{X/A \vee Y}$, тј. да је

$B \cap X/A \in \mathcal{T}_{X/A}$ и $B \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

$g^{-1}(B) = \pi^{-1}(B \cap X/A) \sqcup (B \cap Y)$, где је $\pi : X \to X/A$ кол.

$$g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y} \Rightarrow \begin{cases} \pi^{-1}(B \cap X/A) \in \mathcal{T}_X \xRightarrow{\pi \text{ кол.}} B \cap X/A \in \mathcal{T}_{X/A} \\ B \cap Y \in \mathcal{T}_Y \end{cases}$$

Дакле, $B \in \mathcal{T}_{X/A \vee Y}$.

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ g је количничко.

Лема 2 $\Longrightarrow X \sqcup Y/g \simeq X/A \vee Y$

Још шта је $X \sqcup Y/g$?

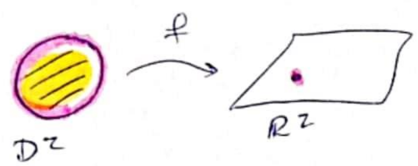
- $x_1, x_2 \in X$: $\quad g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow [x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \vee \ x_1, x_2 \in A$
  $\Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \vee \ f(x_1) = f(x_2) = \text{const}$

- $x \in X, y \in Y$: $\quad g(x) = g(y) \Leftrightarrow [x] = y \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ f(x) = \text{const} = y$

- $y_1, y_2 \in Y$: $\quad g(y_1) = g(y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2$

Дакле, $X \sqcup Y/g \simeq X \cup_f Y$ па је $X \cup_f Y \simeq X/A \vee Y$. $\blacksquare$

ПР пример (1) $X = D^2, A = S^1, Y = \mathbb{R}^2$, $f: A \to Y$ константно

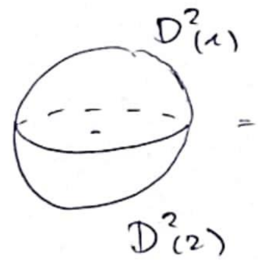


$\Rightarrow \quad X \cup_f Y \simeq$

$= \mathbb{R}^2 \vee S^2$

(2) $X = D^2_{(1)}$, $Y = D^2_{(2)}$, $A = \partial D^2_{(1)}$, $f: \partial D^2_{(1)} \xrightarrow{\simeq} \partial D^2_{(2)}$

$X \cup_f Y \simeq$



$= S^2$

индекси (1) и (2) само значе да се ради о два различита диска

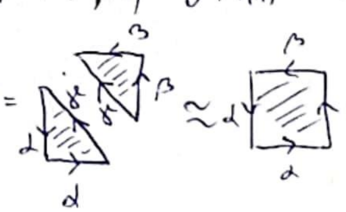
(3) $X = D^2, Y = M$, $f: \partial D^2 \xrightarrow{\simeq} \partial M$

$X \cup_f Y \simeq$

$= \mathbb{R}P^2$

(4) $X = Y = M$, $f: \partial M_{(1)} \xrightarrow{\simeq} \partial M_{(2)}$

$X \cup_f Y =$



$= K$

Многострукости и површи

дефиниција Нека је X Хаусдорфов. X је n-димензиона многострукост ако

$$(\forall x\in X)(\exists U\in \mathcal{O}(x)\cap \mathcal{T}_X)\quad U \approx \operatorname{int} D^n \approx \mathbb{R}^n .$$

X је многострукост са границом ако

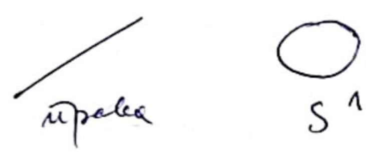
$$(\forall x\in X)\Big((\exists U\in\mathcal{O}(x)\cap\mathcal{T}_X)\ U\approx\mathbb{R}^n \quad \vee \quad (\exists U\in\mathcal{O}(x)\cap\mathcal{T}_X)\ U\approx\mathbb{R}^n_+\Big)$$

$$\boxed{\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}}$$

Граница многострукости X је

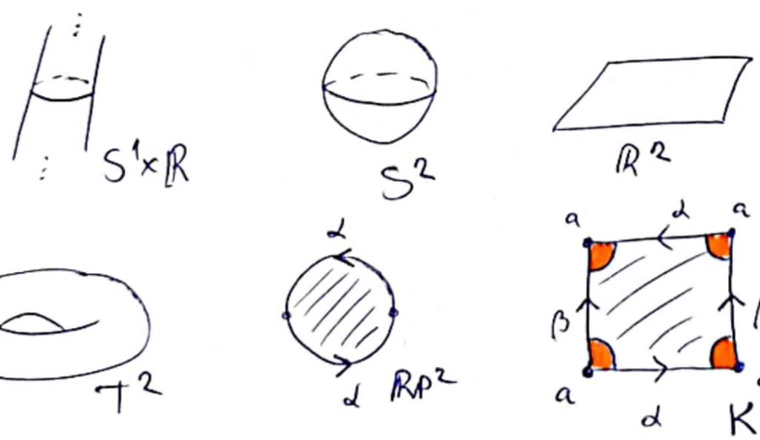
$$\partial X \overset{\text{def}}{=} \{x\in X \mid \neg(\exists U\in\mathcal{O}(x)\cap\mathcal{T}_X)\ U\approx\mathbb{R}^n\}$$

пример (1)



1-многострукости

(2)



2-многострукости

околина од a
(залепе се четвртине круга по α и β)

(3) $[0,1)$ је многострукост са границом и граница је $\{0\}$.
Тополошка граница је $\{0,1\}$!

Граница многострукости и тополошка граница не морају бити исто!

Ако је X n-дим. мног. са границом, онда је ∂X $(n-1)$-дим. мног. без границе.

Ако је X n-дим. мног. са гр. и Y m-дим. мног. са гр., онда је $X \times Y$ $(m+n)$-дим. мног. са гр. и $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y$.

$\boxed{1.}$ Нека су X и Y n-дим. мног. са гр. и $f: X \to Y$ хомеоморфизам. Тада је $f(\partial X) = \partial Y$.

решење $\boxed{\subseteq:}$ Нека је $y \in f(\partial X)$, тј. $y = f(x)$, $x \in \partial X$.

Показујемо $y \in \partial Y$.

Птс. $y \notin \partial Y$, тј. $(\exists V \in \mathcal{O}(y) \cap \mathcal{T}_Y)\ V \simeq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X$ и $\underset{\text{хомео.}}{f^{-1}(V)} \simeq V \simeq \mathbb{R}^n$ $\lightning$

(јер $x \in \partial X$).

Дакле, $y \in \partial Y$.

$\boxed{\supseteq:}$ Нека је $y \in \partial Y$. f је хомеоморфизам, па постоји $x \in X$ т.д. $f(x) = y$. Да ли је $x \in \partial X$?

Птс. $x \notin \partial X \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X)\ U \simeq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(U) \simeq \mathbb{R}^n$ је отворена околина од y $\lightning$

(јер $y \in \partial Y$).

Дакле, $x \in \partial X$, па је $y \in f(\partial X)$. $\blacksquare$

последица $X \approx Y \Rightarrow \partial X \approx \partial Y$.

дефиниција Пресликавање $f: X \to Y$ је локални хомеоморфизам ако за свако $x \in X$ постоји отворена околина U од x т.д. f слика U хомеоморфно на $f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

пример (1) f хомеоморфизам $\Rightarrow$ f је локални хомео.

(2) $f: \mathbb{R} \to S^1$ дато са $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ је локални хомео., али није хомео.

$\boxed{2.}$ Да ли је

(а) $C \approx M$? (б) $\operatorname{int} C \approx \operatorname{int} M$?

решење граница многострукости

(а) $\underset{S^1 \sqcup S^1}{\underset{\parallel}{\partial C}} \not\approx \underset{S^1}{\underset{\parallel}{\partial M}} \Rightarrow C \not\approx M$

(б) Ово су мнот. без границе, па не може као код (а).

пгс. $\operatorname{int} C \approx \operatorname{int} M \Longrightarrow (\operatorname{int} C)^* \approx (\operatorname{int} M)^*$ Александровљева компактификација

$(\operatorname{int} C)^* \approx$  уштинута сфера — није мнот.

$(\operatorname{int} M)^* \approx$  $=$  $= \mathbb{R}P^2$ — јесте мнот. ↯ $\Rightarrow \operatorname{int} C \not\approx \operatorname{int} M$ ∎

Дефиниција Многострукост X је затворена ако је компактна и без границе.

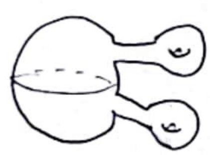
Сада конструишемо неке повезане затворене површи (тј. мног. димензије 2).

$M_0 \stackrel{def}{=} S^2$

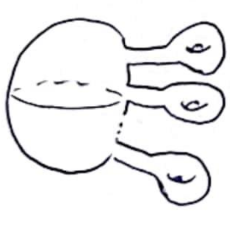
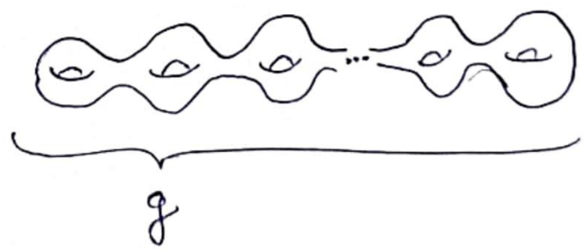
$\boxed{M_g}$ - добијамо тако што са сфере Mo скинемо диск и залепимо  на g места

торус

$M_1 =$  $\approx$  $= T^2$

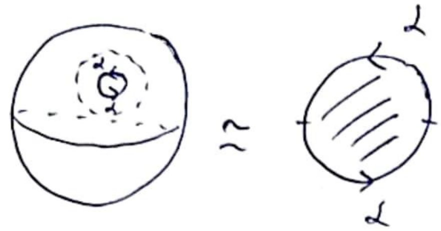
$M_2 =$  $\approx$ 

$\vdots$

$M_g =$  $\Big\} g \approx$ 

$\boxed{N_h}$ - добијамо тако што са сфере Mo скинемо диск и залепимо  на h места

Мебијусова трака

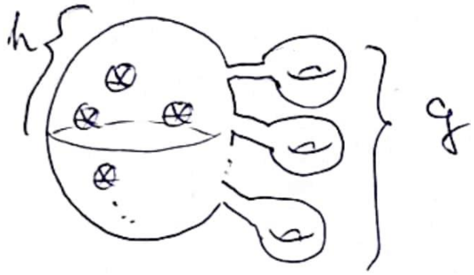
$N_1 =$  $= \mathbb{R}P^2$

$N_2 =$ 

$\vdots$

$N_h =$ 

$\boxed{H_{g,h}}$ - на S^2 залепљено g торуса и h Мебијусових трака на сличан начин.



Површ P је оријентабилна ако има 2 стране.

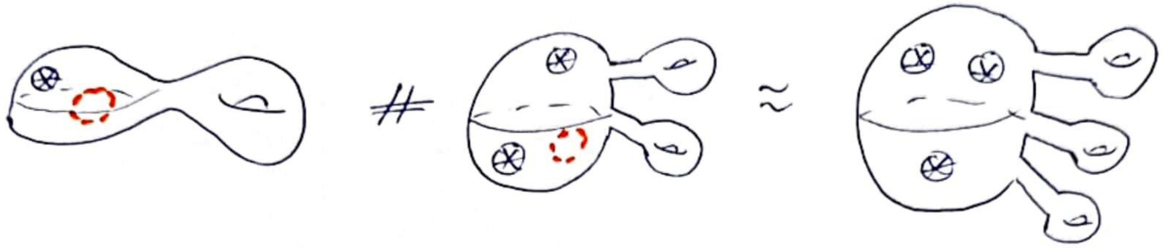
M_g су оријентабилне, N_h су неоријентабилне.

Дефинишемо операцију $\#$ на површима

повезана сума

Са обе површи скинемо по један мали диск и залепимо их по хомеоморфизму граница:

нпр.



је комутативна и асоцијативна (до на хомео.)

$$M_{g_1} \# M_{g_2} \approx M_{g_1+g_2}$$

$$N_{h_1} \# N_{h_2} \approx N_{h_1+h_2}$$

$$H_{g_1,h_1} \# H_{g_2,h_2} \approx H_{g_1+g_2,\, h_1+h_2}$$

S^2 је неутрал за #.

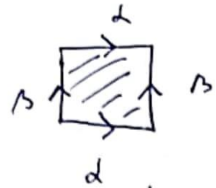
Количнички модели у равни

Већ знамо моделе за $M_1 = T^2$ и $N_1 = \mathbb{R}P^2$, а помоћу

$$M_g = \underbrace{M_1 \# M_1 \# \cdots \# M_1}_{g}$$

$$N_h = \underbrace{N_1 \# N_1 \# \cdots \# N_1}_{h}$$

добијемо количничке моделе за све M_g и N_h.

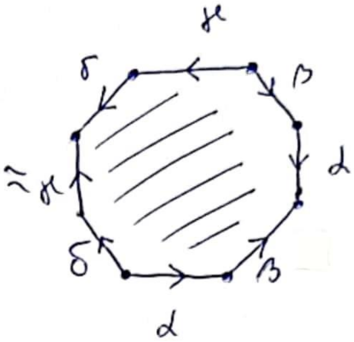
$M_1 = T^2 =$ 

M_1 без диска: 

$\approx$ 

$M_2 = M_1 \# M_1 \approx$ 

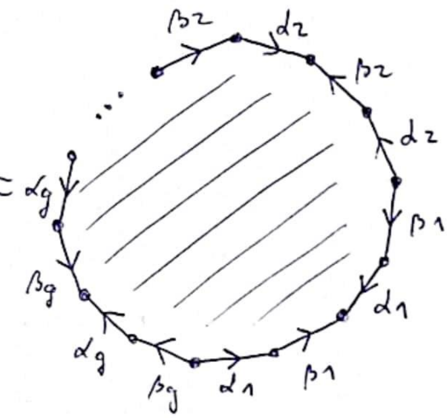
$\cup_f$ 

$\approx$ 

$\boxed{f \text{ је хомео. граница}}$

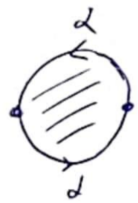
$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\mu\delta\mu^{-1}\delta^{-1}$

Слично

$M_g \approx \underbrace{M_1 \# M_1 \# \cdots \# M_1}_{g} \approx$ 

$\boxed{\text{4g ивица, 2g идентификација}}$

$\boxed{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}}$

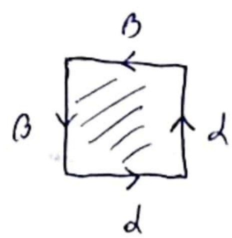
$N_1 \approx \mathbb{R}P^2 =$ 

N_1 без диска: 

$\approx$ 

$N_2 = N_1 \# N_1 \approx$ 

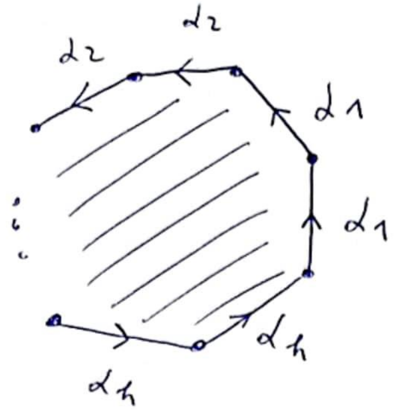
$\cup_f$ 

$\approx$ 

$\approx K$

Слично

$N_h = N_1 \# N_1 \# \cdots \# N_1 \approx$



$\boxed{2h \text{ ивица}, \; h \text{ идентификација}}$

$\boxed{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2}$

Теорема [о класификацији површи] Нека је X повезана затворена површ. Тада

(1) ако је X оријентабилна, онда

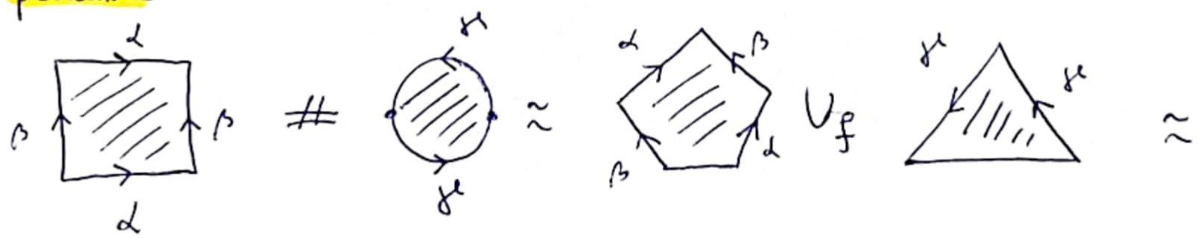
$$(\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g \,;$$

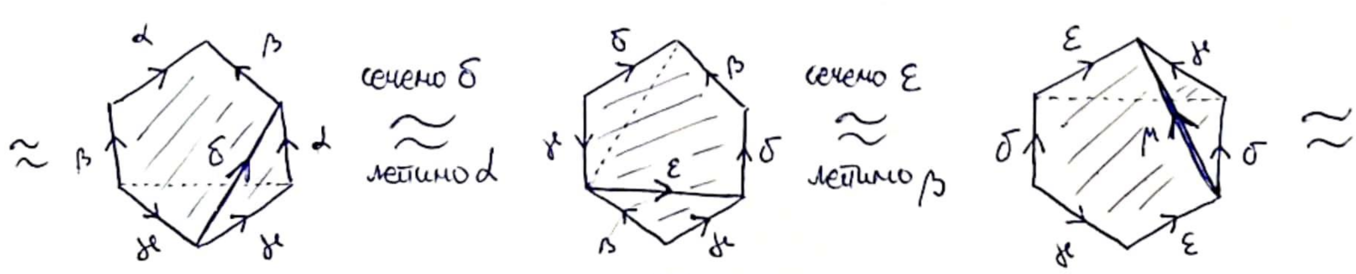
(2) ако је X неоријентабилна, онда

$$(\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h .$$

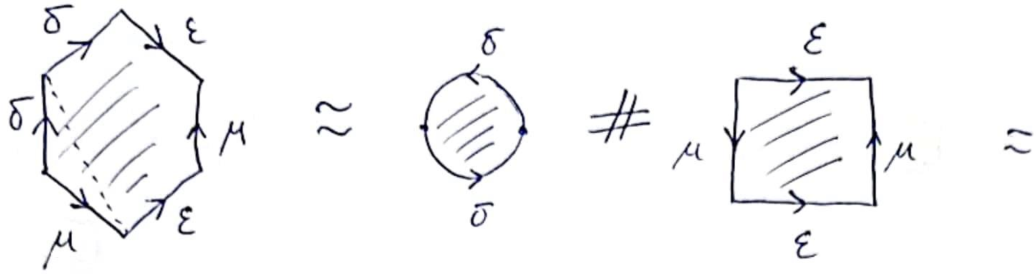
$\boxed{1.}$ Доказати $M_1 \# N_1 \approx N_3$

решење





сечењем
≈
лепљење



$\approx \mathbb{R}P^2 \# K = N_1 \# N_2 \approx N_3$ ■

2. $M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$, за све $g \in \mathbb{N}_0, h \in \mathbb{N}$.

решење Индукција по g:

база индукције:

$g=0$ ✓

$g=1$: показујемо $M_1 \# N_h \approx N_{2+h}$

индукција по h:

база индукције: $h=1$ ✓ (зад. 1.)

индукцијска хипотеза: $M_1 \# N_h \approx N_{2+h}$

индукцијски корак:

$M_1 \# N_{h+1} \approx \underbrace{M_1 \# (N_h \# N_1)} \approx N_{2+h} \# N_1 \approx N_{2+h+1}$

индукцијска хипотеза: $M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$

индукцијски корак:

$M_{g+1} \# N_h \approx M_1 \# M_g \# N_h \overset{\text{и.х.}}{\approx} M_1 \# N_{2g+h} \overset{\text{б.и.}}{\approx} N_{2(g+1)+h}$.

■

Специјално, $H_{g,h} = M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$.

Деф дефиниција: Род површи је највеће d т.д. постоји d дисјунктних затворених кривих $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d \subset X$ т.д. је $X \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \gamma_i$ повезан.

S^2 је рода 0, T^2 рода 1, M_g рода g, N_h рода h.

Ојлерова карактеристика:

$$\chi(X) = \underbrace{t}_{\text{бр. темена}} - \underbrace{i}_{\text{бр. ивица}} + \underbrace{p}_{\text{бр. страна}}$$

M_g : 1 теме, $2g$ ивица, 1 страна $\Rightarrow$ $\boxed{\chi(M_g) = 2-2g}$

N_h : 1 теме, h ивица, 1 страна $\Rightarrow$ $\boxed{\chi(N_h) = 2-h}$

χ је тополошка инваријанта.

3. Одредити тип површи

(а)  ; (б) 

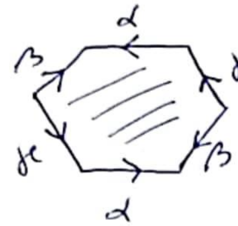
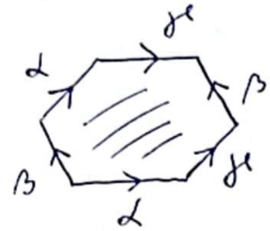
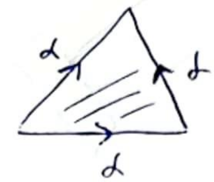
решење

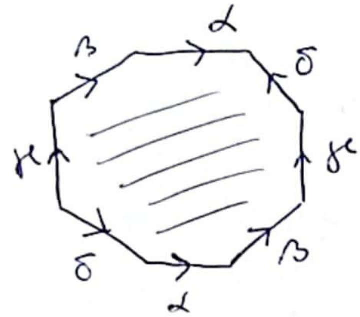
(а) $H_{3,2} \simeq N_{3\cdot 2+2} = N_8$

(б) није површ јер тачке на α имају околину:

 $\not\cong \operatorname{int} D^2$. ∎

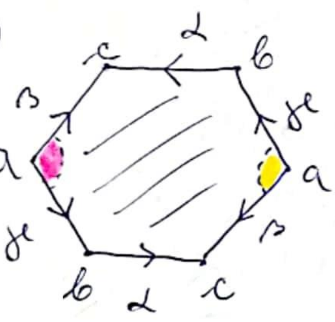
4. Одредити тип површи

(а)  (б)  (в) 

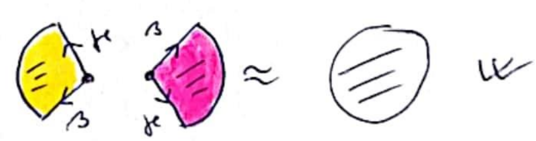
(г) 

решење

Увек прво проверимо да ли је дата површ (да ли свака тачка има околину хомеоморфну отвореном диску).

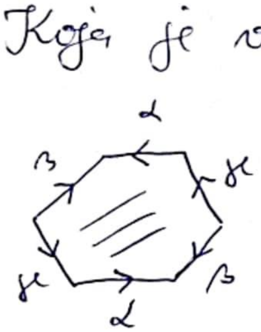
(а) 

околина од a:

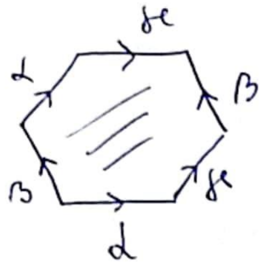


и слично се провери за остале тачке (нећемо то детаљно проверавати већ „у глави").

Која је ово површ?

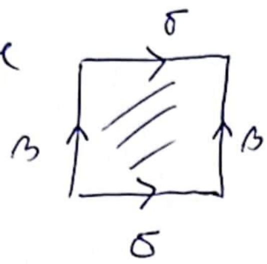
 $\delta := \alpha\beta^{-1}\gamma$ $\approx$  $= \mathbb{R}P^2$.

(б) јесте површ



$\delta := \alpha\varkappa$

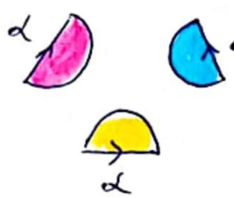
$\simeq$



$\simeq T^2$

(в) није површ

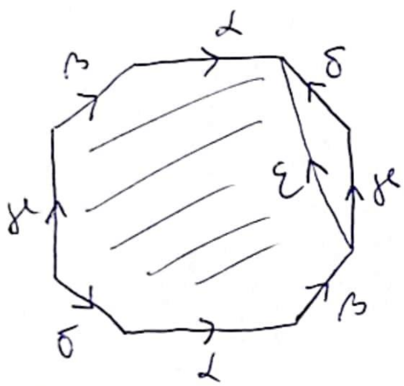
околина од a:



$\simeq$

$\not\simeq \operatorname{int} D^2$

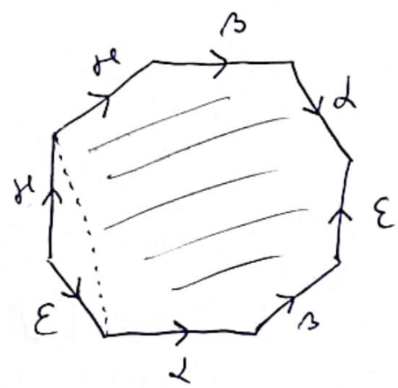
(г) јесте површ



сечено ε

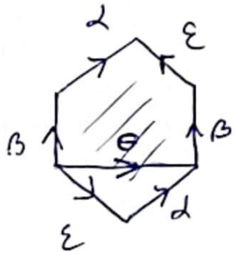
$\simeq$

лепљено δ



$\simeq$

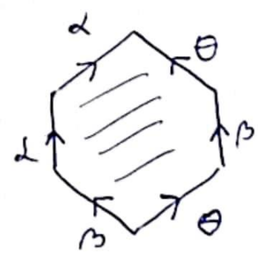
$\simeq$ 

$\#$ 

сечено θ

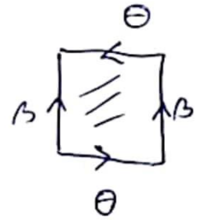
$\simeq$

лепљено ε

$N_1 \#$ 

$\simeq$

$\simeq N_1 \#$ 

$\#$ 

$\simeq N_1 \# N_1 \# N_2 \simeq N_4$. ■

Дејство група

Нека је G група и X скуп. Дејство G на X можемо дефинисати на више начина.

1. начин: Дејство је хомоморфизам $\varphi : G \to S_X$,

где је $S_X = \{ f : X \to X \mid f \text{ је бијекција} \}$

ознака: $\varphi_g := \varphi(g)$

2. начин: Дејство је пресликавање $\mu : G \times X \to X$ т.д.

(1) $(\forall g_1, g_2 \in G)(\forall x \in X)\ \mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$

(2) $(\forall x \in X)\ \mu(e, x) = x$ ($e \in G$ неутрал)

Пишемо: $\mu(g, x) = g \cdot x$.

Дејство индукује релацију еквиваленције $\sim$ на X:

$$x \sim y \overset{def}{\iff} (\exists g \in G)\ y = g \cdot x$$

Орбита од $x \in X$ је $\Omega_x \overset{def}{=} \{ g \cdot x \mid g \in G \}$ (класа екв.)

Дејство је слободно ако за све $g \in G \setminus \{e\}$ важи

$(\forall x \in X)\ g \cdot x \neq x$ (тј. φ_g нема фиксних тачака)

Дејство групе G на тополошки простор X је хомоморфизам $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$

$\boxed{\text{сви хомеоморфизми из } X \text{ у } X}$

$X/G \overset{def}{=} X/_\sim$ је простор орбита.

$\boxed{1.}$ Доказати да је са $\mu(k,z) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot z$ дато дејство групе $\mathbb{Z}_n$ на

(а) S^1;

(б) D^2;

и одредити њихове просторе орбита као и да ли су ова дејства слободна.

решење

(а) (1) $\mu(k, \mu(l,z)) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot \left(e^{i\frac{2l\pi}{n}} \cdot z\right) =$

$$= e^{i\frac{2(k+_n l)\pi}{n}} \cdot z = \mu(k +_n l, z)$$

$+_n$ је сабирање у $\mathbb{Z}_n$

(2) $\mu(0,z) = e^0 \cdot z = z$

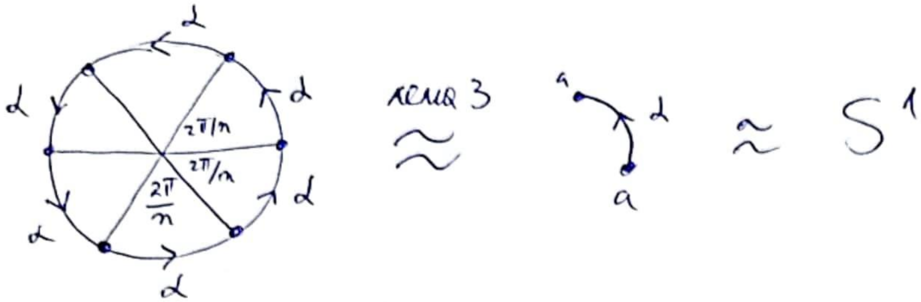
$\Rightarrow$ μ јесте дејство.

Да ли је слободно?

За $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, φ_k је ротација за $\frac{2k\pi}{n}$, а то нема фиксних тачака (јер се ротира S^1).

$\Rightarrow$ јесте слободно.

Шта је $S^1/\mathbb{Z}_n$?



Дакле, $S^1/\mathbb{Z}_n \approx S^1$.

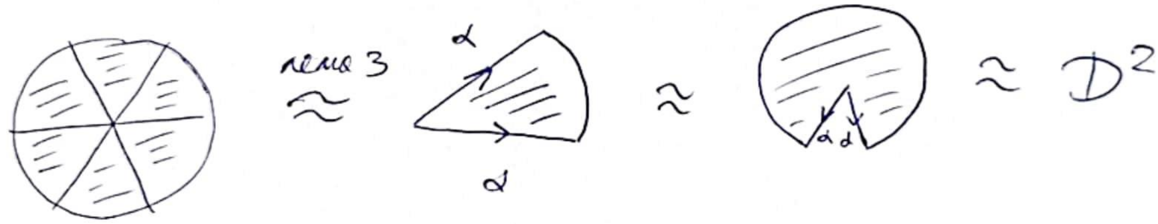
(б) μ јесте дејство (као под (а))

Да ли је слободно?

Свака ротација диска фиксира центар диска, тј.

$(\forall k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})\ \mu(k, 0) = 0 \Rightarrow$ није слободно.

Шта је $D^2/\mathbb{Z}_n$?



Дакле, $D^2/\mathbb{Z}_n \approx D^2$. $\square$

$\boxed{2.}$ Нека је $C = S^1 \times [-1,1]$ и $\mu : \mathbb{Z}_2 \times C \to C$ дато са

$\mu(k, (z,t)) = (-1)^k (z,t)$.

Доказати да је μ дејство и одредити $C/\mathbb{Z}_2$.

решење

$\varphi_0 = \mathbb{1}_C$, $\varphi_1 = a_C$ – централна симетрија (антиподално пресл.)

Да ли је φ хомоморфизам?

$$\varphi(k_1+k_2)(x) \overset{?}{=} (\varphi_{k_1}\circ\varphi_{k_2})(x)$$

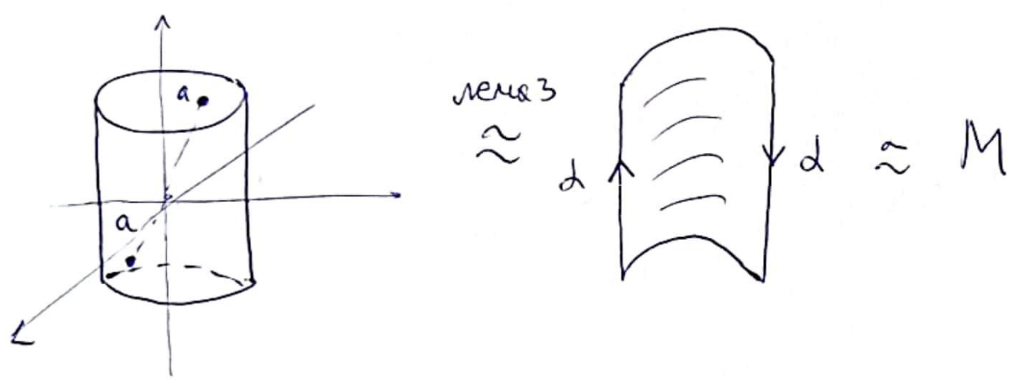
1° $k_1=0$ или $k_2=0$ ✓

2° $k_1=k_2=1$

$$\varphi(1+1)(x) = \varphi(0)(x) = \mathbb{1}_C(x) = (a_C\circ a_C)(x) = (\varphi_1\circ\varphi_1)(x) \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ φ јесте дејство.

Шта је $C/\mathbb{Z}_2$?



Дакле, $C/\mathbb{Z}_2 \approx M$. □

3. Нека је p прост, X тополошки простор и $\varphi : X \to X$ хомеоморфизам. Група $\mathbb{Z}_p$ дејствује на X и дејство је дато са $k \longmapsto \varphi^k$, $k \in \mathbb{Z}_p$.

Доказати да је ово дејство слободно ако и само ако φ нема фиксних тачака.

решење Како изгледа дејство:

$$1 \longmapsto \varphi$$

$$2 \longmapsto \varphi \circ \varphi = \varphi^2$$

$$3 \longmapsto \varphi^3$$

$$\vdots$$

$$p-1 \longmapsto \varphi^{p-1}$$

$$0 = p \longmapsto \varphi^p = \mathbb{1}_X$$

$\Longrightarrow$: тривијално важи (по деф. слободног дејства)

$\Longleftarrow$: Показујемо $(\forall k \in \mathbb{Z}_p)$ φ^k нема фиксних тачака

птс. нека φ^k има ф.т. тј. $\varphi^k(x) = x$ за неко $x \in X$ и $k \in \{2, 3, \dots, p-1\}$. Како је p прост, постоји $l \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ т.д. $k \cdot l \equiv_p 1$.

Сада је

$$\varphi(x) = \varphi^{k \cdot l}(x) = (\varphi^k)^l(x) = \underbrace{\varphi^k(\overbrace{\varphi^k(\dots(\overbrace{\varphi^k(x)}^{x})))}^{x})}_{l} = x \ \lightning$$

јер φ нема ф.т. Дакле, дејство је слободно. $\blacksquare$

$\boxed{4.}$ Нека је $\mu : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$\mu((k,l),(x,y)) = (k+x,\ l+y).$$

Доказати да је μ дејство групе $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}^2$ и одредити $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

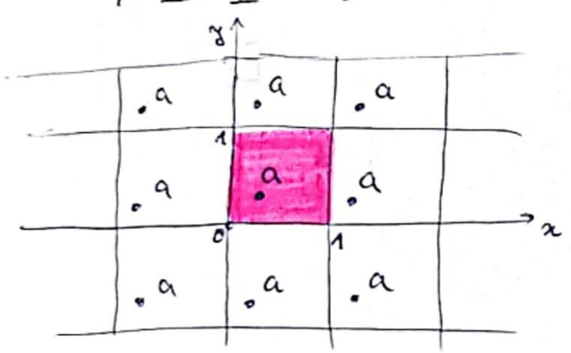
решење $0, i, j, k, l \in \mathbb{Z}$, $x, y \in X$

(1) $\mu\big((i,j), \mu((k,l),(x,y))\big) = \mu\big((i+k, j+l), (x,y)\big)$

(2) $\mu\big((0,0),(x,y)\big) = (x,y)$

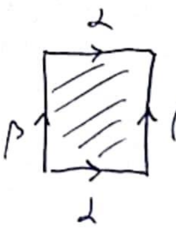
(1) + (2) $\Rightarrow$ јесте дејство (и слободно је)

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = ?$



$\sim$ је рестрикција релације на $[0,1]^2$

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \overset{\text{Лема 3}}{\approx} [0,1]^2/\sim \ \approx$$

$\approx$  $= T^2$ $\blacksquare$

Хомотопија

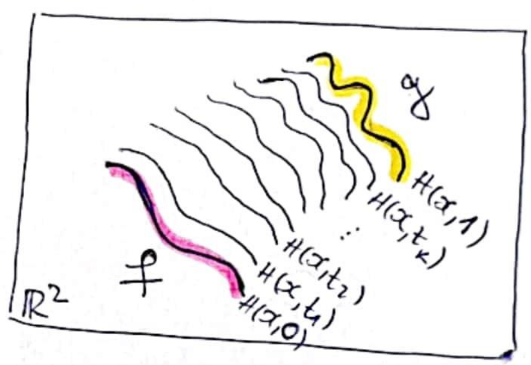
дефиниција Нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања. Пресликавање f је хомотопно са g (ознака $f \simeq g$) ако постоји непрекидно $H : X \times I \longrightarrow Y$ т.д.

$$(\forall x \in X) \; H(x,0) = f(x), \; H(x,1) = g(x).$$

$\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$

пример $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ тј. f и g су путеви и $f \simeq g$, што записујемо овако:

ови „међупутеви" су $H(x,t)$ за фиксирано $t \in I$ ($H(\cdot,t)$ је пут)



Дакле, хомотопија нам непрекидно „претвара" једну функцију у другу.

став Нека су $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$, $f_1 \simeq f_2$ и $g_1 \simeq g_2$, онда је $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

дефиниција Нека су X и Y тополошки простори. X и Y су хомотопски еквивалентни ако постоје $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ т.д. $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$, $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

Тада пишемо $X \simeq Y$.

- $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$ (обрнуто не важи, нпр. $\mathbb{R} \simeq *$)

деф Дефиниција: Тополошки простор X је контрактибилан ако је $X \simeq *$.

Шта то тачно значи:

$$X \simeq * \iff X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} * \quad \text{т.д.} \quad \varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_* \ \text{ и } \ \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$$

$\varphi : X \to *$, па је $\varphi = c_*$ па очигледно $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_*$

Услов $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$ у ствари каже

$$\mathbb{1}_X \simeq \psi \circ \varphi = \psi \circ c_* = c_{\psi(*)}$$

Закључак: $X \simeq * \iff (\exists x_0 \in X)\ \mathbb{1}_X \simeq c_{x_0}$

пр пример $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $H : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$H(x,t) \overset{\text{def}}{=} t \cdot x \quad \text{- јесте непр.}$$

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= 0 \\ H(x,1) &= x = \mathbb{1}_X(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow H : \mathbb{1}_X \simeq c_0 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq *$$

Теорема $X \simeq * \Rightarrow X$ је путно повезан.

доказ: $X \simeq * \Leftrightarrow \mathbb{1}_X \simeq c_{x_0}$

Нека је $H: \mathbb{1}_X \simeq c_{x_0}$. Тада $H(x,0) = x$, $H(x,1) = x_0$,

па је $u(t) := H(x,t)$, $u: I \to X$ пут од x до x_0.

Како свако $x \in X$ можемо спојити путем са x_0,

X је путно повезан. ■

- Ако је X путно повезан, онда $(\forall x_1, x_2 \in X)\ c_{x_1} \simeq c_{x_2}$.

$\boxed{1.}$ Нека су $f, g: X \to Y$, $Y \simeq *$. Доказати да је $f \simeq g$.

решење

$\boxed{c_{y_0}: Y \to Y}$

$Y \simeq * \Leftrightarrow H: \mathbb{1}_Y \simeq c_{y_0}$, $H: Y \times I \to Y$

Нека је $G: X \times I \to Y$ дато са

$$G(x,t) \overset{def}{=} H(f(x), t)$$

G је непр. и $G(x,0) = H(f(x), 0) = f(x)$, $G(x,1) = H(f(x), 1) = y_0$

$\Rightarrow G: f \simeq c_{y_0}$ $\boxed{c_{y_0}: X \to Y}$

слично $g \simeq c_{y_0}$, па $f \simeq g$. ■

$\boxed{2.}$ Нека су $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ непр. Тада $f \simeq g$.

решење

$H : f \simeq g$ је дато са $H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)$.

(исто решење пролази и за $A \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан и $f, g : X \to A$) $\square$

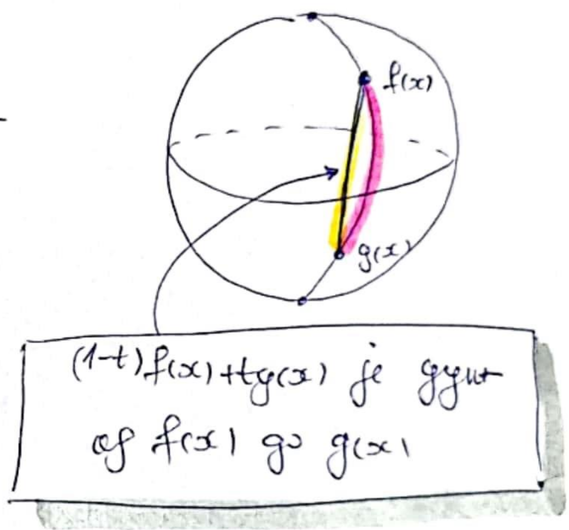
$\boxed{3.}$ Нека су $f, g : X \to S^n$ непр. и $(\forall x \in X)\ f(x) \neq -g(x)$.

Доказати да је $f \simeq g$.

решење

Нека је $H : X \times I \to S^n$ дато са

$$H(x,t) \overset{\text{df}}{=} \frac{(1-t)f(x) + t\,g(x)}{\|(1-t)f(x) + t\,g(x)\|}$$



Због услова да је $f(x) \neq -g(x)$, $H(x,t)$ је добро деф. (јер $\|\cdots\|$ никад није 0) и H је непр.

$$H(x,0) = \frac{f(x)}{\underbrace{\|f(x)\|}_{=1}} = f(x), \quad H(x,1) = \frac{g(x)}{\underbrace{\|g(x)\|}_{=1}} = g(x)$$

$\Rightarrow H : f \simeq g$. $\square$

последица Ако је $f : S^m \to S^n$ непр. и нема фиксних тачака, онда је $f \simeq a_{S^n}$ ($a_{S^n}(x) = -x$, $x \in S^n$).

$\boxed{4.}$ $2 \nmid n \Rightarrow \mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}$ ← Важи и обрнуто и ради се у алгебарској топологији

решење

$n = 1$:

$H : S^1 \times I \to S^1$

$H(z,t) \overset{def}{=} e^{i\pi t} \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}$

$\mathbb{1}_{S^n}$ - ротација за $0°$

a_{S^1} - ротација за $180°$

$$\left.\begin{array}{l} H(z,0) = z = \mathbb{1}_{S^1}(z) \\ H(z,1) = -z = a_{S^1}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow H : \mathbb{1}_{S^1} \simeq a_{S^1}$$

Генерално за $n > 1$, $2 \nmid n$:

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\overset{\Psi}{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}) \quad и \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{\frac{n+1}{2}}|^2 = 1$$

$H : S^n \times I \to S^n$ је дато са

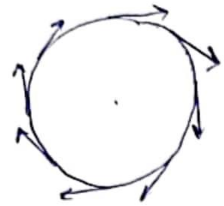
$$H\left((z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}), t\right) = e^{i\pi t} \cdot (z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}) \in S^n.$$

$\Rightarrow H : \mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}$. ■

Теорема [о чешљању јежа / о чупавој лопти / hairy ball th.]

$2 \mid n \Leftrightarrow$ на сфери S^n не постоји ненулто непрекидно тангентно векторско поље.

Илустрација:



S^1 се може „очешљати"

S^2 се не може „очешљати"

деф дефиниција За $f: X \to Y$ кажемо да је хомотопски тривијално ако је $f \simeq const.$

СТАВ ~~став~~ Нека су $f: X \to Y$ непр. Тада

$f \simeq const \iff f$ се може непрекидно проширити на CX.

доказ

f се проширује на CX значи да постоји

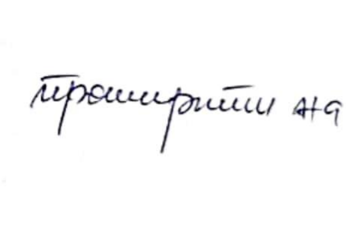
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ CX \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$F: CX \to Y$ тј. дијаграм комутира.

подсетник: $CX = X \times I /_{(x_1,1) \sim (x_2,1)}$

$X \hookrightarrow CX$

$x \longmapsto [(x,0)]$



$\Rightarrow$: $H: f \simeq c_{y_0}$, $\quad H: X\times I \to Y$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ (x,0) & X\times I \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, "H"] & CX \arrow[u, dashed, "F"'] \end{tikzcd}$$

Нека је $F: CX \to Y$ дато са

$$F([x,t]) \overset{def}{=} H(x,t)$$

- F добро деф.?

  једине проблематичне класе су $[(x_1,1)] = [(x_2,1)]$,

  али $H(x_1,1) = y_0 = H(x_2,1)$

- F непрекидно?

  $F\circ\pi = H$, π је количничко, H непр. $\overset{\text{лема } 1}{\Longrightarrow}$ F је непр.

$\Rightarrow$ F је тражено проширење.

$\Leftarrow$: Нека је $F: CX \to Y$ т.д. $F|_X = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X\times I \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, dashed, "H"] & CX \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Дефинишемо $H: X\times I \to Y$

$$H(x,t) \overset{def}{=} (F\circ\pi)(x,t) = F([x,t])$$

H је непр.

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= (F\circ\pi)([x,0]) = f(x) \\ H(x,1) &= F([x,1]) = y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \simeq c_{y_0}. \quad \blacksquare$$

последица $X \simeq * \iff \mathbb{1}_X$ се може продужити на CX.

последица $f : S^n \to Y$ је хомотопски тривијално акко

$(\exists \bar{f} : D^{n+1} \to Y)\ \bar{f}|_{S^n} = f$. $(CS^n = D^{n+1})$

5. Ако је $f : X \to Y$ непр. и факторише се кроз контрактибилан простор, онда је $f \simeq \text{const}$.

решење

Имамо: $f = h \circ g$ и $Z \simeq *$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, bend left, "\varphi"] & * \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \varphi \circ \psi = \mathbb{1}_* \\ \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_Z \end{array}$$

$$f = h \circ g = h \circ \mathbb{1}_Z \circ g \simeq h \circ \psi \circ \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{const}}}{\varphi} \circ g = \text{const}$$

$\Rightarrow f \simeq \text{const}$. $\square$

6. Нека је $f : X \to S^n$ непр. и није „на". Тада је $f \simeq \text{const}$.

решење Нека је $y_0 \in S^n \setminus f(X)$ и нека је

$\tilde{f} : X \to S^n \setminus \{y_0\}$, $\tilde{f}(x) := f(x)$ (смањили смо кодомен).

Имамо:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & & S^n \\ & S^n \setminus \{y_0\} \simeq \mathbb{R}^n \simeq * \arrow[ur] & \end{tikzcd} \xRightarrow{\text{зад. } 5} f \simeq \text{const}$$

II начин: користимо зад. 3 стр. 41.

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \neq y_0 = -(-y_0) = -c_{-y_0}(x)$$

$$\overset{\text{зад3.}}{\Longrightarrow} \quad f \simeq c_{-y_0} . \quad \blacksquare$$

$\boxed{7.}$ Нека је X тополошки простор, $A \subseteq X$, $H : X \times I \to X$ непр. т.д.

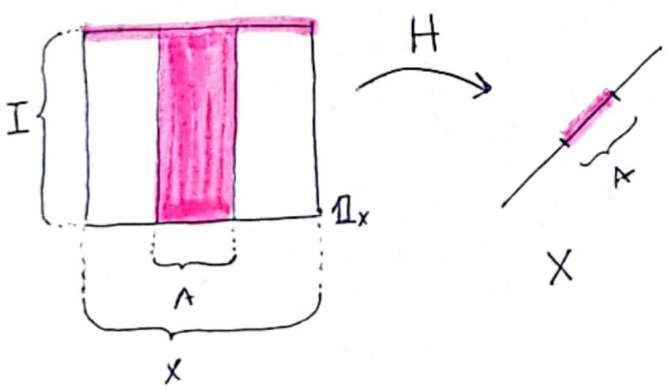
(1) $(\forall x \in X) \ H(x,0) = x$;

(2) $H(X \times \{1\}) \subseteq A$;

(3) $H(A \times I) \subseteq A$.

Доказати да је $i_A : A \to X$ хомотопска еквиваленција.

решење



Тражимо $\varphi : X \to A$ т.д. $\varphi \circ i_A \simeq 1_A$ и $i_A \circ \varphi \simeq 1_X$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i_A"] & X \arrow[l, bend left, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Нека је $\varphi(x) \overset{\text{деф}}{=} H(x,1) \underset{\text{због (2)}}{\in} A \Rightarrow \varphi : X \to A$

$$(i_A \circ \varphi)(x) = i_A(H(x,1)) = H(x,1)$$
$$H(x,0) \overset{(1)}{=} x = \mathbb{1}_X(x)$$
$$\Rightarrow H : \mathbb{1}_X \simeq i_A \circ \varphi$$

Још да ли је $\varphi \circ i_A \simeq \mathbb{1}_A$?

Нека је $G : A \times I \to A$ дато са

$$G(a,t) \overset{def}{=} H(a,t) \in A \quad \text{(због (3))}$$

$$G(a,0) = H(a,0) = a = \mathbb{1}_A(a)$$
$$G(a,1) = H(a,1) = \varphi(a) = (\varphi \circ i_A)(a)$$
$$\Rightarrow G : \mathbb{1}_A \simeq \varphi \circ i_A$$

$\Rightarrow$ i_A јесте хомотопска еквиваленција. ■

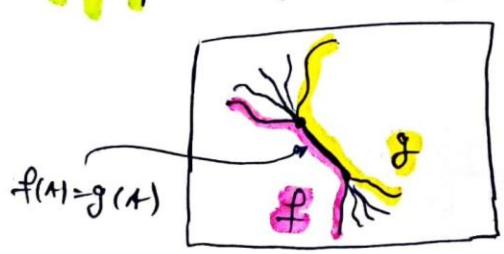
Деф дефиниција Нека су $f, g : X \to Y$ и $A \subseteq X$.

$f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ постоји непрекидно $H : X \times I \to Y$ т.д.

$$(\forall x \in X)\ H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x)$$
$$(\forall a \in A)(\forall s,t \in I)\ H(a,s) = H(a,t).$$

Специјално, $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A) \Rightarrow f|_A = g|_A$.

ПР пример $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A)$



f се помоћу H непрекидно транс-формише до g, али $f(A) = g(A)$ се не помера.

дефиниција: $A \subseteq X$ је ретракт од X ако постоји непрекидно $r: X \to A$ т.д. $r|_A = \mathbb{1}_A$, тј. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$, тј. комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

дефиниција: $A \subseteq X$ је деформациони ретракт од X ако постоји непрекидно $r: X \to A$ т.д. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$ и $i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X$.

дефиниција: $A \subseteq X$ је јаки (строги) деформациони ретракт од X ако постоји непрекидно $r: X \to A$ т.д. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$ и $i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X \ (\text{rel } A)$.

став: Ако је A деформациони ретракт од X, онда $A \simeq X$.

Ознаке: ДР = деформациони ретракт

ЈДР = јаки деформациони ретракт

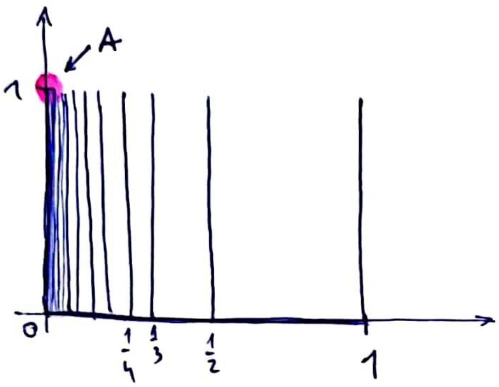
пример: * није ДР од S^1, али јесте ретракт од било ког простора (па и S^1).

Очигледно: ЈДР $\Rightarrow$ ДР $\Rightarrow$ ретракт

ПР пример Нека је X тополошки чешаљ:

$$X = \{0\}\times[0,1] \cup [0,1]\times\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\tfrac{1}{n}\}\times[0,1]$$

и $A = \{(0,1)\}$. Тада је A ДР од X, а није ЈДР од X.



јесте ДР: Н пројектује прво све на x-осу, па у коорд. почетак, па подигне до $(0,1)$

није ЈДР: Не можемо непрекидно „стаковати" X до A, а да A (тј. $(0,1)$), остане у месту. X је превише густ око $(0,1)$ да би могло то да се уради.

$\boxed{8.}$ Доказати да је

(а) D^n ЈДР од $\mathbb{R}^n$; $(\Rightarrow \mathbb{R}^n \simeq D^n \simeq *)$

(б) S^{n-1} ЈДР од $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $(\Rightarrow S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

решење Нека је $r: \mathbb{R}^n \to D^n$ дато са

$$r(x) = \begin{cases} x, & x\in D^n \\ \frac{x}{\|x\|}, & x \in \overline{\mathbb{R}^n\setminus D^n} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r|_{D^n} \text{ је непр.} \\ r|_{\overline{\mathbb{R}^n \setminus D^n}} \text{ је непр.} \end{array}\right\} \Rightarrow r \text{ је непрекидна}$$

(лема о лепљењу јер су D^n и $\overline{\mathbb{R}^n \setminus D^n}$ затворени)

$r \circ i_{D^n} = \mathbb{1}_{D^n}$ ✓

$i_{D^n} \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ (rel D^n) ?

Како је $\mathbb{R}^n \simeq *$, знамо да је $i_{D^n} \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$, али нама треба (rel D^n) па правимо хомотопију:

Нека је $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$H(x,t) = (1-t)\big(i_{D^n} \circ r\big)(x) + t x \quad \text{– непр.} ✓$$

$H(x,0) = (i_{D^n} \circ r)(x)$

$H(x,1) = x = \mathbb{1}_X(x)$

$$\underset{a \in D^n}{H(a,t)} = (1-t)\,\underbrace{i_{D^n}(\underbrace{r(a)}_{a})}_{a} + t a = (1-t)a + ta = a$$

$\Rightarrow (\forall s,t \in I)\ H(a,s) = a = H(a,t)$

$\Rightarrow H : i_{D^n} \circ r \simeq \mathbb{1}_X$ (rel A), па D^n јесте ЈДР од $\mathbb{R}^n$.

(б) Нека је $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ дато са

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{- непр.}$$

Очигледно $r \circ i_{S^{n-1}} = \mathbb{1}_{S^{n-1}}$.

Нека је $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ дато са

$$H(x,t) = (1-t)(i_{S^{n-1}} \circ r)(x) + t x. \quad \text{- непр.}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(x,0) = (i_{S^{n-1}} \circ r)(x) \\ H(x,1) = x = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x) \\ H(a,t) = a \end{array}\right\} \Rightarrow H : i_{S^{n-1}} \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

$a \in S^{n-1}$

$$\Downarrow$$

S^{n-1} је ЈДР од $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ■

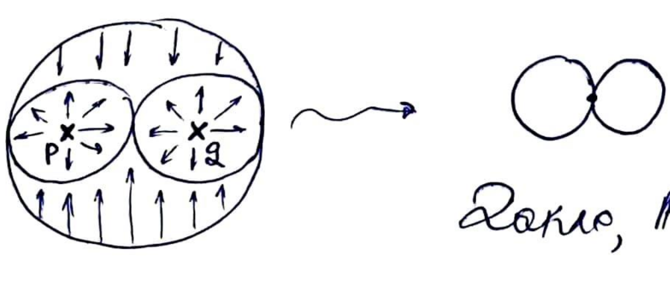
9. $\mathbb{R}^2 \setminus \{p,q\} \simeq \ ?$, $p \neq q$

решење

1. корак $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow D^2$ (D^2 је ЈДР од $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{p,q\} \simeq D^2 \setminus \{p,q\}$$

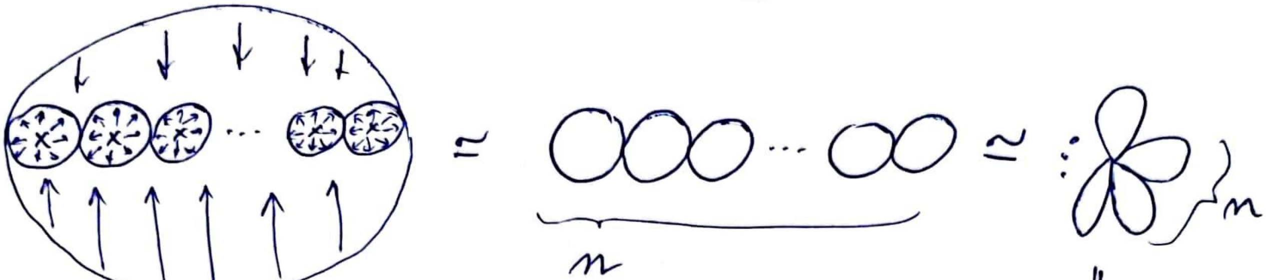
2. корак $D^2 \setminus \{p,q\} \rightsquigarrow S^1 \times S^1$



$= S^1 \vee S^1$

Дакле, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p,q\} \simeq S^1 \vee S^1$ ■

Слично, $|A| = n \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A \simeq \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$



$= \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$

дефиниција: Кажемо да је $p : E \to B$ фибрација, тј. да има својство подизања хомотопије (HLP = homotopy lifting property) ако <u>за сваки</u> тополошки простор X и свака два непр. пресл. F и f т.д. следећи дијаграм комутира, тј.

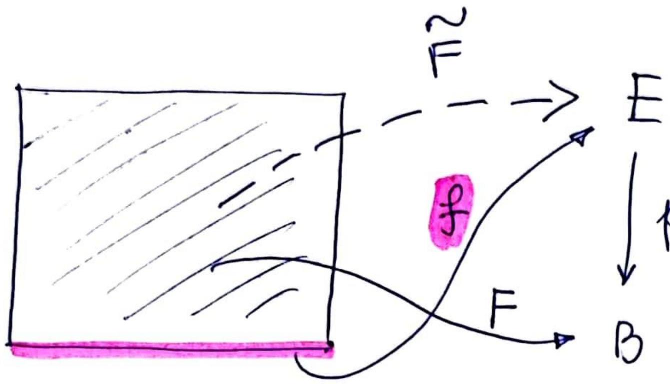
$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

$p \circ f = F \circ i$,

<u>постоји</u> $\tilde{F} : X \times I \to E$ т.д. комутирају оба троугла, тј.

$p \circ \tilde{F} = F$ и $\tilde{F} \circ i = f$. (Каже се и да је $\tilde{F}$ решење овог дијаграма).

Илустрација:



$X \times I$

важи: $(\forall x \in X)\ p(f(x)) = F(x,0)$

хоћемо: $p(\tilde{F}(x,t)) = F(x,t)$

$\tilde{F}(x,0) = f(x)$

$\boxed{10.}$ Ако је B путно повезан и $p: E \to B$ фибрација, онда је p „на".

решење Нека је $e_0 \in E$ произвољно и $b_0 = p(e_0)$.
Нека је $b \in B$ произвољно, тражимо шта се слика у b.
У дефиницији фибрације имамо слободу да бирамо X, F и f, па само треба пажљиво да их одаберемо.

B путно повезан $\Rightarrow$ $(\exists u : I \to B)\ u(0) = b_0,\ u(1) = b$.

Бирамо: $X = *$, $F : * \times I \to B$ дато са $F(*,t) = u(t)$

и $f : * \times \{0\} \to E$ т.д. $p(f(*,0)) = F(*,0) = u(0) = b_0$, па

нека је баш $f(*,0) := e_0$.

$$\begin{tikzcd}
* \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
* \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

комутира јер:

$$\begin{tikzcd}
(*,0) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\hookrightarrow"] & e_0 \arrow[d, "p"] \\
(*,0) \arrow[r, mapsto, "F"] & b_0
\end{tikzcd}$$

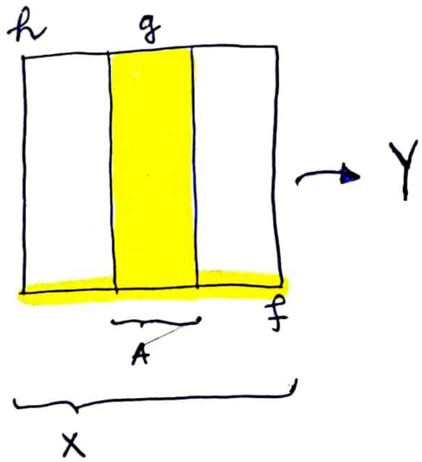
$\Rightarrow (\exists \tilde{F} : * \times I \to E) \quad p \circ \tilde{F} = F$ и $\tilde{F} \circ i = f$

Специјално, $b = u(1) = F(*,1) = p(\tilde{F}(*,1))$

$\Rightarrow$ $\tilde{F}(*,1)$ се слика у b $\Rightarrow$ p је „на" $\square$

дефиниција: Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. Кажемо да пар (X,A) има својство проширења хомотопије (HEP = homotopy extension property) ако за сваки тополошки простор Y и свако непр. пресл. $F : X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ постоји непр. $\bar{F} : X \times I \to Y$ т.д. $\bar{F}|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = F$.

мало детаљније: (X,A) има HEP ако



$$\underbrace{f: X \to Y,\ f|_A \simeq g,\ g: A \to Y}$$
$$\Downarrow$$
$$(\exists h : X \to Y)\ h \simeq f \text{ и } h|_A = g$$

$\boxed{11.}$ (X,A) има HEP $\Leftrightarrow$ $X\times\{0\}\cup A\times I$ је ретракт од $X\times I$.

решење $\Rightarrow$: Одаберимо $Y := X\times\{0\}\cup A\times I$ (Y из деф. HEP)

и $F := \mathbb{1} : X\times\{0\}\cup A\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I$.

$\overset{HEP}{\Longrightarrow} \left(\exists\, \overline{F} : X\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I\right)\ \overline{F}|_{X\times\{0\}\cup A\times I} = F = \mathbb{1}$,

тј. $\overline{F}$ је тражена ретракција.

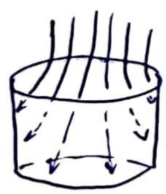
$\Leftarrow$: Нека је Y произвољан топ. пр. и

$F : X\times\{0\}\cup A\times I \to Y$ непр.

Имамо ретракцију $r : X\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I$.

Дефинишемо $\overline{F} := F\circ r$. Тада је $\overline{F}$ проширење хомотопије F па (X,A) има HEP. $\square$

пример (1) (D^2, S^1) има HEP јер је $D^2\times\{0\}\cup S^1\times I$ ретракт од $D^2\times I$.



(2) X - CW-комплекс, $A\subseteq X$ поткомплекс

$\Rightarrow$ (X,A) има HEP.

лема Нека је Y Хаусдорфов, B ретракт од Y, онда $B \in \mathcal{F}_Y$.

доказ Нека је $r: Y \to B$ ретракција. $i_B \circ r : Y \to Y$ је непр., па је $A := \{y \in Y \mid (i_B \circ r)(y) = y = \mathbb{1}_Y(y)\} \in \mathcal{F}_Y$ (јер је Y T_2). Показујемо $A = B$.

$\subseteq$: $a \in A \Rightarrow i_B(r(a)) = r(a) = a \in B$

$\supseteq$: $b \in B \Rightarrow i_B(r(b)) = i_B(b) = b \in A$ $\square$

$\boxed{12.}$ Ако је X Хаусдорфов и (X, A) има HEP, онда $A \in \mathcal{F}_X$.

решење $X \times \{0\} \cup A \times I$ је ретракт од $X \times I$ (зад. 11), па на основу леме је $X \times \{0\} \cup A \times I \in \mathcal{F}_{X \times I}$

$$\Rightarrow \underbrace{X \times \{1\} \cap (X \times \{0\} \cup A \times I)}_{A \times \{1\} \approx A} \in \mathcal{F}_{X \times \{1\}}$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_X$. $\square$

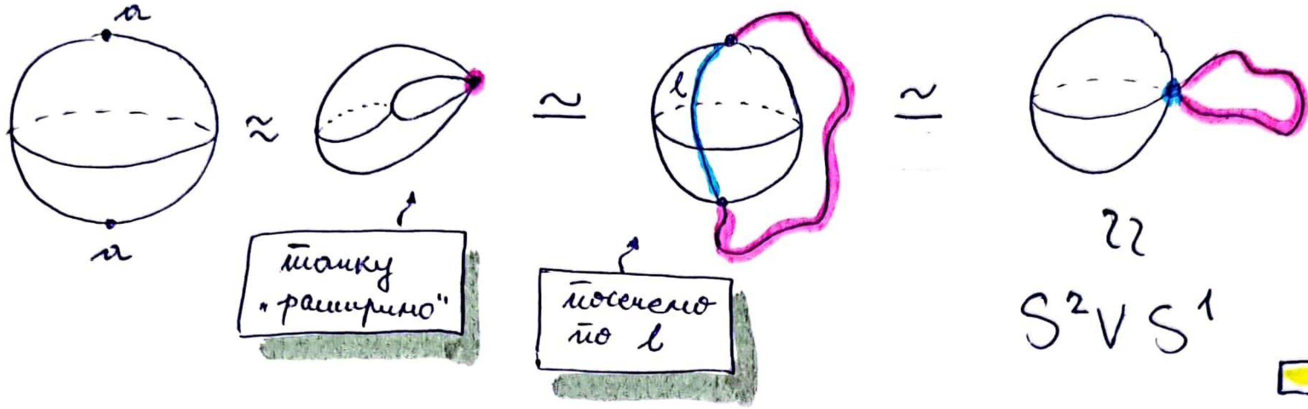
теорема Ако (X, A) има HEP и $A \simeq *$, онда $X \simeq X/A$.

корисно за интуицију

пр пример Комплекс и његов поткомплекс имају HEP.

13. $S^2/_{N\sim S} \simeq \ ?$ (N = северни пол, S = јужни пол)

решење



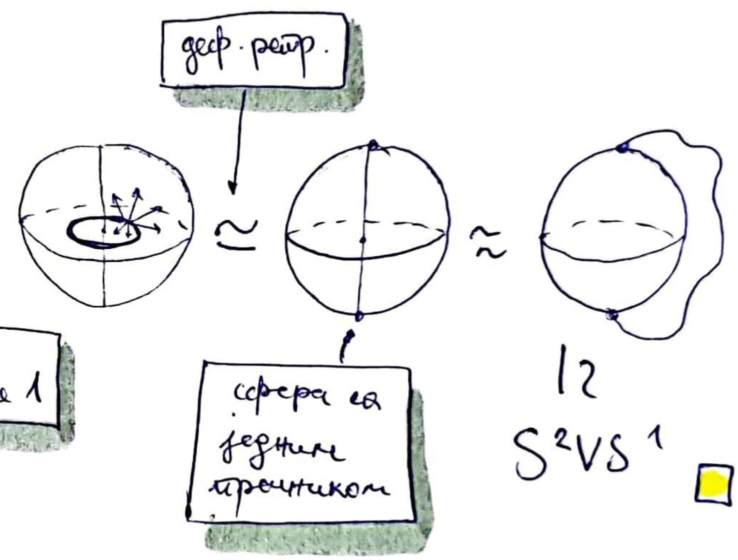
14. $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \simeq \ ?$

решење

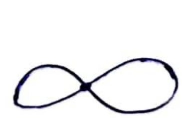
$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \overset{\text{деф. ретр}}{\simeq} D^3 \setminus S^1 \simeq$

диск полупречника већег од 1

сфера полупречника 1



За вежбу:

(1) $\mathbb{R}^3 \setminus$  $\simeq \ ?$ (2) $\mathbb{R}^3 \setminus$  $\simeq \ ?$

дефиниција: Кажемо да тополошки простор X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно пресликавање $f : X \to X$ има фиксну тачку.

теорема [Брауер] За свако $n \in \mathbb{N}$, D^n има СФТ.

- СФТ је тополошка инваријанта.
- Ако X има СФТ, онда је повезан.

$\boxed{15.}$ Нека X има СФТ и A је ретракт од X, онда и A има СФТ.

решење

Нека је $f : A \to A$ непр. и $r : X \to A$ ретракција.

уочимо композицију:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[rrr, bend right, dashed] & A \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

$i \circ f \circ r$ је непр. па има фиксну тачку, тј.

$$(\exists x_0 \in X)\ (i \circ f \circ r)(x_0) = x_0$$

$(f \circ r)(x_0) \in A$, па и $(i \circ f \circ r)(x_0) \in A$, тј. $x_0 \in A$.

Онда ова једнакост заправо постаје

$(i \circ f \circ r)(x_0) = \underbrace{f(x_0) = x_0}$, тј. A има СФТ. $\square$

16. Доказати да D^n има СФТ акко S^{n-1} није ретракт од D^n.

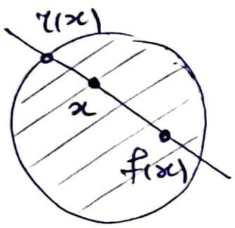
(Дакле, ово је еквивалент Брауерове теореме)

решење

$\Rightarrow$: птс. S^{n-1} је ретракт од D^n $\xRightarrow{\text{зад } 15}$ S^{n-1} има СФТ $\lightning$

нпр. $a_{S^{n-1}}: S^{n-1} \to S^{n-1}$ нема ФТ.

$\Leftarrow$: птс. D^n нема СФТ, тј. постоји непр. $f: D^n \to D^n$ тд. $(\forall x \in D^n)\ f(x) \neq x$. Правимо ретракцију $r: D^n \to S^{n-1}$!



$$r(x) = f(x) + t(x) \cdot (x - f(x))$$

↑ пресек праве кроз x и $f(x)$ са S^{n-1} (пресек ближи x)

Још да одредимо $t(x)$. (ради једноставности $t := t(x)$)

$$1 = \|r(x)\|^2 = \langle f(x) + t(x - f(x)), f(x) + t(x - f(x)) \rangle =$$

$$= \|f(x)\|^2 + t^2 \cdot \|x - f(x)\|^2 + 2t \langle x - f(x), f(x) \rangle$$

$$t_{1/2} = \frac{-2\langle x - f(x), f(x)\rangle \pm \sqrt{4\langle x - f(x), f(x)\rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2 (\|f(x)\|^2 - 1)}}{2 \cdot \|x - f(x)\|^2}$$

$t(x) := t_1(x)$ – јесте непр. и добро деф.

$\Rightarrow r: D^n \to S^{n-1}$ је ретракција $\lightning$ $\blacksquare$

Шта закључујемо из претходног задатка:

S^{n-1} није ретракт од D^n $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{S^{n-1}}$ се не проширује на $CS^{n-1}=D^n$ (јер би то била ретракција)

$\Rightarrow \mathbb{1}_{S^{n-1}} \not\simeq const$

$\Rightarrow S^{n-1} \not\simeq *$

$\boxed{17.}$ Ако је $f: S^2 \to S^2$ непр. и није „на", онда f има ФТ.

решење

1. начин f није „на" $\xRightarrow[\text{стр.45}]{\text{зад. 6}}$ $f \simeq const \Rightarrow$ проширује се на $CS^2 = D^3$, тј. $(\exists \tilde{f}: D^3 \to S^2)\ \tilde{f}|_{S^2} = f$.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^2 \arrow[r, hook] & D^3 \\ D^3 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[urr, dashed, bend right] & & \end{tikzcd}$$

$i \circ \tilde{f}: D^3 \to D^3$ је непр.

$\xRightarrow{\text{Брауер}} (\exists x_0 \in D^3)\ i(\underbrace{\tilde{f}(x_0)}_{\in S^2}) = x_0$

$\Rightarrow x_0 \in S^2$, па је $i(\tilde{f}(x_0)) = x_0$ у ствари $f(x_0) = x_0$.

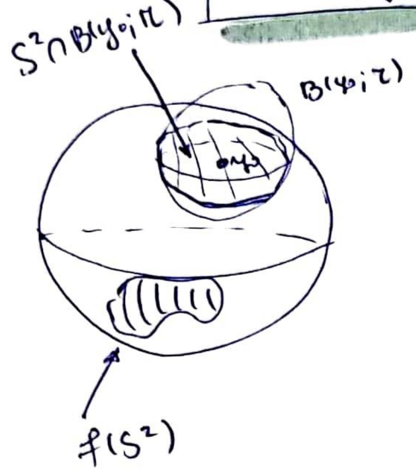
2. начин Нека је $y_0 \in S^2 \setminus f(S^2)$.

S^2 је компактан и f непр. $\Rightarrow f(S^2)$ је компактан и $f(S^2) \subseteq S^2$ који је T_2 $\Rightarrow f(S^2) \in \mathcal{F}_{S^2}$

$\Rightarrow S^2 \setminus f(S^2) \in \mathcal{T}_{S^2}$

$\Rightarrow (\exists\, r>0)\ B(y_0; r) \cap f(S^2) = \emptyset$

лопта у $\mathbb{R}^3$



Нека је $X := S^2 \setminus B(y_0; r) \approx D^2$

и $\bar{f}: X \to X$, $\bar{f}(x) = f(x)$.

Тада $\bar{f}$ има ФТ, па и

f има ФТ. $\square$

$\boxed{18.}$ Нека је $f: D^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и $(\forall x \in S^1)\ f(x) = x$.

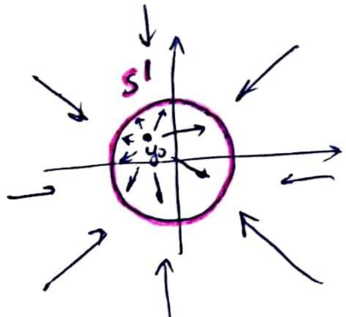
Доказати да је $D^2 \subseteq f(D^2)$.

Решење

пπс. $\exists\, y_0 \in D^2 \setminus f(D^2) \Rightarrow y_0 \notin S^1$ (јер би иначе било $f(y_0) = y_0$)

$\Rightarrow y_0 \in \operatorname{int} D^2$

Имамо ретракцију $r: \mathbb{R}^2 \setminus \{y_0\} \to S^1$, па је

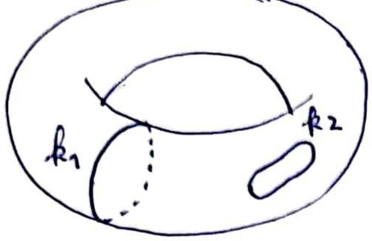


композиција

$$D^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{y_0\} \xrightarrow{r} S^1$$

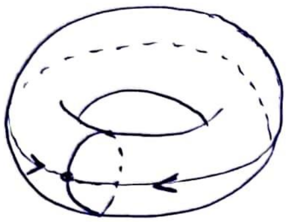
ретракција D^2 на S^1 ↯ $\square$

19. Да ли су кружнице k_1 и k_2 ретракти торуса?



решење

k_1 јесте ретракт:



$$r : S^1 \times S^1 \to \overset{k_1}{S^1} \times \{z_0\}$$

$$(t, z) \longmapsto (t, z_0)$$

k_2 није ретракт:

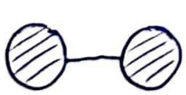
пс. $\exists\, r : T^2 \to k_2$ ретракција.

уочимо диск на торусу који садржи k_2.

Тада је $r|_D : D \to k_2$, $D \cong D^2$

ретракција диска на кружницу ↯ □

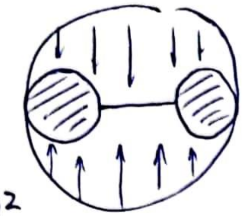
20. Испитати СФТ следећих простора

(а) X:  (б) Y:  (в) Z: 

(г) $C = S^1 \times I$; (д) M.

(а) X је ретракт од D^2, а D^2 има СФТ,

па и X има СФТ



D^2

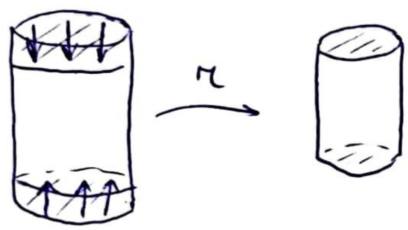
2. начин :

$A \vee B$ има СФТ $\Leftrightarrow$ A и B имају СФТ

X =  $\Rightarrow$ X има СФТ

имају СФТ

(б)

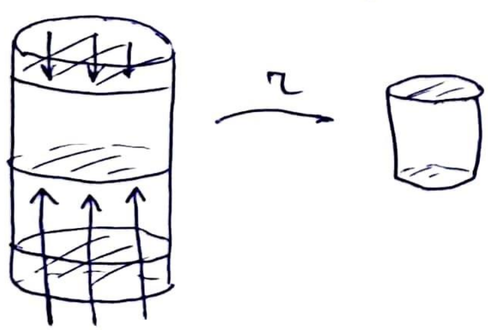
Y =  $\approx S^2$ нема СФТ, па

нема ни Y

пуни ваљак
са задебљаним
дисковима на
врху и дну

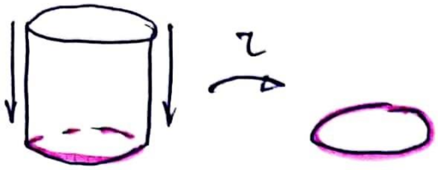
2. начин: Y је централно симетричан,
а не садржи центар симетрије па
нема СФТ (јер имамо антиподално
пресл. које нема ФТ.)

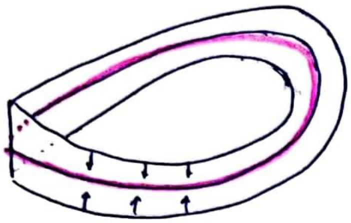
(в)

Z =  $\approx S^2$ нема СФТ па ни

Z нема СФТ

исто као Y
плус диск по
средини

(г)  $\simeq S^1$ нема СФТ, па ни C нема СФТ

(д)  $\xrightarrow{r} S^1$ нема СФТ, па ни M нема СФТ. □

21. X: 

до пола пуна S^2

Y: 

до пола пун T^2

Да ли X и Y имају СФТ? Да ли су ретракти пуних тела?

решење

X =  $\xrightarrow{r}$  $\simeq S^2$ нема СФТ, па ни X нема СФТ

$\Rightarrow$ X није ретракт од D^3 (јер D^3 има СФТ).

$Y \simeq$  $\xrightarrow{r} S^2$ нема СФТ, па ни Y нема СФТ.

пп. $\exists\, \rho$: пун $Y \to Y$ ретракција.

$$\begin{tikzcd} D^3 \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "\text{ретракција}"'] & \text{пун } Y \arrow[r, "\rho"] & Y \arrow[r, "r"] & S^2 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Y није ретракт пуног тела. □

Нека су (X, x_0), (Y, y_0) простори са базним тачкама. Дефинишемо два количничка простора

$$[X,Y] \overset{\text{def}}{=} \{ f : X \to Y \mid f \text{ непр.} \} / \simeq$$

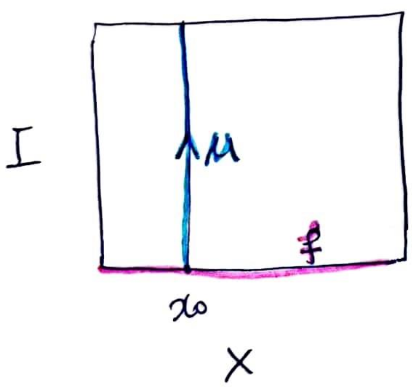
$$[X,Y]_0 \overset{\text{def}}{=} \{ f : X \to Y \mid f \text{ непр. и } f(x_0) = y_0 \} / \simeq (\text{rel } x_0)$$

Имамо и пресликавање ϕ које „заборавља базну тачку"

$$\phi : [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]$$
$$[f]_0 \longmapsto [f]$$

$\boxed{22.}$ Ако (X, x_0) има HEP и Y је путно повезан, онда је ϕ „на".

решење Нека је $[f] \in [X,Y]$, f непр., $f : X \to Y$.
Тражимо $g : X \to Y$ т.д. $\phi([g]_0) = [f]$, тј.
да је $g(x_0) = y_0$ и $f \simeq g$.



Како је Y путно повезан, постоји пут $u : I \to Y$, $u(0) = f(x_0)$, $u(1) = y_0$.

Нека је $F : X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I \to Y$ дато са
$$F(x, 0) := f(x)$$
$$F(x_0, t) := u(t)$$

Како (X, x_0) има HEP, то постоји $\overline{F} : X \times I \to Y$ т.д.
$\overline{F}\big|_{X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I} = F$. Нека је $g := \overline{F}(x, 1)$.

Тада је $\overline{F} : f \simeq g$ и $g(x_0) = \overline{F}(x_0, 1) = u(1) = y_0$.

$\Rightarrow [f] = \phi([g]_0) \Rightarrow \phi$ је „на". $\square$

Дефиниција X је тополошка група ако је тополошки простор и група и операције $* : X \times X \to X$ и $^{-1} : X \to X$ су непрекидне.

23. Нека је Y путно повезана тополошка група, X тополошки простор, $x_0 \in X$, $e \in Y$ базне тачке (e је неутрал у групи). Тада је ϕ бијекција.

решење

ϕ је „на": Нека је $f : X \to Y$ непр. Тражимо $g : X \to Y$ непр. т.д. $g(x_0) = e$ и $f \simeq g$.

Како је Y путно повезан, постоји пут $u : I \to Y$ $u(0) = f(x_0)$, $u(1) = e$. Нека је $H : X \times I \longrightarrow Y$ дато са

$$H(x, t) \stackrel{def}{=} f(x) * (u(t))^{-1}$$

Приметимо $H(x, 1) = f(x) * e^{-1} = f(x)$. Узмимо $g(x) := H(x, 0)$

Тада је $g(x_0) = H(x_0, 0) = f(x_0) * (u(0))^{-1} = f(x_0) * (f(x_0))^{-1} = e$

и $H : g \simeq f \Rightarrow \phi([g]_0) = [f] \Rightarrow \phi$ је „на".

ϕ је „1-1": Нека су $[f]_0, [g]_0 \in [X, Y]_0$ т.д.

$\phi([f]_0) = \phi([g]_0)$, тј. $f, g : X \to Y$, $f(x_0) = g(x_0) = e$ и $f \simeq g$

Да ли је $[f]_0 = [g]_0$, тј. да ли је $f \simeq g \ (\text{rel } x_0)$?

Имамо $H : f \simeq g$, $H : X \times I \to Y$. Нека је $\tilde{H} : X \times I \to Y$

дато са $\tilde{H}(x, t) := H(x, t) * (H(x_0, t))^{-1}$

$\tilde{H}$ је непр. (јер су операције у групи непр., као и H).

$$\tilde{H}(x, 0) = f(x) * (\underbrace{f(x_0)}_{e})^{-1} = f(x)$$

$$\tilde{H}(x, 1) = g(x) * (\underbrace{g(x_0)}_{e})^{-1} = g(x)$$

$\tilde{H}(x_0, t) = H(x_0, t) * (H(x_0, t))^{-1} = e$ - не зависи од t

$\Rightarrow \tilde{H} : f \simeq g \ (\text{rel } x_0)$

$\Rightarrow \phi$ је „1-1". $\blacksquare$

Фундаментална група

Нека је (X, x_0) топ. пр. са базном тачком.

дефиниција Фундаментална група од (X, x_0) је

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{f : I \to X \mid f(0) = f(1) = x_0,\ f \text{ непр.}\} \big/ _{\simeq (\text{rel } \{0,1\})}$$

Еквивалентно:

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{f : S^1 \to X \mid f(1) = x_0,\ f \text{ непр.}\} \big/ _{\simeq (\text{rel } 1)} \cong [S^1, X]_0$$

Дакле, у $\pi_1(X, x_0)$ елементи су класе петљи.

Дефинишимо сабирање. Нека су $f, g : I \to X$ петље.

$$[f] + [g] := [u],$$

где је
$$u(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

> u се добија надовезивањем петље g на петљу f

$(\pi_1(X, x_0), +)$ је група (не мора бити Абелова)

(неутрал је $[c_{x_0}]$, инверз $[u]^{-1} = [v]$, $v(t) := u(1-t)$)

- Ако је X путно повезан, онда

$$(\forall x_0, x_1 \in X) \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

и тада пишемо само $\pi_1(X)$.

- $f: X \to Y$ тј. $f(x_0) = y_0$ индукује хомоморфизам

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [u] &\longmapsto [f \circ u] \end{aligned}$$

Особине

1. $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)}$

2. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ онда $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, тј.

комутира:
$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "g_*"] \\ & \pi_1(Z, z_0) \end{tikzcd}$$

3. $f, g : X \to Y$ и $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

4. $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$

доказ: $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y \qquad \varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y, \quad \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

$\Rightarrow \varphi_* \circ \psi_* = \mathbb{1}_{\pi_1(Y)}, \quad \psi_* \circ \varphi_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X)} \Rightarrow \varphi_*$ је изоморфизам. □

Користићемо:

(1) $X \simeq * \Rightarrow \pi_1(X) = 0$

О је ознака за тривијалну групу која садржи само неутрал, тј. $0 = \{e\}$.

нпр. $\pi_1(*) \cong \pi_1(D^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$

(2) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (одавде и $\pi_1(C) \cong \pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ јер $C \simeq M \simeq S^1$)

(3) $\pi_1(S^n) = 0, \; n \geq 2$

дефиниција X је просто повезан ако је путно повезан и $\pi_1(X) = 0$.

Представљање групе преко генератора и релација

$\langle \alpha \mid - \rangle$ = скуп свих речи над скупом симбола α, α^{-1}

$\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ - скуп носач

нпр. $\alpha^2 \alpha^7 \alpha^{-3} = \alpha^6 \in \langle \alpha \mid - \rangle$

Имамо релацију еквиваленције $\alpha\alpha^{-1} \sim 1$

Примећујемо: $\langle \alpha \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.

$\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ = скуп свих речи над скупом симбола $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$

$\{\alpha^k, \beta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ - скуп носач

Рел. екв.: $\alpha\alpha^{-1} \sim 1, \; \beta\beta^{-1} \sim 1$

нпр. $\alpha\beta\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1}\alpha^{-1}\underbrace{\beta\beta^{-1}}_{1}\underbrace{\beta^{-1}\beta}_{1}\alpha \sim \alpha\beta\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1} \sim \alpha\beta$ ← редуковане речи

1 = празна реч

$\alpha\beta \neq \beta\alpha$ - нема комутативности

Дефинишемо операцију надовезивања $*$:

$$\alpha\beta\beta^{-1} * \beta\beta \overset{def}{=} \alpha\beta\beta^{-1}\beta\beta \sim \alpha\beta^2$$

$\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ је у ствари слободна група са два генератора.

Генерално, ако је S скуп, $\langle S \mid - \rangle$ је слободна група са скупом генератора S. Пишемо и $F[S]$.

Т теорема Нека је $f : S \to G$. Тада постоји јединствено

$$\begin{tikzcd} F[S] \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & G \\ S \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

проширење $\bar{f} : F[S] \to G$ (тј. $\bar{f}|_S = f$). Ово значи да је свако пресликавање $\bar{f}$ са доменом $F[S]$ у потпуности одређено сликама елемената из S.

Најопштије:

$$\langle S \mid R \rangle$$

релације

нпр. $\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 = 1,\ \alpha\beta\gamma^2 = \beta^3 \rangle := \langle \alpha, \beta, \gamma \mid - \rangle \big/ N\langle \alpha^2, \alpha\beta\gamma^2\beta^{-3} \rangle$

исто што и $\alpha\beta\gamma^2\beta^{-3} = 1$

нормална подгрупа генерисана са α^2 и $\alpha\beta\gamma^2\beta^{-2}$

нпр. $\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle = \langle \alpha \mid - \rangle \big/ N\langle \alpha^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

За сваку групу G постоје S и R т.д. $G \cong \langle S \mid R \rangle$, али ова репрезентација не мора бити јединствена. Наиме, ако је $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ и

$$S_1 \neq S_2,\ R_1 \neq R_2 \not\Rightarrow G_1 \not\cong G_2.$$

Тицеове трансформације

Ако из неке релације можемо да изразимо један елемент преко осталих, онда:

(1) избришемо ту релацију;

(2) избришемо тај елемент;

(3) у осталим релацијама га заменимо.

нпр.

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\delta\gamma^{-1} = \delta^{2}\beta,\ \beta\delta = \gamma^{2}\beta^{-3} \rangle \cong$$

$\delta = \beta^{-1}\gamma^{2}\beta^{-3}$

$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta^{-1}\gamma^{2}\beta^{-3}\gamma^{-1} = \beta^{-1}\gamma^{2}\beta^{-3}\beta^{-1}\gamma^{2}\beta^{-3}\beta \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta^{-1}\gamma^{2}\beta^{-3}\gamma^{-1} = \beta^{-1}\gamma^{2}\beta^{-4}\gamma^{2}\beta^{-2} \rangle$$

Можемо по потреби и да додамо генератор:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta = \beta\alpha,\ \delta = \alpha\gamma \rangle$$

Абелизација групе

$$G^{ab} \overset{def}{=} G / N\langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

додамо релације да свака два елемента комутирају

Ако је G Абелова, онда $G^{ab} = G$.

Ако је $f : G \to H$, дефинишемо $f^{ab} : G^{ab} \to H^{ab}$

са $f^{ab}([\underset{G}{\underset{\Uparrow}{x}}]) = [\underset{H}{\underset{\Uparrow}{f(x)}}]$

Особине:

(1) $1_G^{ab} = 1_{G^{ab}}$

(2) $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$

Из (1) и (2) следи: $G \cong H \Rightarrow G^{ab} \cong H^{ab}$

Нпр. $G = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \beta^2 = \gamma^{-2} \rangle$

$G^{ab} = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \beta^2 = \gamma^{-2},\ \alpha\beta = \beta\alpha,\ \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$

пример (1) $\mathbb{Z} \cong \langle \alpha \mid - \rangle$

(2) $\mathbb{Z}_m \cong \langle \alpha \mid \alpha^m = 1 \rangle$

(3) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle = Ab\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$

(4) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6 \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^6 = 1,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$

Слободни производ група

$$G_1 \times G_2 \times \dots = \prod_{n=1}^{\infty} G_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \;\middle|\; g_n \in G_n \right\}$$

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots = \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \;\middle|\; g_n \in G_n,\ (\exists m \in \mathbb{N})(\forall k \geq m)\ g_k = 0 \right\}$$

коначне суме

Приметимо: $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n \leq \prod_{n=1}^{\infty} G_n$.

У коначном случају ове две ствари су исте:

$$\bigoplus_{k=1}^{n} G_k \cong \prod_{k=1}^{n} G_k$$

Ако је $G \cong \langle S_1 | R_1 \rangle$, $K \cong \langle S_2, R_2 \rangle$, онда

$$G \oplus K \cong G \times K \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{ s_1 s_2 = s_2 s_1 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \} \rangle$$

сви из S_1 комутирају са свима из S_2

Коначно, слободни производ група G и K је

$$G * K \overset{def}{=} \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$$

пример $|\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2| = 4$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle * \langle \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^2 = 1 \rangle$$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \{ \alpha\beta, \alpha\beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta, \alpha\beta\alpha\beta\alpha, \dots \}$ – бесконачан скуп

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 .$$

Ако су G и K Абелове, онда $(G*K)^{ab} \cong G \oplus K$

пример $D_n \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^n=1, \beta^2=1, \alpha\beta=\beta\alpha^{n-1} \rangle$

$\boxed{\text{диједарска група}}$

$$D_n^{ab} \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^n=1, \beta^2=1, \underbrace{\alpha\beta=\beta\alpha^{n-1}, \alpha\beta=\beta\alpha}_{\alpha^{n-2}=1} \rangle \cong$$

$$\alpha^2=1$$

$$\cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2=1, \alpha^n=1, \beta^2=1, \alpha\beta=\beta\alpha^{n-1}, \alpha\beta=\beta\alpha \rangle$$

1° $2 \nmid n$: $\alpha^2=1$ и $\alpha^n=1 \Rightarrow \alpha=1$

$$\Rightarrow D_n^{ab} \cong \langle \beta \mid \beta^2=1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

2° $2 \mid n$: $\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha^n=1$ - сувишна релација

$$D_n^{ab} \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2=1, \beta^2=1, \alpha\beta=\beta\alpha \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid \alpha^2=1 \rangle \oplus \langle \beta \mid \beta^2=1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

Т теорема $\pi_1(X\times Y)\cong \pi_1(X)\oplus\pi_1(Y)$.

ПР пример $T^2=S^1\times S^1 \Rightarrow \pi_1(T^2)\cong\pi_1(S^1)\oplus\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

Ван Кампенова теорема

Т теорема Нека је $X=X_1\cup X_2$, $X_1,X_2\in\mathcal{T}_X$. Нека су X_1, X_2 и $X_1\cap X_2$ путно повезани и $x_0\in X_1\cap X_2$.

Ако је

$$\pi_1(X_1,x_0)\cong\langle S_1\,|\,R_1\rangle,$$
$$\pi_1(X_2,x_0)\cong\langle S_2\,|\,R_2\rangle,$$
$$\pi_1(X_1\cap X_2,x_0)\cong\langle S_0\,|\,R_0\rangle,$$

онда је

$$\pi_1(X,x_0)\cong\Big\langle S_1\cup S_2\;\Big|\;R_1\cup R_2\cup\{(j_1)_*(z)=(j_2)_*(z)\mid z\in S_0\}\Big\rangle,$$

где су $j_1: X_1\cap X_2\hookrightarrow X_1$, $j_2: X_1\cap X_2\hookrightarrow X_2$ инклузије.

П последица 1 Ако су X_1 и X_2 просто повезани, онда је и X просто повезан

доказ: $\pi_1(X_1)\cong\pi_1(X_2)\cong 0=\langle -\,|\,-\rangle \Rightarrow \pi_1(X)=0$ $\square$

П последица 2 Ако је $X_1\cap X_2$ просто повезан, онда

$$\pi_1(X)\cong\pi_1(X_1)*\pi_1(X_2).$$

1. $\pi_1(S^n)=0$, $n \geq 2$

решење

$$X_1 := S^n \setminus \{S\} \approx \mathbb{R}^n \simeq *$$
$$X_2 := S^2 \setminus \{N\} \approx \mathbb{R}^n \simeq *$$
$\Rightarrow$ X_1 и X_2 су просто повезани

$$S^n = X_1 \cup X_2$$

$\xRightarrow{\text{посл.1}}$ $\pi_1(S^n)=0$ ■

Напомена: решење зад. 1 не би прошло за S^1 јер $X_1 \cap X_2 = S^1 \setminus \{S,N\}$ – није путно повезан!

2. $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^2$ за $n>2$.

решење

пп. $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underset{S^{n-1}}{\underset{\wr\|}{\mathbb{R}^n\setminus *}} \approx \underset{S^1}{\underset{\wr\|}{\mathbb{R}^2 \setminus *}} \Rightarrow S^{n-1} \simeq S^1 \Rightarrow \underset{0}{\underset{\|}{\pi_1(S^{n-1})}} \cong \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{\pi_1(S^1)}}$

↯ ■

3. Доказати

(а) $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(б) $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $|S|=n \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \mathbb{Z}^{*n}$

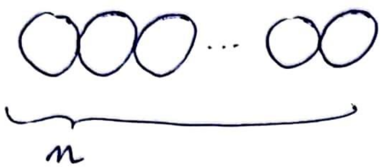
(в) $S \subseteq S^2$, $|S|=n \Rightarrow \pi_1(S^2 \setminus S) \cong \mathbb{Z}^{*(n-1)}$

решење (а) $X = S^1 \vee S^1 =$ 

$X_1 =$  $\simeq$  $= S^1$, $X_2 =$  $\simeq$  $= S^1$, $X_1 \cap X_2 =$  $\simeq *$

$X_1 \cap X_2$ је просто повезан $\Rightarrow \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \cong$

$\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$

(б) $\mathbb{R}^2 \setminus S \simeq$  $\simeq$  $\approx \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n}$

Индукцијом помоћу (а) добијамо:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \pi_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n} = \mathbb{Z}^{*n}$$

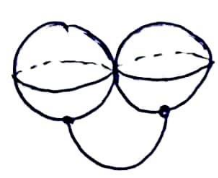
(в) $S^2 \setminus S \approx \mathbb{R}^2 \setminus (S \setminus *) \overset{(б)}{\Rightarrow} \pi_1(S^2 \setminus S) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-1} = \mathbb{Z}^{*(n-1)}$ ■

користимо $S^2 \setminus * \approx \mathbb{R}^2$

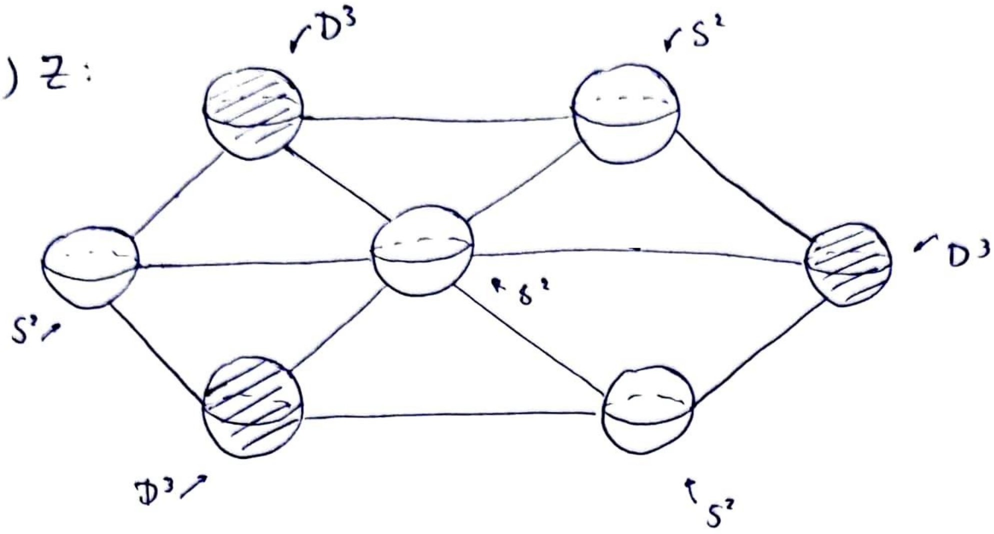
теорема Ако је $x_0 \in X$ т.д. постоји $U_{x_0} \in \mathcal{T}_X$ и $\{x_0\}$ је ЈДР од U_{x_0} и ако је $y_0 \in Y$ т.д. постоји $V_{y_0} \in \mathcal{T}_Y$ и $\{y_0\}$ је ЈДР од V_{y_0}, и ако су X и Y путно повезани, онда

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$

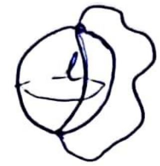
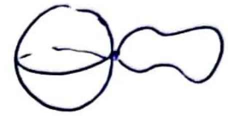
4. Одредити фундаменталне групе простора

(а) $S^2/_{N \sim S}$; (б) X:  (в) Y: 

(г) Z:

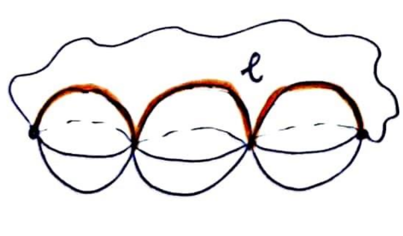
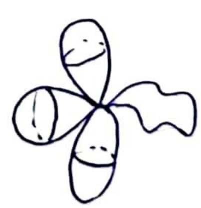


решење

(а) $S^2/_{N\sim S} \approx$  $\simeq$  $\underset{/l}{\simeq}$  $\approx S^2 \vee S^1$

$\Rightarrow \pi_1(S^2/_{N\sim S}) \cong \pi_1(S^2 \vee S^1) \cong \pi_1(S^2) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

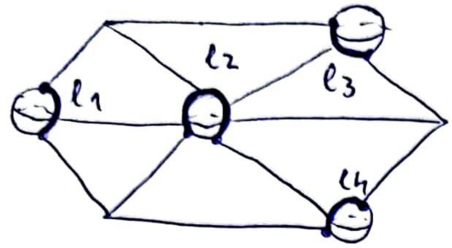
$\boxed{\text{$S^1$ и S^2 испуњавају услове претходне теореме}}$

(б) $X \simeq$  $\underset{}{\overset{/l}{\simeq}}$  $\approx S^1 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2$

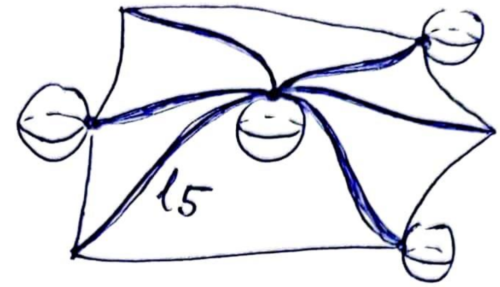
$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^2) * \pi_1(S^2) * \pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z}$

(в) $Y \simeq$  $\approx S^1 \vee S^2 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$.

(?) $Z \underset{/D^3}{\simeq}$

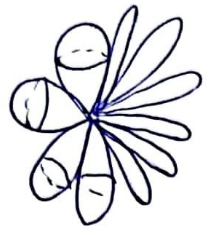


$\underset{/\ell_1\,/\ell_2\,/\ell_3\,/\ell_4}{\simeq}$



$\simeq$

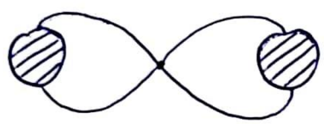
$\underset{/\ell_5}{\simeq}$



$\simeq \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{6} \vee \underbrace{S^2 \vee \dots \vee S^2}_{4}$

$\Rightarrow \quad \pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}^{*6}$ □

5. X:



D:

A:

B:

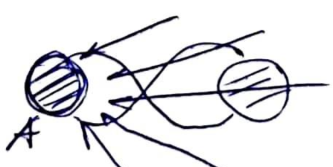
C:

Који од ових простора су ретракти, а који ДР?

Одредити $\pi_1(X)$.

решење $X \simeq S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

A јесте ретракт:



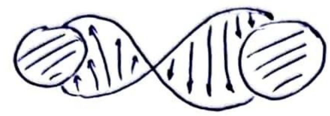
све пројектујемо на A

није ДР јер $A \not\simeq X$ јер $0 = \pi_1(A) \neq \pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

B није ретракт: пп. нека је $r: X \to B$ ретракција и ρ ретракција B на S^1:

Онда је рестрикција $(r\circ\rho)|$: $D^2\to S^1$ ретракција ↯

$\Rightarrow$ B није ретракт па ни ДР.

$\boxed{C}$ јесте ретракт : 

није ДР јер $C\simeq *$ па $\pi_1(C)=0\neq\pi_1(X)$

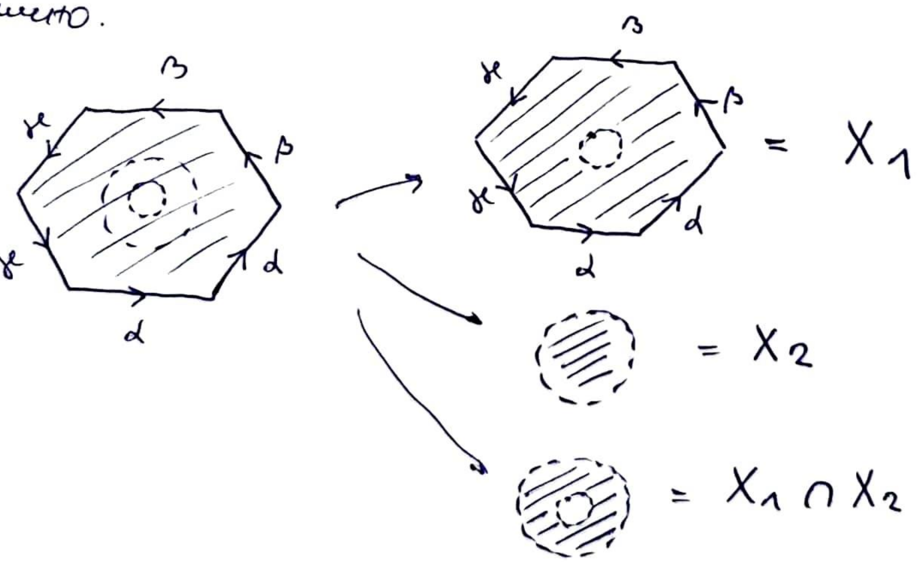
па $C\not\simeq X$.

$\boxed{D}$ јесте ДР :  ■

$\boxed{6.}$ Одредити $\pi_1(M_g)$, $\pi_1(N_h)$, $g\in\mathbb{N}_0$, $h\in\mathbb{N}$.

решење Урадићемо детаљно за N_3, све остало је слично.

N_3 :



$N_3=X_1\cup X_2$, X_1, X_2 и $X_1\cap X_2$ су путно повезани

$X_1\simeq$  $\approx$  $=S^1\vee S^1\vee S^1$

$\Rightarrow \pi_1(X_1) \cong \langle \alpha \mid - \rangle * \langle \beta \mid - \rangle * \langle \gamma \mid - \rangle \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid - \rangle$

$X_2 \simeq * \Rightarrow \pi_1(X_2) \cong 0 = \langle - \mid - \rangle$

$X_1 \cap X_2 \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \mathbb{Z} \cong \langle \delta \mid - \rangle$

Ван Кампен:

$$\pi_1(N_3) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid (j_1)_*(\delta) = (j_2)_*(\delta) \rangle$$

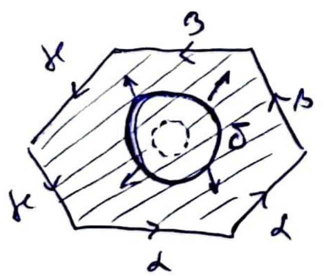
$j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1$, $j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$

Шта је δ:

$X_1 \cap X_2$ 

то је генератор од $\pi_1(X_1 \cap X_2)$ тј. петља која се једном „намота" око рупе

Шта је $(j_1)_*(\delta)$: то је класа петље $j_1 \circ \delta$ у $\pi_1(X_1)$



тј. гледамо са чим је δ утопљено у X_1 хомотопно (хоћемо то да изразимо некако преко α, β, γ)

Видимо $j_1 \circ \delta \simeq \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$, тј. $(j_1)_*(\delta) = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$

Шта је $(j_2)_*(\delta)$: то је исто класа петље $j_2 \circ \delta$ у $\pi_1(X_2)$, али $\pi_1(X_2) = 0 = \{1\}$, па је $(j_2)_*(\delta) = 1$

(1 је неутрал групе $\pi_1(X_2)$)

Коначно,

$$\pi_1(N_3) \cong \langle \alpha,\beta,\gamma \mid \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 1 \rangle$$

Слично, $\pi_1(N_h) \cong \langle \alpha_1,\dots,\alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_h^2 = 1 \rangle$

$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_g,\beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

$\square$

Из претходног задатка имамо

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\pi_1(K) \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2\beta^2 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle = \langle \alpha,\beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$\boxed{7.}$ Показати да међу M_g и N_h нема хомеоморфних површи ($g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$).

решење

Фундаменталне групе од M_g и N_h имају различите презентације, али одатле не можемо да закључимо да нису изоморфне. Одредимо π_1^{ab}.

$$\pi_1^{ab}(M_g) \cong Ab\langle \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_g,\beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle \cong$$

сви α_i, β_i комутирају па се скрате

$$\cong Ab\langle \alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_g,\beta_g \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$\pi_1^{ab}(N_h) \cong Ab\langle \alpha_1,\dots,\alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_h^2 = 1\rangle \cong$$

јер α_i комутирају

$$\cong Ab\langle \alpha_1,\dots,\alpha_h \mid (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h)^2 = 1\rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha_1,\dots,\alpha_h,\beta \mid (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h)^2 = 1,\ \beta=\alpha_1\cdots\alpha_h\rangle \cong$$

избацимо $\alpha_h = \beta\alpha_1^{-1}\cdots\alpha_{h-1}^{-1}$

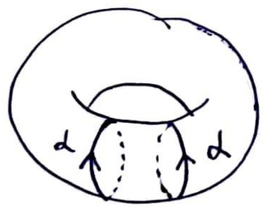
$$\cong Ab\langle \alpha_1,\dots,\alpha_{h-1},\beta \mid \beta^2 = 1\rangle \cong$$

$$\cong \mathbb{Z}^{h-1}\oplus\mathbb{Z}_2$$

Очигледно ниједна од ових π_1^{ab} није изоморфна, па су све M_g, N_h нехомеоморфне површи. □

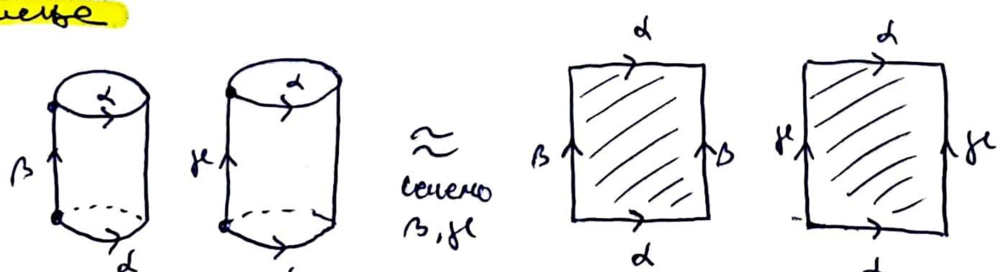
$\boxed{8.}$ Нека је дат простор X. Одредити $\pi_1(X)$.

X :



решење

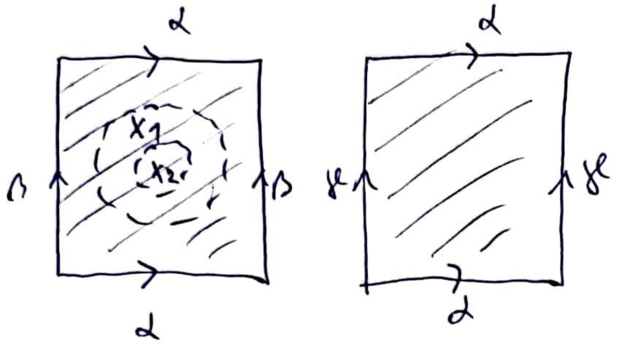
$X \approx$



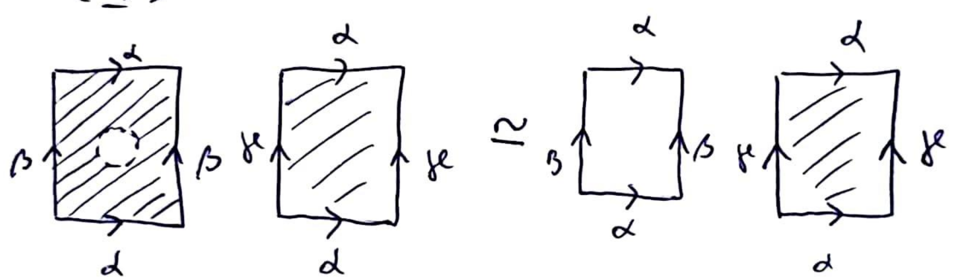
Очекујемо сличан резултат као за $\pi_1(M_g)$, $\pi_1(N_n)$:

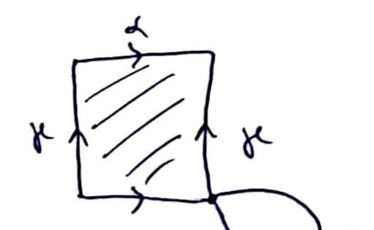
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=1,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}=1 \rangle$$

Формално, користимо Ван Кампенову теорему.

X: 

$X_1 =$  $\simeq *$

$X_2 =$  $\simeq$

$\simeq$  $\simeq T^2 \vee S^1$

$X_1 \cap X_2 =$  $\simeq S^1$

$X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ су путно повезани и

$\pi_1(X_1) = \langle - \mid - \rangle$

$\pi_1(X_2) = \underbrace{\langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle}_{\pi_1(T^2)} * \underbrace{\langle \beta \mid - \rangle}_{\pi_1(S^1)} \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle$

$\pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle \delta \mid - \rangle$

$\overset{BK}{\Longrightarrow} \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ (j_1)_*(\delta) = (j_2)_*(\delta) \rangle$

Слично као у зад. 6. (рачунање $\pi_1(M_g), \pi_1(N_g)$)

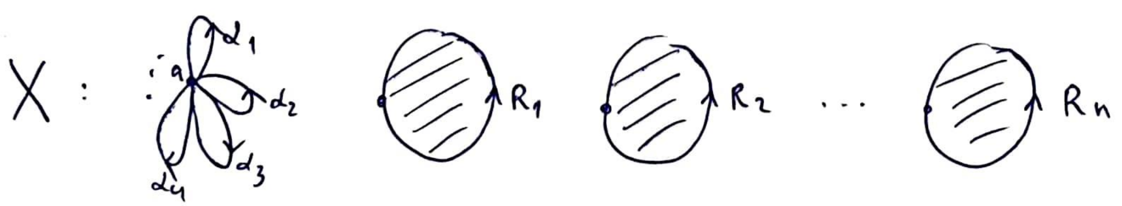
$(j_1)_*(\delta) = 1$

$(j_2)_*(\delta) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$ $\blacksquare$

Претходни резултат можемо генерализовати.

Ако се X састоји од k кружница $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ лепљених на границе n дискова



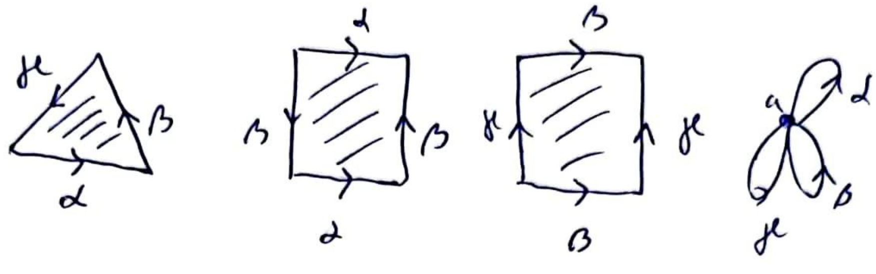
(R_i се састоји од ових кружница $\alpha_1 \dots \alpha_k$)

онда је

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle .$$

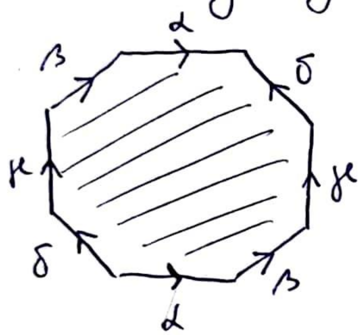
Овај резултат се добија применом Ван Кампенове т.

ПР пример X:



$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta\gamma = 1,\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1,\ \beta\gamma\beta^{-1}\gamma^{-1} = 1 \rangle$$

9. Доказати да је X површ и одредити која.



решење

X јесте површ (свака тачка има околину $\approx \mathrm{int}\, D^2$)

Сва темена осмоугла су иста, тј. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ су кружнице, па је

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1 \rangle$$

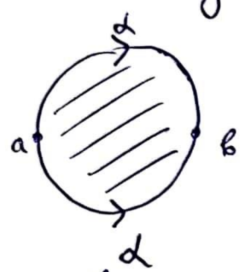
ово нам не говори ништа

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}=1\rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^4 \cong \pi_1^{ab}(M_2)$$

$\Rightarrow X \approx M_2.$ $\square$

пример Када одређујемо π_1 помоћу количничког модела, битно је да су сви генератори кружнице! Шта се деси ако нису:



$\approx S^2$

α није кружница

Знамо $\pi_1(S^2)=0$, али

$$\langle \alpha \mid \alpha\alpha^{-1}=1\rangle \cong \langle \alpha \mid - \rangle \cong \mathbb{Z},$$

па очигледно није $\pi_1(S^2) \not\cong \langle \alpha \mid \alpha\alpha^{-1}=1\rangle$

$\boxed{10.}$ Наћи неки простор X т.д. је

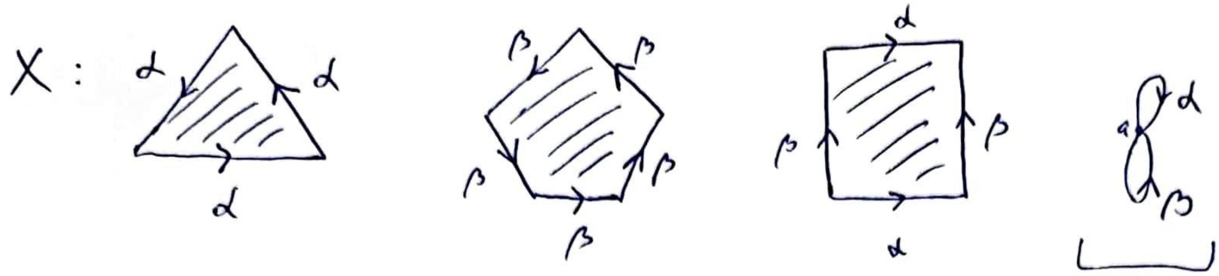
(а) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$;

(б) $\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$

решење

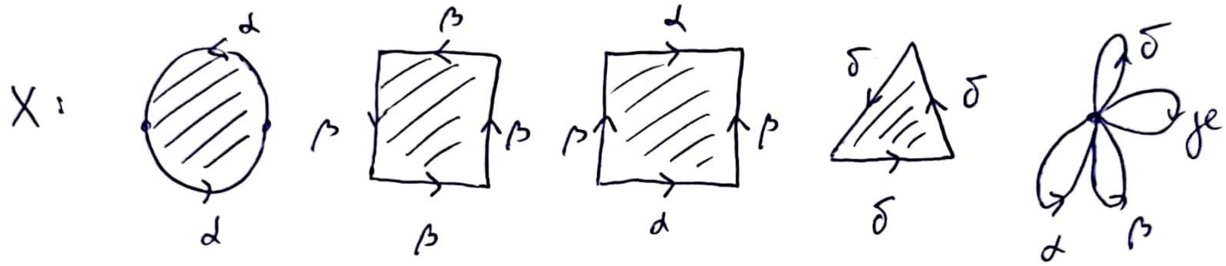
$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^3=1, \beta^5=1, \alpha\beta=\beta\alpha\rangle$$

Ово нам даје мотивацију за X:



овај део модела је
овде сувишан јер се
из прва 3 дела већ
види да су α и β
кружнице у a

(б) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha^2=1,\ \beta^4=1,\ \alpha\beta=\beta\alpha,\ \delta^3=1 \rangle$



$\boxed{11.}$ $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = ?$

решење $\mathbb{R}P^1 \approx S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$

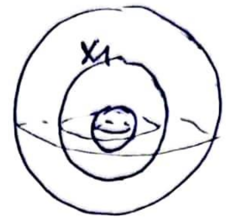
Показујемо $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$ индукцијом.

база индукције: $n=2$ ✓

индукцијска хипотеза: $\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 3$

индукцијски корак: показујемо $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

$$\mathbb{R}P^n \approx D^n /_{x \sim -x,\, x \in \partial D^n}$$



Нека је X_1 = мали отворен диск у $\mathbb{R}P^n$:  $\simeq *$

$X_2 = \mathbb{R}P^n \setminus$ мањег затвореног диска:

 $\simeq S^{n-1}/_{x \sim -x} \approx \mathbb{R}P^{n-1}$

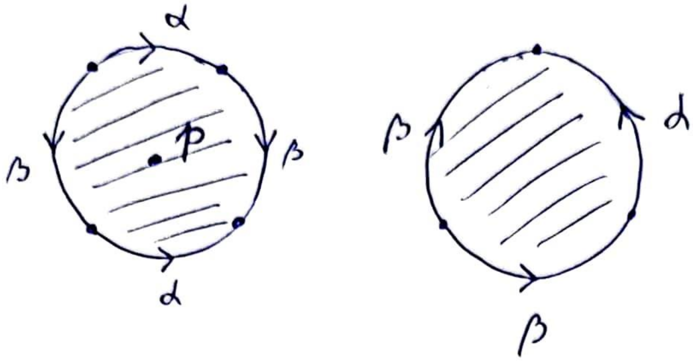
$X_1 \cap X_2 \simeq S^{n-1}$ - просто повезан

$$\overset{\text{посл.2}}{\underset{\text{ВК}}{\Longrightarrow}} \quad \pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Дакле, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=1 \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2 \end{cases}$ ■

$\boxed{12.}$

X :



(а) Доказати да $X \not\simeq *$;

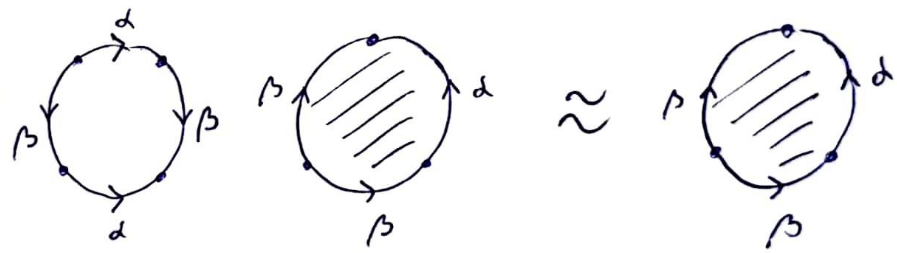
(б) Да ли је $X \setminus \{p\} \simeq S^1$?

решење

(а) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta = 1, \underbrace{\beta^{-1}\beta\,\alpha = 1}_{\Downarrow \ \alpha = 1} \rangle \cong$

$$\cong \langle \beta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z} \neq 0 \Rightarrow X \not\simeq *$$

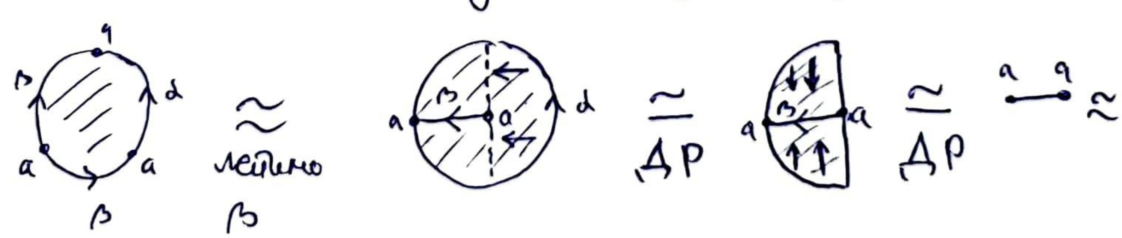
(б) $X \setminus \{p\} \simeq$



$\Rightarrow \pi_1(X \setminus \{p\}) \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^{-1}\beta\alpha = 1 \rangle \cong \langle \beta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$

Одавде не можемо закључити да ли је $X \setminus \{p\} \simeq S^1$.

$X \setminus \{p\} \simeq$



$\simeq S^1$

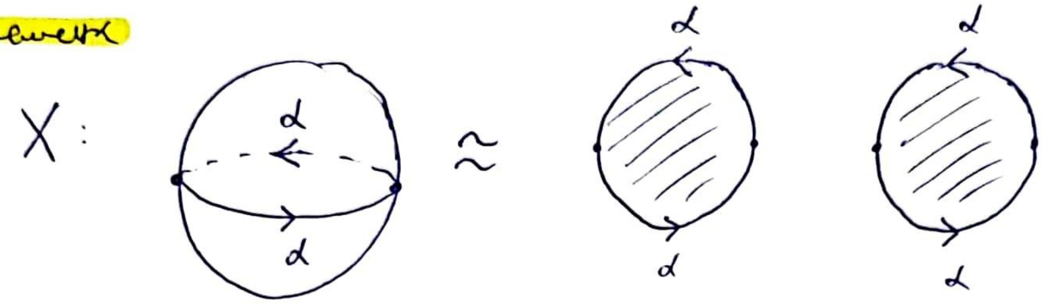
Дакле, $X \setminus \{p\} \simeq S^1$. $\square$

13. Нека је $X = S^2/_{(x,y,0)\sim(-x,-y,0)}$

(а) Да ли је $X \approx \mathbb{R}P^2$?

(б) Ако је A екватор, да ли је $A/_\sim$ ретракт од X?

решење



$\pi_1(X) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2=1, \alpha^2=1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ $\Big\}$ ово нам не говори ништа

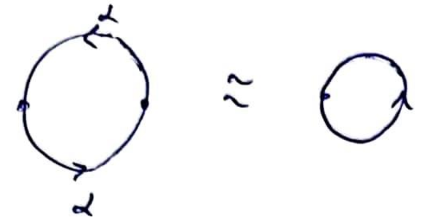
$\pi_1(\mathbb{R}P^2)$

1. начин:

X није површ јер тачке на α имају околину хомеоморфну  $\not\approx \operatorname{int} D^2$, а $\mathbb{R}P^2$ јесте површ

2. начин:

пс. $X \approx \mathbb{R}P^2 \Rightarrow \underset{\mathbb{R}P^2}{\underset{\cong}{X\setminus\{N\}}} \approx \underset{S^1}{\underset{\cong}{\mathbb{R}P^2\setminus *}} \Rightarrow \underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\parallel}{\pi_1(\mathbb{R}P^2)}} \cong \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{\pi_1(S^1)}}$ ↯

(б) A: 

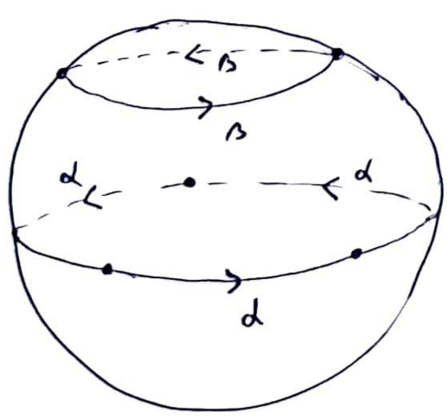
$\simeq S^1$

Пп. да постоји ретракција $r : X \to A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \lightning$$

Ово је контрадикција јер $r_* \circ i_* = \mathbb{1} \Rightarrow r_*$ је „на“, али $r_* : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ не може бити „на“.

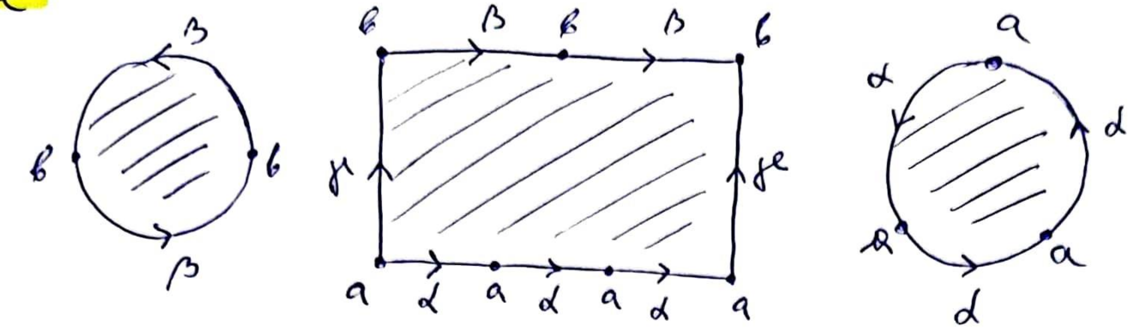
(Други аргумент би био да сваки хомоморфизам из $\mathbb{Z}_2$ у $\mathbb{Z}$ мора бити тривијалан, па $r_* = 0$, па $\mathbb{1} = r_* \circ i_* = 0$ $\lightning$) ■

14. X: 

(а) $\pi_1(X) = ?$

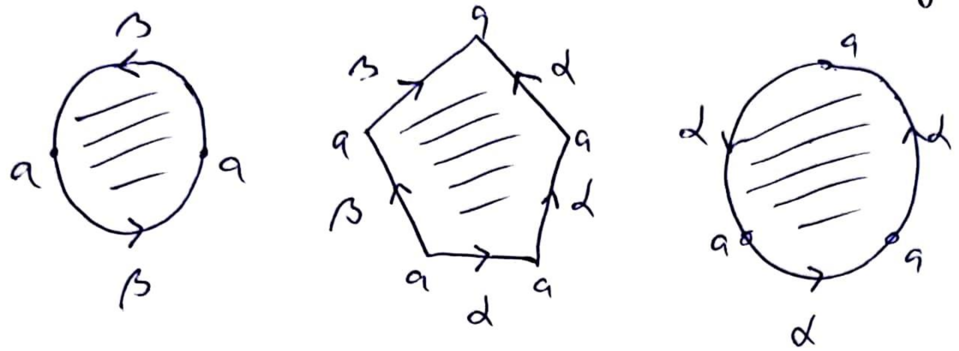
(б) $A/\sim$ да ли је ретракт? (A = екватор) решење

(а) X:



нису сва темена иста, па посечено то је $\simeq *$:

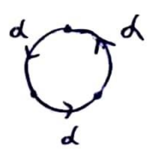
$X \simeq$



$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1, \underbrace{\alpha^3 = \beta^2}_{\text{сувишно}}, \alpha^3 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1, \alpha^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

(б) пмс да постоји ретракција $r: X \to A/\sim$

$A/\sim \;\simeq$  $\simeq$  $\simeq S^1$

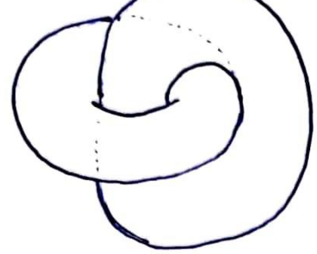
$$\begin{tikzcd} A/\sim \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A/\sim \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \overset{ab}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*^{ab}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \arrow[d, "r_*^{ab}"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{још увек немамо контрадикцију па радимо ab}}$

$\lightning$

$\Rightarrow$ није ретракт ■

15.

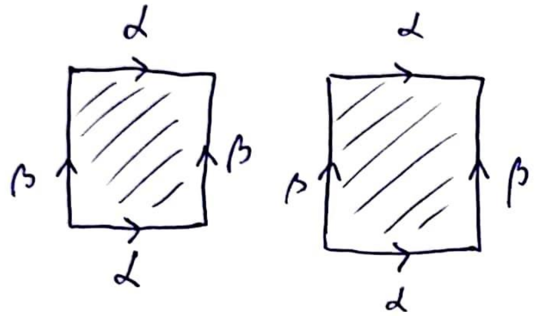
X: 

X = два уланчана торуса

(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) Да ли је десни T^2 ретракт од X?

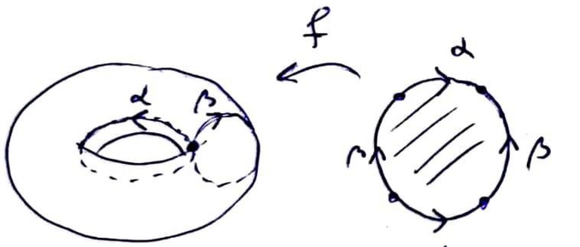
решење

(а) $X \simeq$ 

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

2. начин

Простор X можемо видети као $X = D^2 \cup_f T^2$



$f : S^1 \to T^2$

$[f] = [\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}] = [const] = 1$

$\boxed{\text{јер } \alpha \text{ и } \beta \text{ комутирају у } \pi_1(T^2)}$

$\Rightarrow f \simeq const$

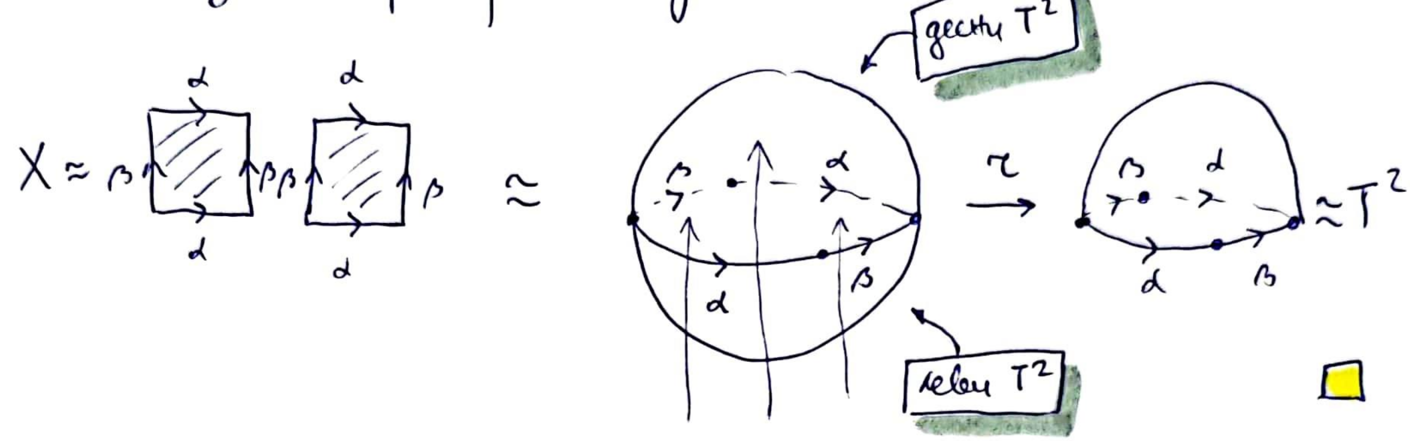
$\Rightarrow C_f \simeq C_{const}$

$C_f = D^2 \cup_f T^2 \simeq C_{const} \simeq D^2/S^1 \vee T^2 \simeq S^2 \vee T^2$

$\Rightarrow \quad X \simeq S^2 \vee T^2$

$\Rightarrow \quad \pi_1(X) \cong \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} * \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

б) T^2 јесте ретракт од X:



$\boxed{16.}$ Доказати да ∂M није ретракт од M.

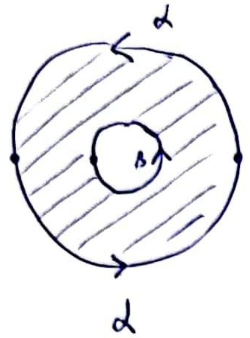
Решење пп. $\exists\, r : M \to \partial M$ ретракција

$M \simeq \partial M \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(\partial M) \cong \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\partial M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & M \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \partial M
\end{tikzcd}
\quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

нема контрадикције

У оваквој ситуацији желимо боље да разумемо пресликавања i_* и r_*, па зато гледамо шта су генератори група $\pi_1(M)$ и $\pi_1(\partial M)$.

$M \approx$ 

$\pi_1(M) \cong \langle \alpha \mid - \rangle$

јер $M \simeq$  $\approx$ 

$\pi_1(\partial M) \cong \langle \beta \mid - \rangle$

јер $\partial M \simeq$ 

$i_*(\beta)$ = убацимо β у M и гледамо чему је то хомотопно

Из горњег модела је очигледно $i_*(\beta) = 2\alpha$.

Дакле, генератор β се слика у 2 пута ген. α, па је i_* заправо множење са 2.

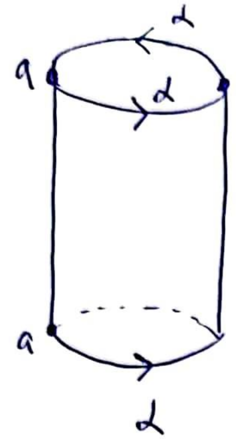
$i_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ је хомоморфизам па је то множење са неким $k \in \mathbb{Z}$. Коначно, $\mathbb{1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ је множење са 1. Имамо:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[dr, "\cdot 1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot k"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd} \Rightarrow \cdot 2k = \cdot 1 \quad ↯$$

(Напомена: формално, $\alpha = [\bar{\alpha}]$, $\bar{\alpha} : S^1 \hookrightarrow M$, $\beta = [\bar{\beta}]$, $\bar{\beta} : S^1 \hookrightarrow \partial M$, па је $i_*(\beta) = [i \circ \bar{\beta}]$ итд. али нећемо компликовати запис.) ■

$\boxed{17.}$

$X:$



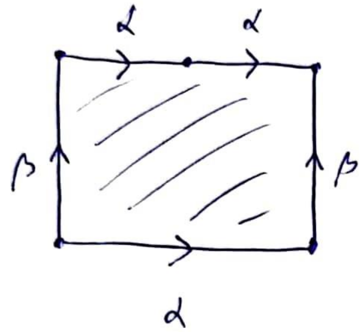
(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) Да ли је α ретракт од X?

решење

(а)

$X \simeq$



$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} = 1 \rangle$$

(б) $\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} = 1 \rangle \cong Ab\langle \alpha, \beta \mid \alpha = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}\langle \beta \rangle$

ПТС. $\exists\, r : X \to \alpha$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & \alpha \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \pi_1(X) \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{ab} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \arrow[r, "i_*^{ab}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}\langle\beta\rangle \arrow[d, "r_*^{ab}"] \\ & \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \end{tikzcd}$$

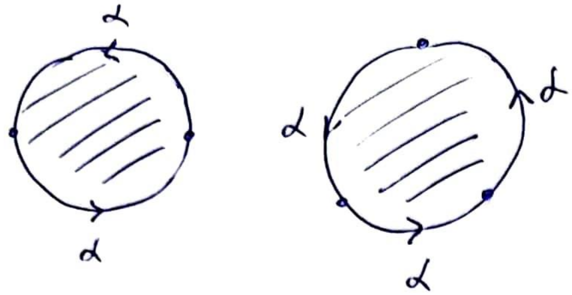
$$\alpha \longmapsto 0$$

$$i_*^{ab}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}(\alpha) = r_*^{ab}(i_*^{ab}(\alpha)) = 0 \neq \alpha \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ α није ретракт од X. $\blacksquare$

18. X :

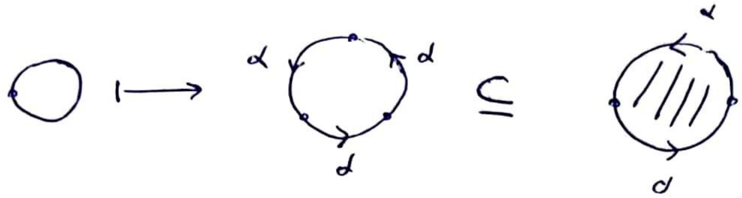


Показати $X \simeq S^2$

решење

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha \mid \underbrace{\alpha^2 = 1, \alpha^3 = 1}_{\alpha = 1} \rangle \cong 0 \cong \pi_1(S^2)$$

Нека је $f : S^1 \to \mathbb{R}P^2$ намотавање 3 пута



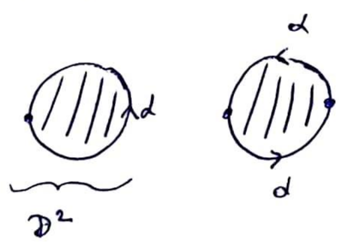
$= \mathbb{R}P^2$

Приметимо $C_f = CS^1 \cup_f \mathbb{R}P^2 \simeq D^2 \cup_f \mathbb{R}P^2 \simeq X$

$[f] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2\langle[\alpha]\rangle$

$$[f] = [\alpha\alpha\alpha] = \underbrace{[\alpha] + [\alpha]}_{0 \text{ у } \pi_1(\mathbb{R}P^2)} + [\alpha] = [\alpha] \Rightarrow f \simeq \alpha \Rightarrow C_f \simeq C_\alpha$$

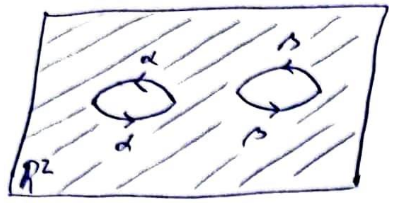
$C_\alpha = CS^1 \cup_\alpha \mathbb{R}P^2 \simeq$



$\underset{/D^2}{\simeq} \quad S^2$

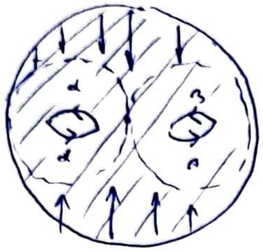
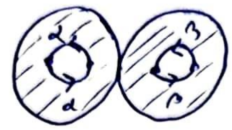
$\Rightarrow \quad X \simeq S^2. \quad \square$

19.

$X:$ 

$\pi_1(X) = ?$

решење

$X \simeq$  $\underset{ДР}{\simeq}$  $\simeq M \vee M$

ДР на D^2

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(M) * \pi_1(M) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ $\square$

20. Одредити фундаменталне групе простора:

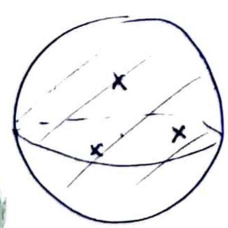
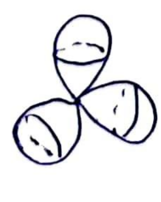
(а) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

(б) $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (Ox \cup Oy \cup Oz)$

(в) $Z = Y \cup \{(17,0,0), (0,12,0)\}$

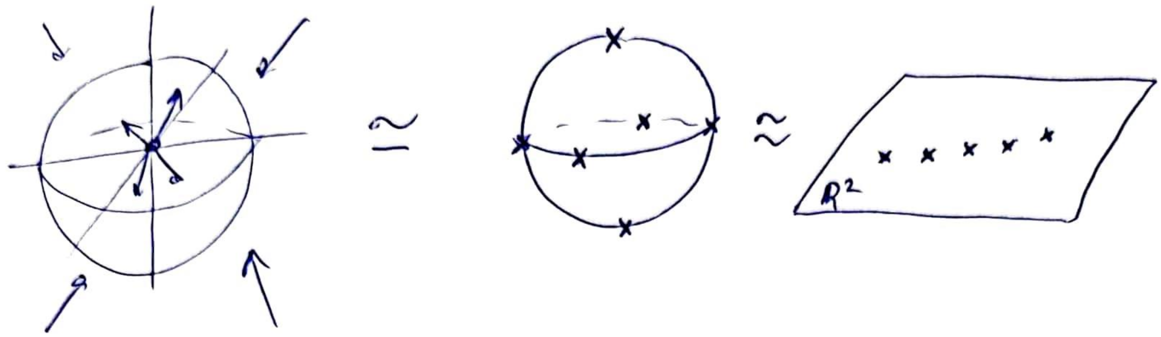
(г) $T = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{7} l_i$, l_i - паралелне праве

решење

(а) $X \simeq$  $\simeq$  $\simeq S^2 \vee S^2 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X) = 0$

ДР на D^3

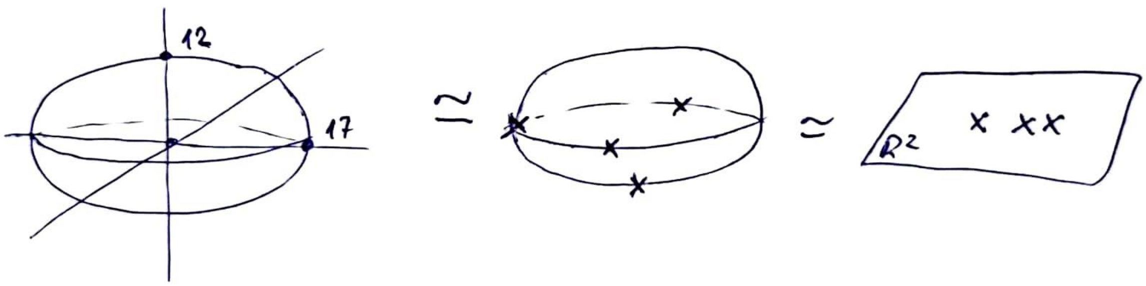
(б) Како $(0,0,0) \notin Y$ имамо ДР са Y на S^2 без $S^2 \cap (Ox \cup Oy \cup Oz)$, тј. $Y \simeq S^2 \setminus A$, $|A| = 6$

$Y \simeq$ 

$Y \simeq S^2 \setminus A \simeq \mathbb{R}^2 \setminus (A \setminus *) \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$

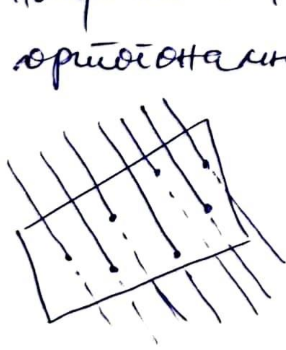
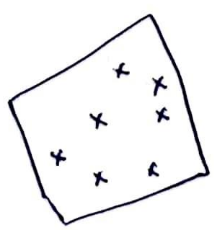
$\Rightarrow \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}^{*5}$

(в) слично као (б) само не правимо ДР на S^2 већ на елипсоид који садржи $(17,0,0)$ и $(0,12,0)$

$Z \simeq$ 

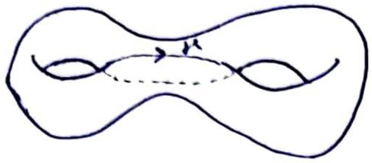
Дакле $Z \simeq S^2 \setminus A$, $|A| = 4$, па је $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(г) Направимо ДР на раван $\mathbb{R}^2$ на коју су праве l_i ортогоналне

$T \simeq$  $\underset{ДР}{\simeq}$  $\simeq \mathbb{R}^2 \setminus A, \ |A| = 7$

$\Rightarrow \quad T \simeq \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{7} \Rightarrow \pi_1(T) \cong \mathbb{Z}^{*7}$ □

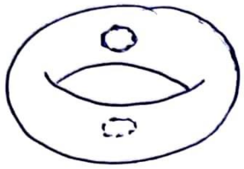
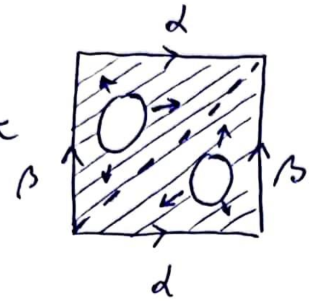
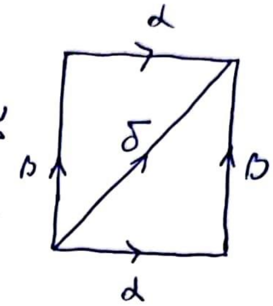
21.

X : 

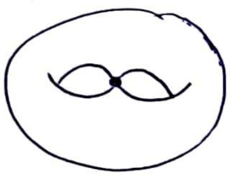
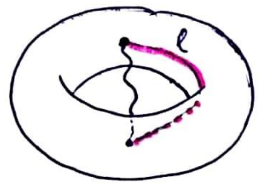
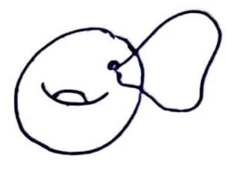
(а) $\pi_1(X\setminus\mu) = ?$

(б) $\pi_1(X/\mu) = ?$

решение

(а) $X\setminus\mu \simeq$  $\simeq$  $\cong$  $\cong$

$\simeq$  $\simeq S^1\vee S^1\vee S^1 \Rightarrow \pi_1(X\setminus\mu)\cong \mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$

(б) $X/\mu \simeq$  $\cong$  $\underset{/l}{\simeq}$ 

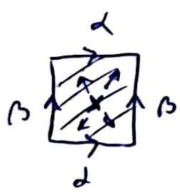
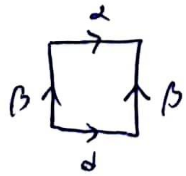
$\Rightarrow X/\mu \simeq S^1 \vee T^2 \Rightarrow \pi_1(X/\mu) \cong \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$ ■

22. X: 

$\pi_1(X) = ?$

решение

Приметимо $X^* \simeq T^2 \Rightarrow X \simeq T^2\setminus *$

$T^2\setminus * \simeq$  $\simeq$  $\simeq$  $\simeq S^1\vee S^1$

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. ■

Наткривања

дефиниција Пресликавање $p: E \to B$ је наткривање ако је непрекидно, „на" и ако

$$(\forall b \in B)\left(\exists V_b \in \mathcal{T}_E \cap \mathcal{O}(b)\right)\ p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A_b} U_b^{\alpha}$$

где је $(\forall \alpha \in A_b)\ U_b^{\alpha} \in \mathcal{T}_E$ и $U_b^{\alpha} \approx V_b$.

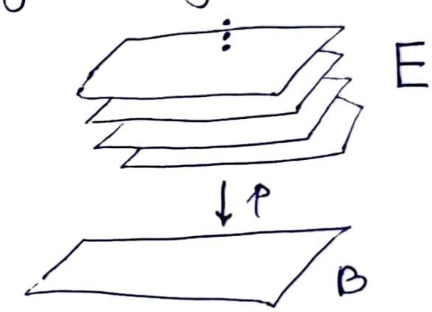
B називамо базним, а E тоталним простором.

пример (1) $E = B \times D$, D-дискретан топ. пр.,

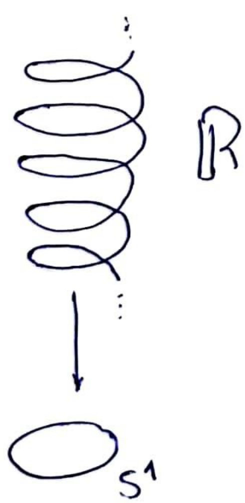
$p = p_1 =$ пројекција на 1. координату

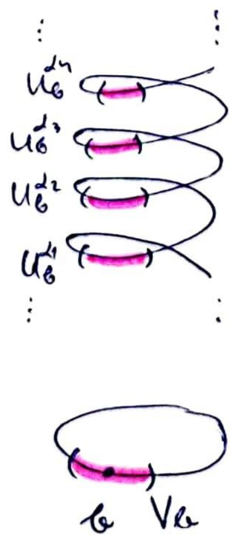
$$\begin{array}{c} E = B \times D \\ \downarrow p_1 \\ B \end{array}$$

је дискретно наткривање



(2) $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

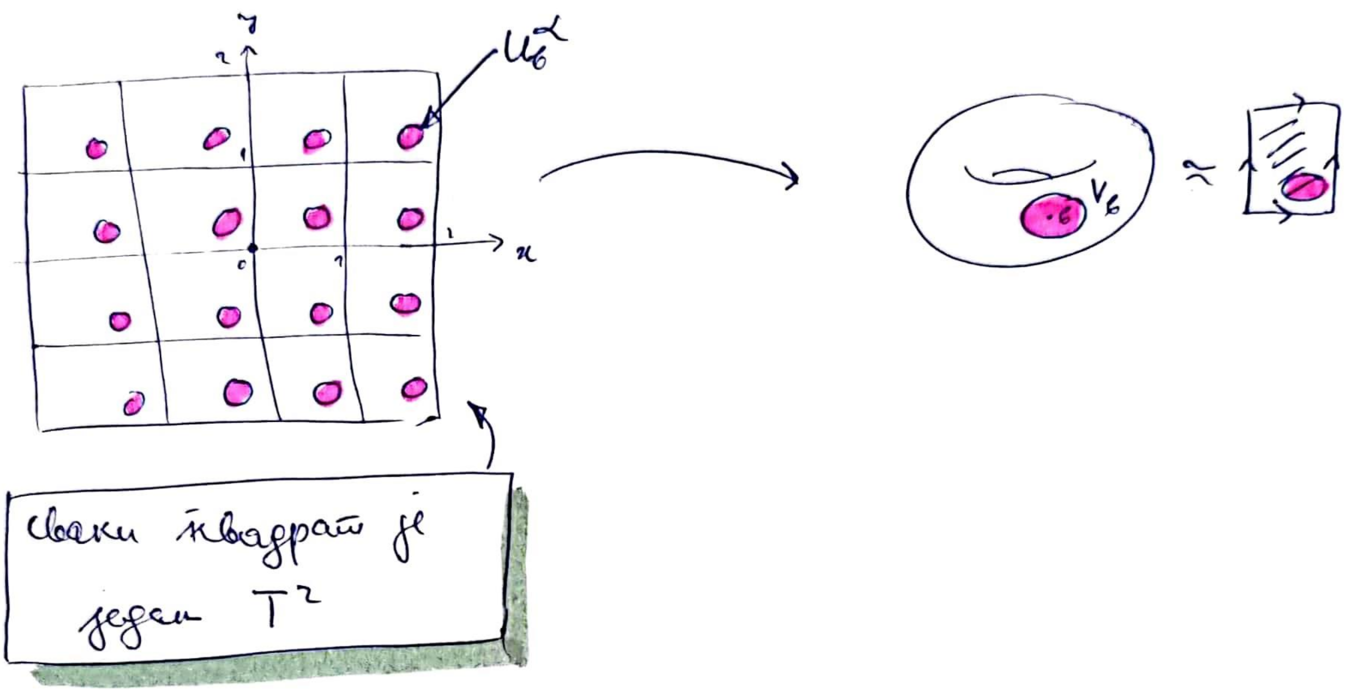




теорема Ако су $p_1: E_1 \to B_1$ и $p_2: E_2 \to B_2$ наткривања, онда је и $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ наткр.

пример Имамо наткривање $\mathbb{R} \to S^1$, па и $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$, тј. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$.

Како се може замислити:



теорема Ако је X Хаусдорфов, $G \neq 0$ коначна група која слободно дејствује на X, онда је $\pi : X \to X/G$ наткривање.

пример $\mathbb{Z}_2$ слободно дејствује на S^n $(\varphi_0 = 1_{S^n}, \varphi_1 = a_{S^n})$

$\Rightarrow S^n \longrightarrow S^n/\mathbb{Z}_2$, тј. $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$

Користимо ознаке:

$$E \to B \quad (E \text{ наткрива } B)$$

$$E \not\to B \quad (E \text{ не наткрива } B)$$

~~став~~ СТАВ За свако $b \in B$, $p^{-1}(\{b\})$ је дискретан потпростор од E (у смислу топологије).

$\boxed{1.}$ Свако наткривање је локални хомеоморфизам.

решење Нека је $p: E \to B$ наткривање

p је локални хомеоморфизам ако

$$(\forall e \in E)(\exists W_e \in \mathcal{T}_E \cap \mathcal{O}(e)) \quad W_e \approx p(W_e) \in \mathcal{T}_B$$

Нека је $e \in E$, $b := p(e)$ и нека је $V_b \in \mathcal{T}_B \cap \mathcal{O}(b)$ из деф. наткривања, тј. $p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A_b} U_b^{\alpha}$, $U_b^{\alpha} \approx V_b$.

$e \in p^{-1}(V_b) \Rightarrow (\exists \alpha_0 \in A_b)\ e \in U_b^{\alpha_0}$. Тада је $W_e := U_b^{\alpha_0}$ тражена околина. □

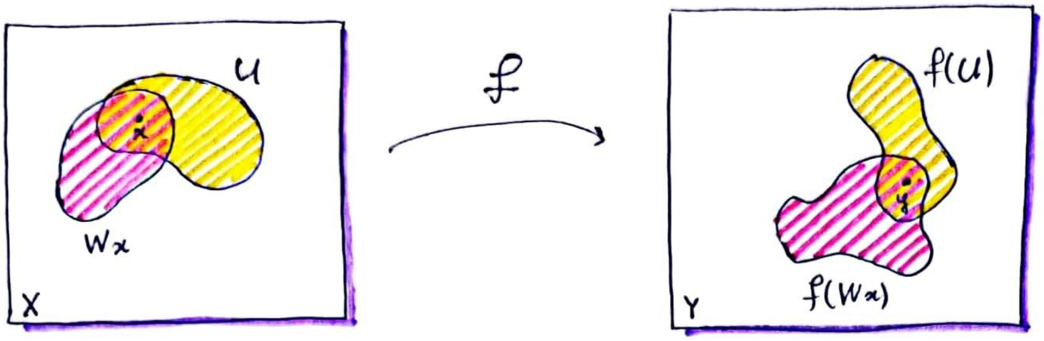
$\boxed{2.}$ Ако је $f: X \to Y$ локални хомеоморфизам, онда је f отворено.

решење Нека је $U \in \mathcal{T}_X$. Показујемо да је $f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

Нека је $y \in f(U)$ произвољно и $x \in U$ т.д. $f(x) = y$.

Како је f локални хомеоморфизам, то

$$(\exists W_x \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{O}(x))\quad W_x \approx f(W_x) \in \mathcal{T}_Y$$



Посматрајмо скуп $f(U \cap W_x)$.

$f|_{W_x}$ је хомеоморфизам па је отворено и $U \cap W_x \in \mathcal{T}_{W_x}$

$$\Rightarrow f(U \cap W_x) \in \mathcal{T}_{f(W_x)} \subseteq \mathcal{T}_Y$$

$\boxed{\text{јер } f(W_x) \in \mathcal{T}_Y}$

Дакле $y \in f(U \cap W_x) \subseteq f(U) \Rightarrow f(U)$ је отворен. ■

Из претходна два задатка закључујемо да је свако наткривање отворено.

Дакле, свако наткривање је непрекидно, „на" и отворено

$\Rightarrow$ наткривање је количничко.

СТАВ ~~став~~ Ако је $p: E \to B$ наткривање, онда

E је површ $\Longleftrightarrow$ B је површ.

СТАВ ~~став~~ Ако је $p: E \to B$ наткривање и B повезан, онда $(\forall b_1, b_2 \in B)$ $\left|p^{-1}(\{b_1\})\right| = \left|p^{-1}(\{b_2\})\right|$.

ДЕФ дефиниција; Нека је $p: E \to B$ наткривање и B повезан. p је n-лисно ако је $|p^{-1}(\{b\})| = n$, за $b \in B$

ПР пример (1) $S^n \to \mathbb{R}P^n$ је дволисно наткривање;

(2) Свако једнолисно наткривање је хомеоморфизам.

Т теорема Нека је $p: E \to B$ наткривање, B путно повезан, $e_0 \in E$, $b_0 := p(e_0) \in B$. Тада је

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

мономорфизам и

$$[\pi_1(B, b_0) : \underbrace{p_*(\pi_1(E, e_0))}_{\cong \pi_1(E, e_0)}] = \underbrace{\left|p^{-1}(\{b_0\})\right|}_{\text{број листова}}$$

(Специјално $\pi_1(E, e_0) \leq \pi_1(B, b_0)$)

ПР пример $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ је дволисно

$$\Rightarrow [\pi_1(\mathbb{R}P^2) : \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0}] = 2 \Rightarrow |\pi_1(\mathbb{R}P^2)| = 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Теорема Нека је $p: E \to B$ покривање, $f: X \to B$ непр. X путно и локално путно повезан, $x_0 \in X$, $e_0 \in E$, $p(e_0) = b_0 = f(x_0)$. Тада постоји подизање

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}: X \to E$ пресликавања f акко

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Последица Ако је додатно X просто повезан, онда постоји подизање.

Пример (1) $f: S^1 \to S^n$, $n > 1 \Rightarrow f \simeq const$

јер $[f] \in \pi_1(S^n) = 0$

(2) $f: S^n \to S^1$, $n > 1 \Rightarrow f \simeq const$

јер $\pi_1(S^n) = 0$ то постоји $\tilde{f}: S^n \to \mathbb{R}$ т.д. $p \circ \tilde{f} = f$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

(p = намотавање $\mathbb{R}$ на S^1).

f се факторише кроз $\mathbb{R} \simeq * \Rightarrow f \simeq const$

(3) $f: S^m \to S^n$, $m < n \Rightarrow f \simeq const$

Теорема [Борсук-Улам] Ако је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно, онда $(\exists\, x_0 \in S^n)$ $f(x_0) = f(-x_0)$.

Теорема [БУТ1] Не постоји непрекидно непарно пресликавање $g: S^n \to S^{n-1}$.

БУТ $\Leftrightarrow$ БУТ1 (за $n=2$ доказујемо)

доказ: $\Rightarrow$: птс. Нека је $g: S^2 \to S^1$ непр. и непарно, тј. $g(-x) = -g(x)$, за свако $x \in S^2$.

Имамо наткривање $p: \mathbb{R} \to S^1$ и S^2 је просто повезан па постоји подизање $\tilde{g}: S^2 \to \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

На основу БУТ: $(\exists x_0 \in S^2)\ \tilde{g}(x_0) = \tilde{g}(-x_0)$

па је $p(\tilde{g}(x_0)) = p(\tilde{g}(-x_0))$, тј.

$$g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = 0,$$

али $0 \notin S^1$ ↯

$\Leftarrow$: Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}$ и птс. $(\forall x \in S^2)\ f(x) \neq f(-x)$.

Нека је $g: S^2 \to S^1$ дато са

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

g је непр. и непарно ↯

$\Rightarrow (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$. □

Напомена: део $\Rightarrow$: из претходног доказа може се урадити и без натприкривања, само се не композицију $S^2 \xrightarrow{g} S^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^2$ примени БУТ (тај доказ пролази за свако $n \in \mathbb{N}$).

Следећа теорема је још један еквивалент БУТ:

теорема Ако су $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}_{S^2}$ и $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, онда бар један од ова три скупа садржи пар антиподалних тачака са сфере, тј.

$$(\exists i \in \{1,2,3\})(\exists x_0 \in S^2) \quad x_0, -x_0 \in A_i.$$

доказ Нека су $d_1, d_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ дате са

$$d_1(x) = d(x, A_1), \quad d_2(x) = d(x, A_2)$$

и нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x) = (d_1(x), d_2(x))$.

$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$

$\Rightarrow \quad d_1(x_0) = d_1(-x_0) \quad$ и $\quad d_2(x_0) = d_2(-x_0)$.

1° $x_0 \in A_1 \Rightarrow d_1(x_0) = 0 = d_1(-x_0) \Rightarrow -x_0 \in A_1$

2° $x_0 \in A_2 \Rightarrow d_2(x_0) = 0 = d_2(-x_0) \Rightarrow -x_0 \in A_2$

3° $x_0 \notin A_1 \cup A_2 \Rightarrow x_0 \in A_3$ и $d_1(x_0) = d_1(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin A_1$,

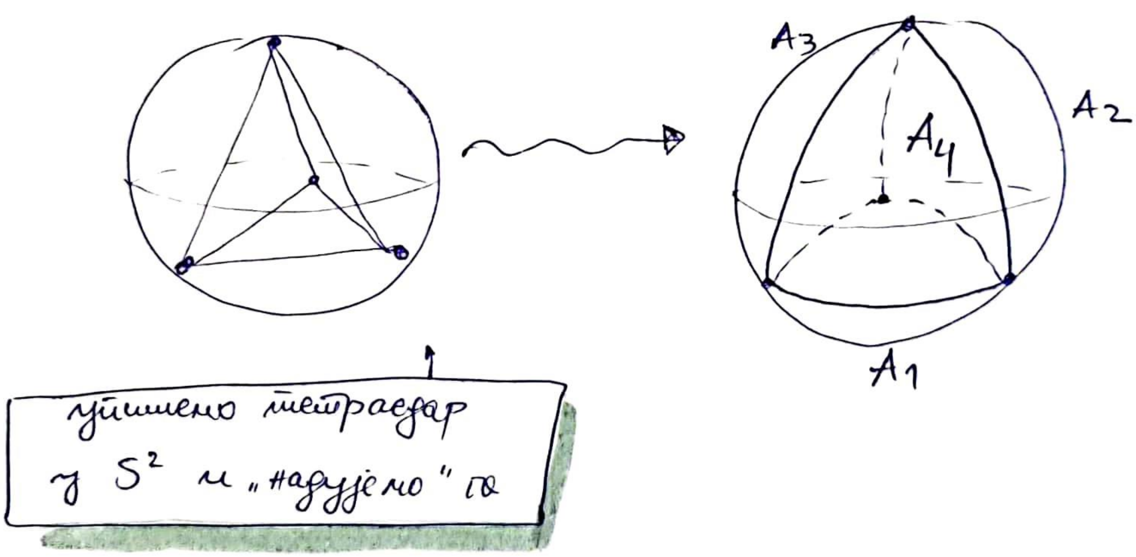
$d_2(x_0) = d_2(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin A_2$

$\Rightarrow -x_0 \in A_3$. $\square$

Напомена (1) Претходна теорема важи и за отворене скупове A_1, A_2, A_3;

(2) Теорема важи и за S^n покривен са $n+1$ затворених (или отворених) скупова, $n \in \mathbb{N}$.

(3) Са 4 скупа можемо покрити S^2 т.д. ниједан не садржи пар антиподалних тачака:



$\boxed{3.}$ Да ли постоје наткривања:

(а) $T^2 \to \mathbb{R}P^2$; (б) $\mathbb{R}P^2 \to T^2$; (в) $S^2 \to \mathbb{R}^2$;

(г) $\mathbb{R}^2 \to S^2$; (д) $C \to M$; (ђ) $M \to C$?

решење (а) Ако би постојало, онда би било

$$\pi_1(T^2) \leq \pi_1(\mathbb{R}P^2),$$

тј. $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}_{\text{бесконачна}} \leq \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{коначна}}$ ↯

$\Rightarrow \boxed{T^2 \not\to \mathbb{R}P^2}$

(б) Ако би постојало, онда

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \leq \pi_1(T^2),$$

тј. $\underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{има ел. коначног реда}} \leq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}_{\text{нема ел. коначног реда}}$ ↯ $\Rightarrow \boxed{\mathbb{R}P^2 \not\to T^2}$

(в) Ако би постојало наткривање $p: S^2 \to \mathbb{R}^2$, оно мора бити непрекидно и „на", тј. $p(S^2) = \mathbb{R}^2$.

Како је S^2 компактан, онда је $p(S^2) = \mathbb{R}^2$ компактан ↯

$\Rightarrow \boxed{S^2 \not\to \mathbb{R}^2}$

(г) $\pi_1(S^2) = 0 = \pi_1(\mathbb{R}^2)$. Ако постоји наткривање, онда оно има $[\pi_1(S^2) : \pi_1(\mathbb{R}^2)] = 1$ лист, тј. мора бити хомеоморфизам, али $S^2 \not\cong \mathbb{R}^2 \Rightarrow \boxed{\mathbb{R}^2 \not\to S^2}$

(д) Посматрајмо слободно дејство $\mathbb{Z}_2$ на C:

$$0 \longmapsto 1_C$$

$$1 \longmapsto a_C$$

Тада $C \longrightarrow C/\mathbb{Z}_2$

$C/\mathbb{Z}_2 =$  $= M$

$\Rightarrow$ $\boxed{C \to M}$

(ђ) Ако су X и Y многострукости са границом и $f: X \to Y$ локални хомеоморфизам и „на", онда је $f(\partial X) = \partial Y$.

Специјално ако постоји наткривање $p: M \to C$ оно је локални хомеоморфизам и „на", па је

$$\underset{\text{повезан}}{p(\partial M)} = \underset{\text{неповезан}}{\partial C} \quad ↯ \quad \Rightarrow \boxed{M \not\to C}$$ □

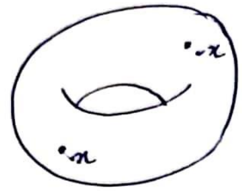
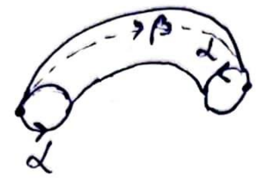
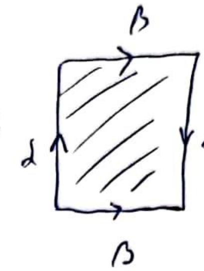
$\boxed{4.}$ Да ли постоје наткривања:

(а) $T^2 \longrightarrow K$; (б) $K \longrightarrow T^2$?

решење $\mathbb{Z}_2$ дејствује слободно на T^2

$0 \mapsto 1_{T^2}, \qquad 1 \mapsto a_{T^2}$

$\Rightarrow T^2 \to T^2/\mathbb{Z}_2$

$T^2/\mathbb{Z}_2 =$  $/\mathbb{Z}_2 \simeq$  $\simeq$  $= K$

$\Rightarrow \boxed{T^2 \to K}$

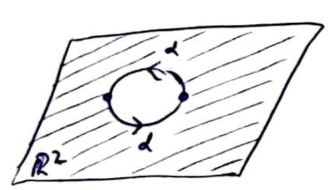
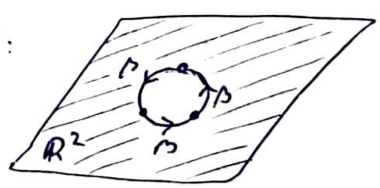
(б) Ако $K \to T^2$, онда $\pi_1(K) \le \pi_1(T^2)$, тј.

$\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^2 = 1 \rangle \le \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ↯

није Абелова

Абелова

$\Rightarrow \boxed{K \not\to T^2}$ $\square$

5. X:  Y: 

Да ли постоје наткривања $X \to Y$ и $Y \to X$?

решење $X \simeq S^1 \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(Y)$

Ако постоји наткривање $p: X \to Y$, оно је „на". Приметимо X је површ, а Y није.

Нека је $y \in \beta \subseteq Y$ и $x \in X$ т.д. $p(x) = y$.

Како је p локални хомеоморфизам, то

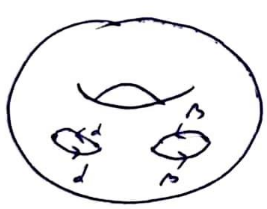
$$(\exists U_x \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{O}(x))\ U_x \cong p(U_x),$$

али $U_x =$ , $p(U_x) \cong$  ↯

$\Rightarrow \boxed{X \not\to Y}$.

Слично $\boxed{Y \not\to X}$ ∎

Лема Нека је $p: E \to B$ наткривање, E компактан, B T_1 и повезан. Тада је број листова коначан.

6. X: 

Да ли $S^2 \to X$?

решење

$$X = M_1 \# N_1 \# N_1 \approx N_4 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2 = 1 \rangle$$

На основу леме имамо да је број листова коначан

$\Rightarrow [\pi_1(N_4) : \pi_1(S^2)] = |\pi_1(N_4)| =$ коначан,

али $\pi_1^{ab}(N_4) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$ - бесконачна $\Rightarrow \pi_1(N_4)$ - бесконачна ↯

$\Rightarrow \boxed{S^2 \not\to X}$. ∎

7. Да ли постоје наткривања $X \to Y$ и $Y \to X$:

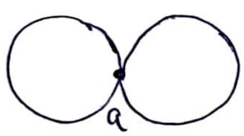
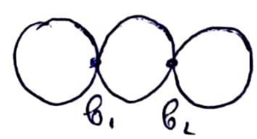
(а) X:  Y: 

(б) X:  Y: 

решење

(а) Наткривање је локални хомеоморфизам.
У X имамо тачку са околином X, а тога нема у Y па та тачка нема у шта да се слика.
Слично, у Y имамо чега нема у X.

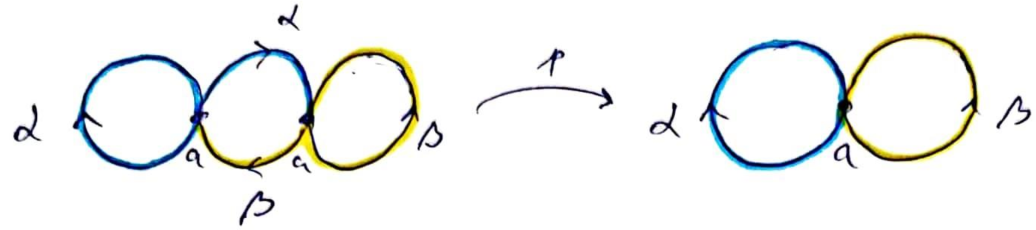
$\Rightarrow X \not\to Y$ и $Y \not\to X$

(б) X:  Y: 

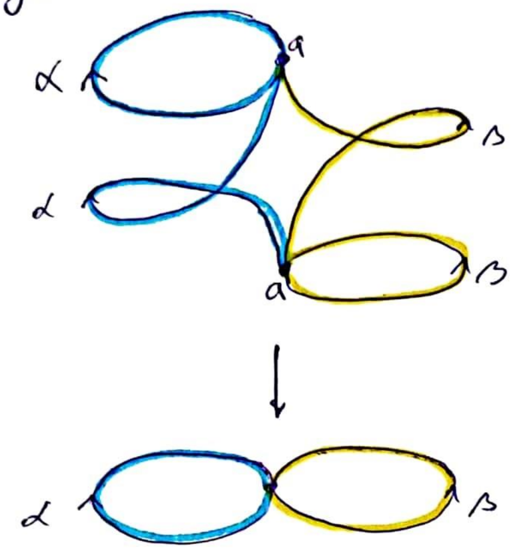
ако постоји $p: X \to Y$ оно мора и у b_1 и у b_2 да слика тачке са околинама X, али у X имамо само једну такву тачку, па p не постоји $\Rightarrow X \not\to Y$.

Обрнуто, ако $p: Y \to X$ онда $p(b_1) = p(b_2) = a$ па наткривање мора бити дволисно.

$\boxed{Y \to X}$ и изгледа овако:



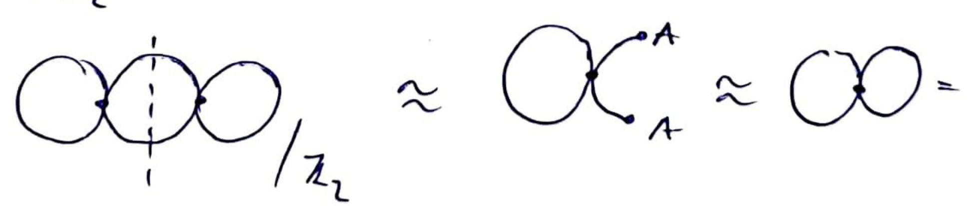
илустрација:



2. начин: $\mathbb{Z}_2$ слободно дејствује на Y

$0 \mapsto \mathbb{1}_Y, \quad 1 \mapsto a_Y$

$\Rightarrow \; Y \to Y/\mathbb{Z}_2$

$Y/\mathbb{Z}_2 =$  $= X$

$\Rightarrow \; Y \to X$. □

Из претходног задатка имамо $\pi_1(Y) \leq \pi_1(X)$,

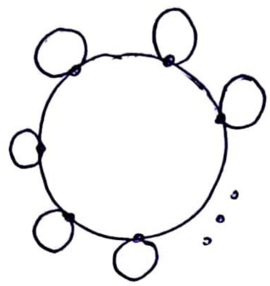
тј. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, а следећи задатак је

уопштење тога:

$\boxed{8.}$ За свако $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ има подгрупу

изоморфну $\mathbb{Z}^{*n}$.

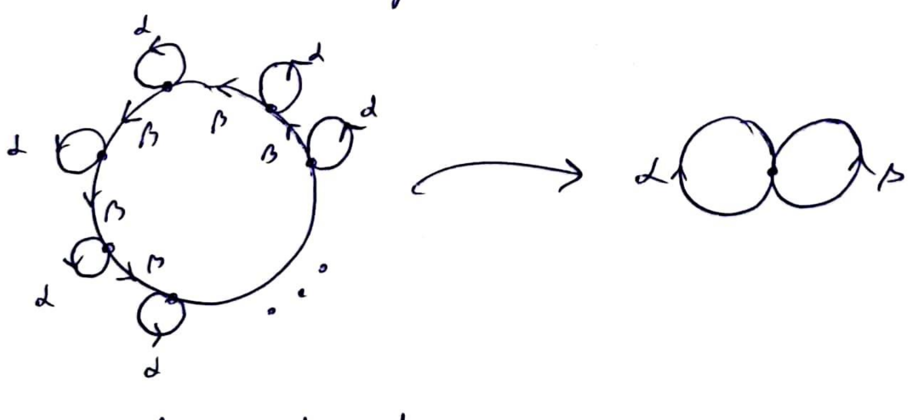
решење Нека је X:



$X = S^1$ са још $(n-1)$ закачених кругова.

$X \simeq \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n} \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{*n}$.

Имамо наткривање



тј. $X \to S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \leq \pi_1(S^1 \vee S^1)$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^{*n} \leq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(2. начин $\mathbb{Z}_{n-1}$ слободно дејствује на X ...) ■

Нека је $f: G \to H$ хомоморфизам група

(1) f изоморфизам $\Rightarrow f^{ab}$ изоморфизам ;

(2) f епиморфизам $\Rightarrow f^{ab}$ епиморфизам ;

(3) f мономорфизам $\not\Rightarrow f^{ab}$ мономорфизам.

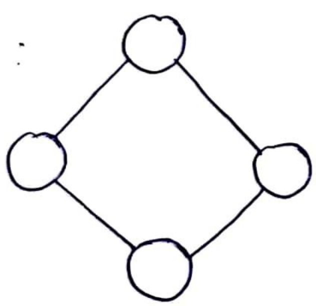
нпр. $p_* : \mathbb{Z}^{*3} \to \mathbb{Z}^{*2}$ је мономорфизам (из зад. 7),

али $p_*^{ab} : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ није мономорфизам

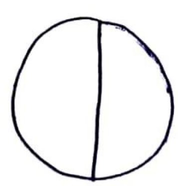
(јер $\mathbb{Z}^3 \not\leq \mathbb{Z}^2$).

$\boxed{9.}$ Да ли постоји неко од 6 могућих наткривања међу просторима:

X :



Y :



Z :

решење Генерално, ако у простору W имамо k тачака са неком специфичном околином (нпр $\curlywedge$), а у T имамо l таквих тачака и $W \to T$, онда је наткривање n-лисно где је $k = n \cdot l$.

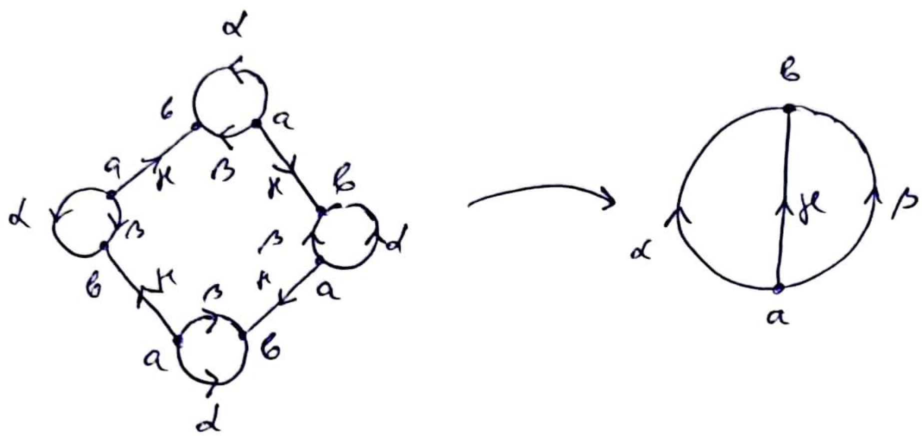
Специјално, $l \mid k$.

$X \to Y$?

$k = 8$ (8 тачака у X има околину λ)

$l = 2$

$8 = 2 \cdot n \Rightarrow$ наткривање мора бити 4-лисно



$\Rightarrow \boxed{X \to Y}$

2. начин: $\mathbb{Z}_4$ слободно дејствује на X

(φ_k = ротација за $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \{0,1,2,3\}$)

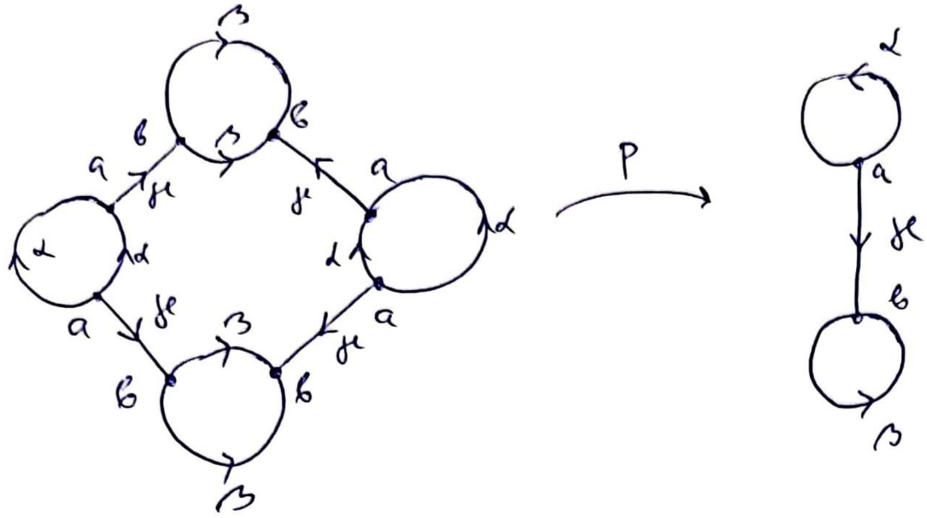
$\Rightarrow X \to X/\mathbb{Z}_4 \cong Y$

$Y \to X$?

$k = 2$, $l = 8$ $\Big\}$ $8 \nmid 2 \Rightarrow \boxed{Y \not\to X}$

$X \to Z$?

$k = 8$, $l = 2$ $\Big\} \Rightarrow$ наткривање мора бити 4-лисно



$\Rightarrow \boxed{X \to Z}$

$Z \to X$?

$\left.\begin{array}{l} k=2 \\ l=8 \end{array}\right\}$ $8 \nmid 2 \Rightarrow Z \not\to X$

$Y \to Z$?

$\left.\begin{array}{l} k=2 \\ l=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $n=1 \Rightarrow$ наткривање је хомеоморфизам,
али $Y \not\cong Z$

$\Rightarrow \boxed{Y \not\to Z}$

$Z \to Y$?

слично $\boxed{Z \not\to Y}$ ■

Ако је $p: E \to B$ наткривање са n листова и E и B имају дефинисане Ојлерове карактеристике, онда

$$\boxed{\chi(E) = n \cdot \chi(B)}$$

подсетник:

M_g - 1 теме, $2g$ ивица, 1 страна

$$\Rightarrow \chi(M_g) = 2 - 2g$$

N_h - 1 теме, h ивица, 1 страна

$$\Rightarrow \chi(N_h) = 2 - h$$

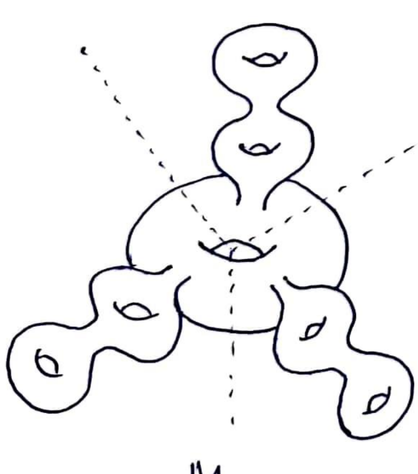
10. Да ли постоји наткривање $M_7 \to M_3$?

решење

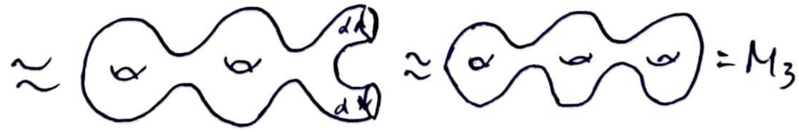
$$\left.\begin{aligned} \chi(M_7) &= 2 - 14 = -12 \\ \chi(M_3) &= 2 - 6 = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 3$$

ако наткривање постоји оно је трослојно.

Дејствујемо са $\mathbb{Z}_3$ на M_7


$/\mathbb{Z}_3$

M_7



$$\Rightarrow \boxed{M_7 \to M_3}$$ ∎

11. $M_g \to M_h$ акко $g = n(h-1)+1$ за неко $n \in \mathbb{N}$.

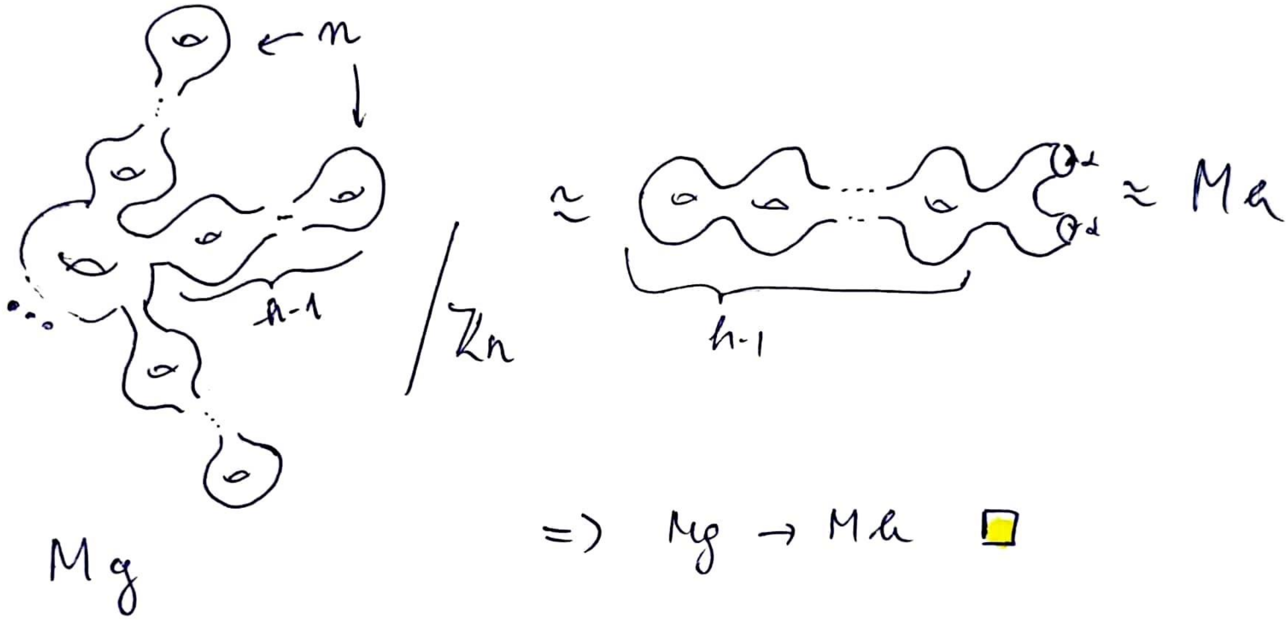
решење

$\Rightarrow$: $\chi(M_g) = n \cdot \chi(M_h)$, n = бр. листова

$$2-2g = n(2-2h)$$

$$g = n(h-1)+1$$

$\Leftarrow$: $\mathbb{Z}_n$ дејствује слободно на $M_g = M_{n(h-1)+1}$ (као зад. 10)



$\Rightarrow$ $M_g \to M_h$ $\square$

12. Доказати да $N_5 \to N_3$.

решење

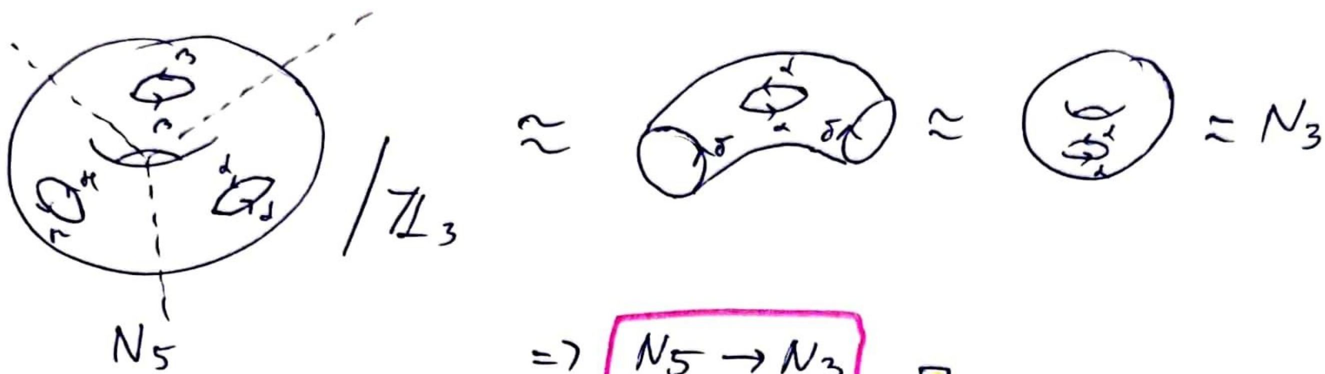
$\chi(N_5) = 2-5 = -3$, $\chi(N_3) = 2-3 = -1$

$\Rightarrow$ наткривање је тролисно.

Приметимо $N_5 \simeq M_1 \# N_1 \# N_1 \# N_1$

$N_3 \simeq M_1 \# N_1$

$\mathbb{Z}_3$ дејствује слободно на N_5



$\Rightarrow \boxed{N_5 \to N_3}$ ∎

За вежбу:

(1) $g, h, n \in \mathbb{N}$ т.д. $g = n(h-2)+2$, онда $N_g \to N_h$;

(2) $g \in \mathbb{N}_0$, $h, n \in \mathbb{N}$ т.д. $g = n(h-2)+1$, онда $M_g \to N_h$.