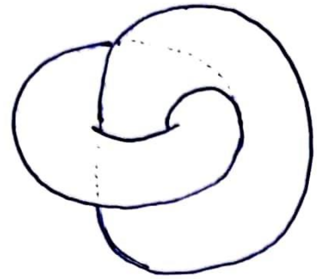
$\boxed{15.}$

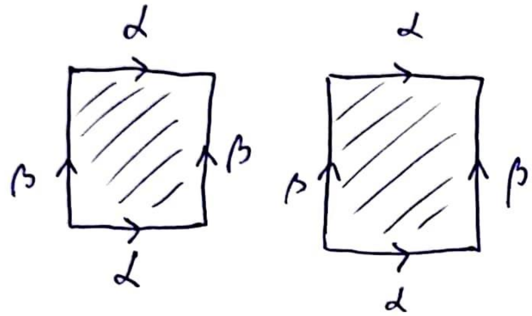
X: 

X = два уланчана торуса

(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) Да ли је десни T^2 ретракт од X?

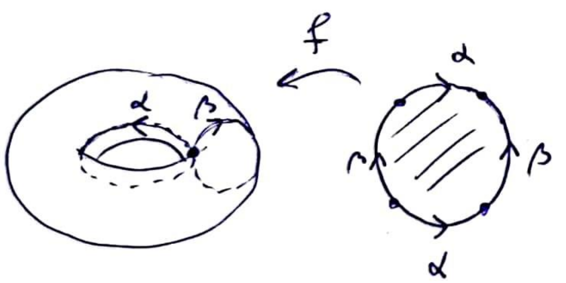
решење

(а) $X \simeq$ 

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

2. начин

Простор X можемо видети као $X = D^2 \cup_f T^2$



$f : S^1 \to T^2$

$[f] = \underbrace{[\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}]}_{=1} = [const]$

јер α и β комутирају у $\pi_1(T^2)$

$\Rightarrow f \simeq const$

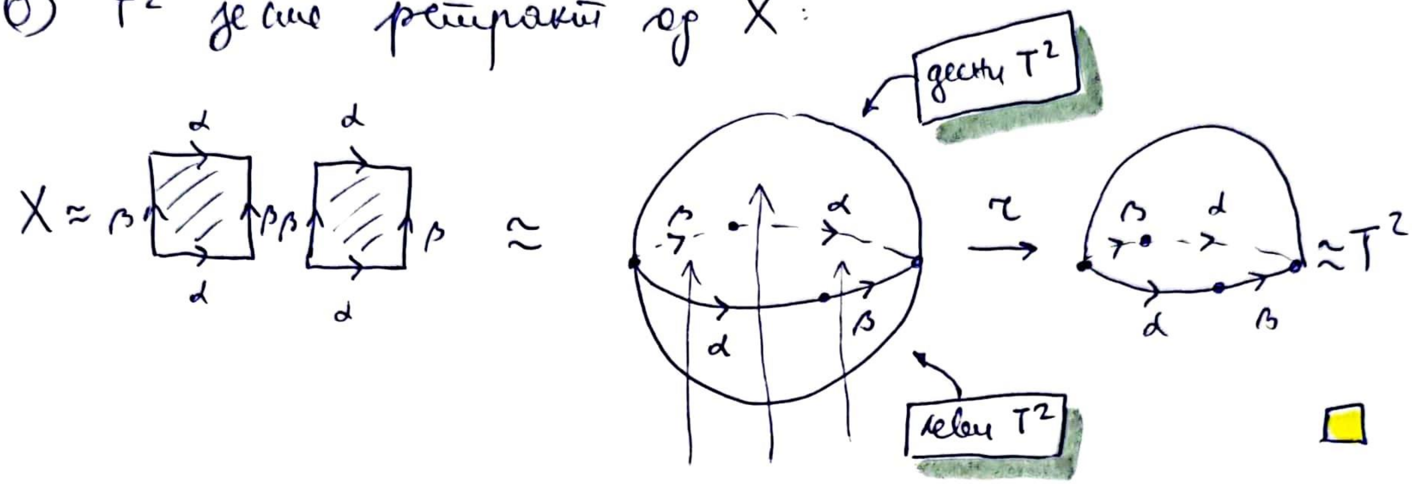
$\Rightarrow C_f \simeq C_{const}$

$C_f = D^2 \cup_f T^2 \simeq C_{const} \simeq D^2/S^1 \vee T^2 \simeq S^2 \vee T^2$

$\Rightarrow \; X \simeq S^2 \vee T^2$

$\Rightarrow \; \pi_1(X) \cong \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} * \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

б) T^2 јесте ретракт од X:



$\boxed{16.}$ Доказати да ∂M није ретракт од M.

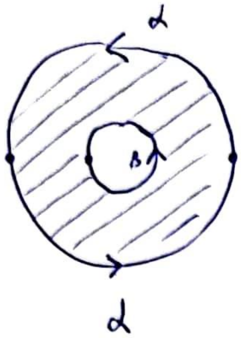
решење птс. $\exists\, r: M \to \partial M$ ретракција

$M \simeq \partial M \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(\partial M) \cong \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \partial M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & M \arrow[d, "r"] \\ & \partial M \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{\pi_1} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Нема контрадикције

У оваквој ситуацији желимо боље да разумемо пресликавања i_* и r_*, па зато гледамо шта су генератори група $\pi_1(M)$ и $\pi_1(\partial M)$.

$M \approx$ 

$\pi_1(M) \cong \langle \alpha \mid - \rangle$

јер $M \simeq$  $\approx$ 

$\pi_1(\partial M) \cong \langle \beta \mid - \rangle$

јер $\partial M \approx$ 

$i_*(\beta)$ = убацимо β у M и гледамо чему је то хомотопно

Из горње модела је очигледно $i_*(\beta) = 2\alpha$.

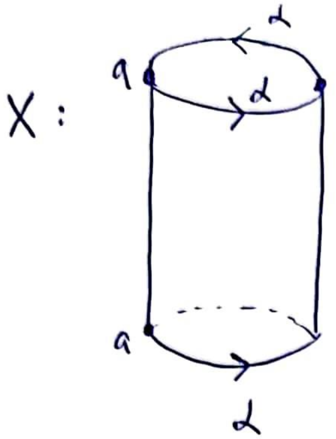
Дакле, генератор β се слика у 2 пута ген. α, па је i_* заправо множење са 2.

$r_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ је хомоморфизам па је то множење са неким $k \in \mathbb{Z}$. Коначно, $\mathbb{1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ је множење са 1. Имамо:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[dr, "\cdot 1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot k"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \Rightarrow \cdot 2k = \cdot 1 \quad ↯$$

(напомена: формално, $\alpha = [\bar\alpha]$, $\bar\alpha : S^1 \to M$, $\beta = [\bar\beta]$, $\bar\beta : S^1 \to \partial M$, па је $i_*(\beta) = [i \circ \bar\beta]$ итд. али нећемо компликовати запис.)

17.

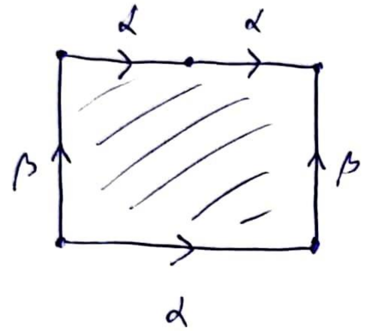
X: 

(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) Да ли је α ретракт од X?

решење

(а)

$X \approx$ 

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} = 1 \rangle$$

(б) $\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} = 1\rangle \cong Ab\langle \alpha, \beta \mid \alpha = 1\rangle \cong \mathbb{Z}\langle \beta \rangle$

ПТС. $\exists\, r : X \to \alpha$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & \alpha \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \pi_1(X) \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \overset{ab}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \arrow[r, "i_*^{ab}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}\langle\beta\rangle \arrow[d, "r_*^{ab}"] \\ & \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \end{tikzcd}$$

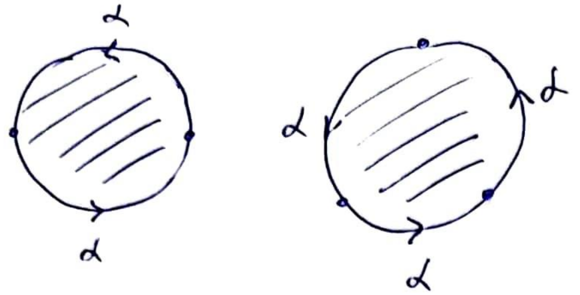
$\alpha \longmapsto 0$

$$i_*^{ab}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}(\alpha) = r_*^{ab}(i_*^{ab}(\alpha)) = 0 \neq \alpha \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ α није ретракт од X. ■

$\boxed{18.}$ X :

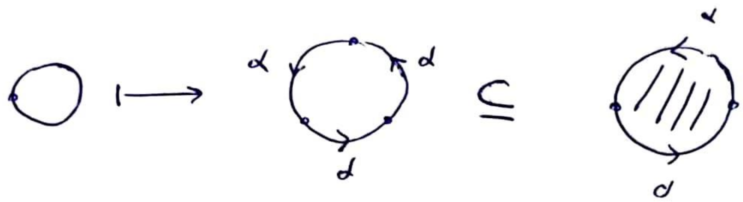


Показати $X \simeq S^2$

решење

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha \mid \underbrace{\alpha^2 = 1, \alpha^3 = 1}_{\alpha = 1} \rangle \cong 0 \cong \pi_1(S^2)$$

Нека је $f : S^1 \to \mathbb{R}P^2$ намотавање 3 пута



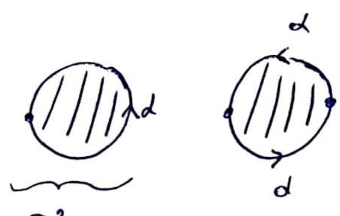
$= \mathbb{R}P^2$

Приметимо $C_f = CS^1 \cup_f \mathbb{R}P^2 \simeq D^2 \cup_f \mathbb{R}P^2 \simeq X$

$[f] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2 \langle [\alpha] \rangle$

$$[f] = [\alpha\alpha\alpha] = \underbrace{[\alpha] + [\alpha]}_{0 \text{ у } \pi_1(\mathbb{R}P^2)} + [\alpha] = [\alpha] \Rightarrow f \simeq \alpha \Rightarrow C_f \simeq C_\alpha$$

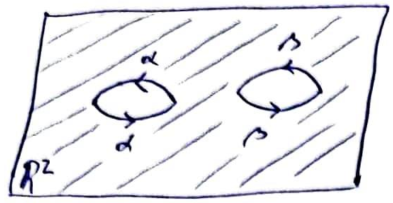
$C_\alpha = CS^1 \cup_\alpha \mathbb{R}P^2 \simeq$



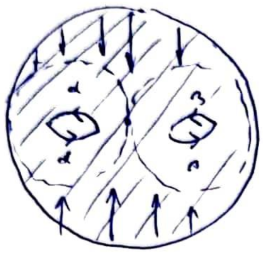
$\underset{/D^2}{\simeq}$ S^2

$\Rightarrow X \simeq S^2$. $\square$

19.

X:  $\pi_1(X) = ?$

решење

$X \simeq$  $\underset{ДР}{\simeq}$  $\simeq M \vee M$

ДР на D^2

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(M) * \pi_1(M) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ $\square$

20. Одредити фундаменталне групе простора:

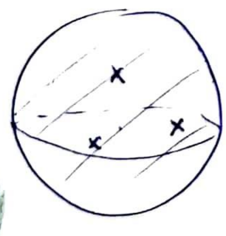
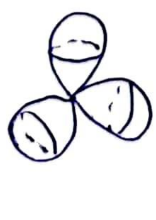
(а) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

(б) $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (Ox \cup Oy \cup Oz)$

(в) $Z = Y \cup \{(17,0,0), (0,12,0)\}$

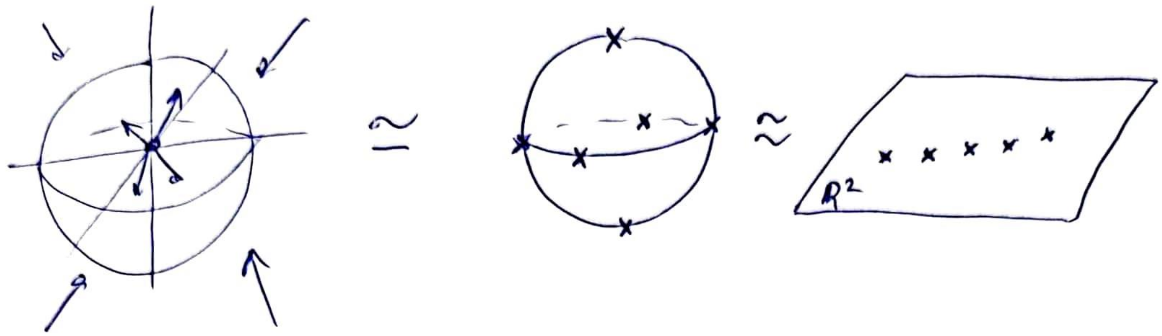
(г) $T = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{7} l_i$, l_i - паралелне праве

решење

(а) $X \simeq$  $\simeq$  $\simeq S^2 \vee S^2 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X) = 0$

ДР на D^3

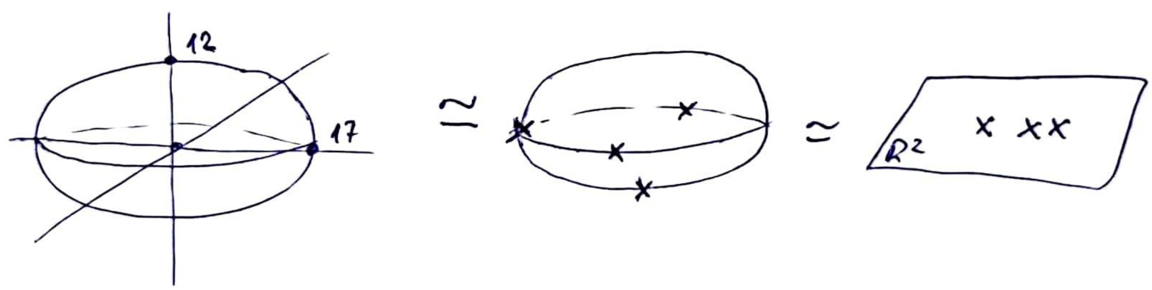
(б) Како $(0,0,0) \notin Y$ имамо ДР са Y на S^2 без $S^2 \cap (Ox \cup Oy \cup Oz)$, тј. $Y \simeq S^2 \setminus A$, $|A| = 6$

Y ≃ 

$$Y \simeq S^2 \setminus A \simeq \mathbb{R}^2 \setminus (A \setminus x) \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$$

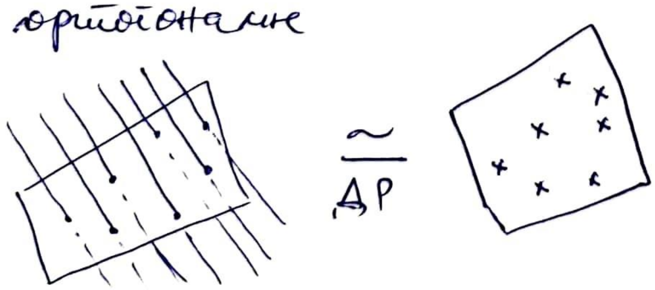
$$\Rightarrow \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}^{*5}$$

(в) слично као (б) само не правимо ДР на S^2 већ на елипсоид који садржи $(17,0,0)$ и $(0,12,0)$

Z ≃ 

Дакле $Z \simeq S^2 \setminus A$, $|A| = 4$, па је $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

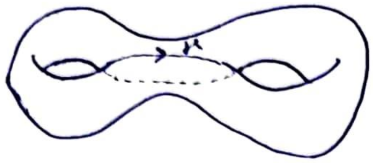
(г) Направимо ДР на раван $\mathbb{R}^2$ на коју су праве l_i ортогоналне

T ≃ 

$\simeq \mathbb{R}^2 \setminus A$, $|A| = 7$

$$\Rightarrow \quad T \simeq \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{7} \Rightarrow \pi_1(T) \cong \mathbb{Z}^{*7} \quad \square$$

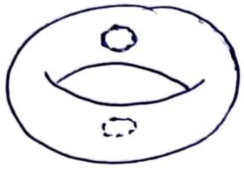
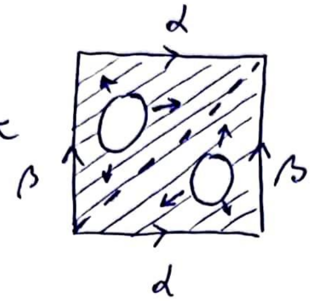
$\boxed{21.}$

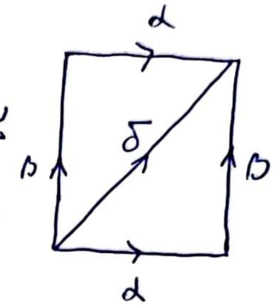
X: 

(а) $\pi_1(X \setminus \mu) = ?$

(б) $\pi_1(X / \mu) = ?$

решење

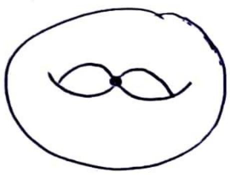
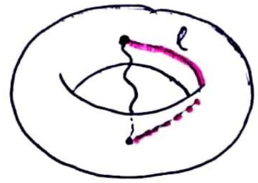
(а) $X \setminus \mu \simeq$  $\simeq$ 

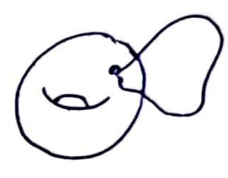
$\cong$ 

$\cong$

$\simeq$ 

$\simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(X \setminus \mu) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(б) $X / \mu \simeq$  $\simeq$ 

$\underset{/l}{\simeq}$ 

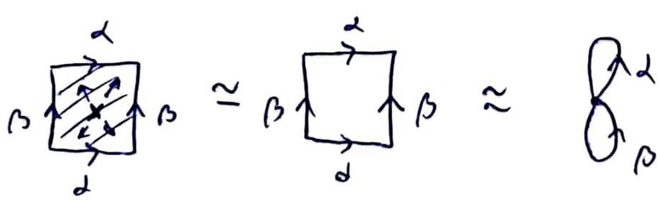
$\Rightarrow X / \mu \simeq S^1 \vee T^2 \Rightarrow \pi_1(X / \mu) \cong \mathbb{Z} * (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ ■

$\boxed{22.}$ X: 

$\pi_1(X) = ?$

решење

Приметимо $X^* \simeq T^2 \Rightarrow X \simeq T^2 \setminus *$

$T^2 \setminus * \simeq$ 

$\simeq S^1 \vee S^1$

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$ ■

Наткривања

дефиниција Пресликавање $p: E \to B$ је наткривање ако је непрекидно, „на" и ако

$$(\forall b \in B)\left(\exists V_b \in \mathcal{T}_E \cap \mathcal{O}(b)\right) \quad p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A_b} U_b^{\alpha}$$

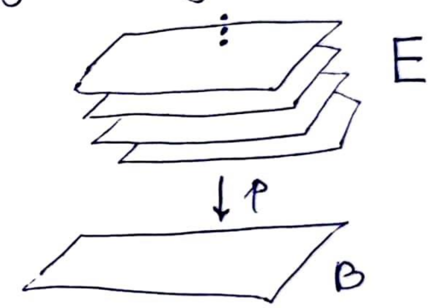
где је $(\forall \alpha \in A_b)\ U_b^{\alpha} \in \mathcal{T}_E$ и $U_b^{\alpha} \approx V_b$.

B називамо базним, а E тоталним простором.

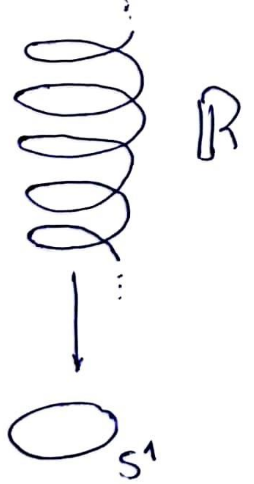
пример (1) $E = B \times D$, D-дискретан топ. пр., $p = p_1$ = пројекција на 1. координату

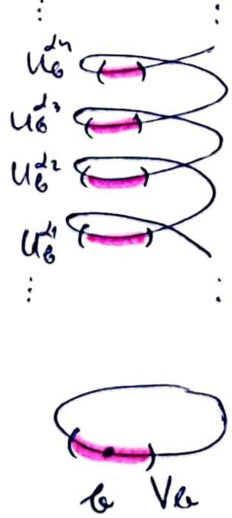
$$\begin{array}{c} E = B \times D \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_1} \\ B \end{array}$$

је дискретно наткривање



(2) $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

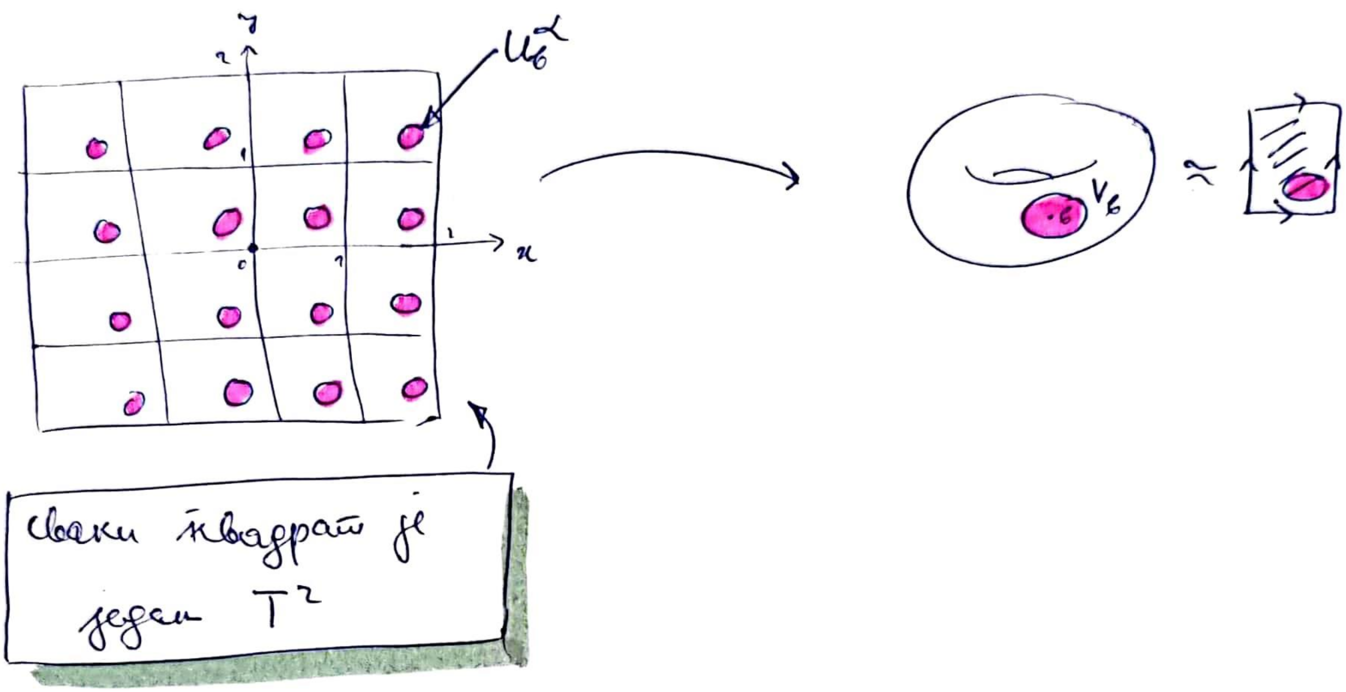




теорема Ако су $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$ наткривања, онда је и $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ наткр.

пример Имамо наткривање $\mathbb{R} \to S^1$, па и $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, тј. $\mathbb{R}^2 \to T^2$.

Како се може замислити:



теорема Ако је X Хаусдорфов, $G \neq 0$ коначна група која слободно дејствује на X, онда је $\pi : X \to X/G$ наткривање.

пример $\mathbb{Z}_2$ слободно дејствује на S^n $(\varphi_0 = 1_{S^n}, \varphi_1 = a_{S^n})$

$\Rightarrow$ $S^n \to S^n/\mathbb{Z}_2$, тј. $S^n \to \mathbb{RP}^n$

Користимо ознаке:

$E \to B$ (E натрива B)

$E \not\to B$ (E не натрива B)

~~став~~ СТАВ За свако $b \in B$, $p^{-1}(\{b\})$ је дискретан потпростор од E (у смислу топологије).

$\boxed{1.}$ Свако натривање је локални хомеоморфизам.

решење Нека је $p: E \to B$ натривање

p је локални хомеоморфизам ако

$$(\forall e \in E)(\exists W_e \in \mathcal{T}_E \cap \mathcal{O}(e)) \quad W_e \approx p(W_e) \in \mathcal{T}_B$$

Нека је $e \in E$, $b := p(e)$ и нека је $V_b \in \mathcal{T}_B \cap \mathcal{O}(b)$ из деф. натривања, тј. $p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A_b} U_b^{\alpha}$, $U_b^{\alpha} \approx V_b$.

$e \in p^{-1}(V_b) \Rightarrow (\exists \alpha_0 \in A_b)\ e \in U_b^{\alpha_0}$. Тада је $W_e := U_b^{\alpha_0}$ тражена околина. $\square$

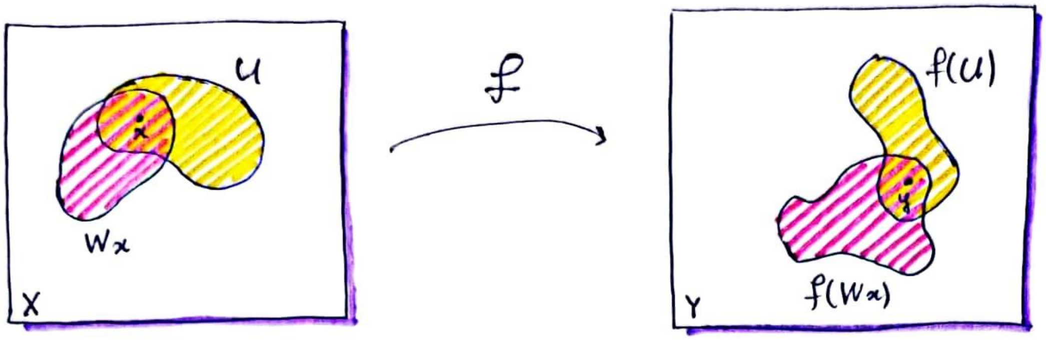
$\boxed{2.}$ Ако је $f: X \to Y$ локални хомеоморфизам, онда је f отворено.

решење Нека је $U \in \mathcal{T}_X$. Показујемо да је $f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

Нека је $y \in f(U)$ произвољно и $x \in U$ т.д. $f(x) = y$.

Како је f локални хомеоморфизам, то

$$(\exists W_x \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{O}(x)) \quad W_x \approx f(W_x) \in \mathcal{T}_Y$$



Посматрајмо скуп $f(\mathcal{U} \cap W_x)$.

$f|_{W_x}$ је хомеоморфизам па је отворено и $\mathcal{U} \cap W_x \in \mathcal{T}_{W_x}$

$$\Rightarrow \quad f(\mathcal{U} \cap W_x) \in \mathcal{T}_{f(W_x)} \subseteq \mathcal{T}_Y$$

јер $f(W_x) \in \mathcal{T}_Y$

Дакле $\quad y \in f(\mathcal{U} \cap W_x) \subseteq f(\mathcal{U}) \Rightarrow f(\mathcal{U})$ је отворен. $\square$

Из претходна два задатка закључујемо да је свако натркривање отворено.

Дакле, свако натркривање је непрекидно, „на" и отворено

$\Rightarrow$ натркривање је количничко.