10. Ако је B путно повезан и $p: E \to B$ фибрација, онда је p „на".

решење Нека је $e_0 \in E$ произвољно и $b_0 = p(e_0)$.
Нека је $b \in B$ произвољно, тражимо шта се слика у b.
У дефиницији фибрације имамо слободу да бирамо X, F и f, па само треба паметно да их одаберемо.

B путно повезан $\Rightarrow$ $(\exists\, u: I \to B)$ $u(0) = b_0$, $u(1) = b$.

Бирамо: $X = *$, $F: * \times I \to B$ дато са $F(*, t) = u(t)$

и $f: * \times \{0\} \to E$ т.д. $p(f(*,0)) = F(*,0) = u(0) = b_0$, па нека је баш $f(*,0) := e_0$.

$$\begin{tikzcd} * \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ * \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

комутира јер:

$$\begin{tikzcd} (*,0) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\hookrightarrow"] & e_0 \arrow[d, mapsto, "p"] \\ (*,0) \arrow[r, mapsto, "F"] & b_0 \end{tikzcd}$$

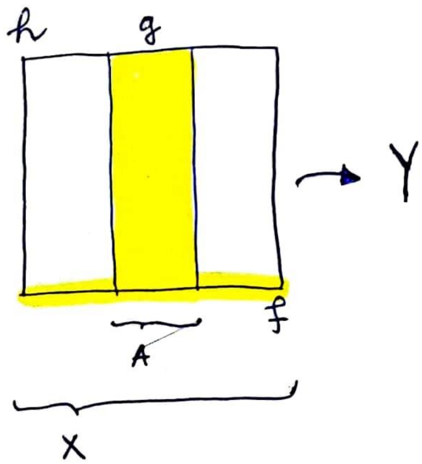
$\Rightarrow (\exists \tilde{F} : * \times I \to E) \quad p \circ \tilde{F} = F$ и $\tilde{F} \circ i = f$

Специјално, $b = u(1) = F(*,1) = p(\tilde{F}(*,1))$

$\Rightarrow \tilde{F}(*,1)$ се слика у $b \Rightarrow p$ је „на" $\square$

дефиниција: Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. Кажемо да пар (X,A) има својство проширења хомотопије (HEP = homotopy extension property) ако за сваки тополошки простор Y и свако непр. пресл. $F : X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ постоји непр. $\bar{F} : X \times I \to Y$ т.д. $\bar{F}|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = F$.

мало детаљније: (X,A) има HEP ако



$$\underbrace{f : X \to Y,\ f|_A \simeq g,\ g : A \to Y}$$

$$\Downarrow$$

$(\exists h : X \to Y) \ h \simeq f$ и $h|_A = g$

11. (X,A) има HEP $\Leftrightarrow$ $X\times\{0\}\cup A\times I$ је ретракт од $X\times I$.

решење $\Rightarrow$: Одаберимо $Y := X\times\{0\}\cup A\times I$ (Y из деф. HEP)

и $F := \mathbb{1} : X\times\{0\}\cup A\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I$.

$\overset{HEP}{\Longrightarrow} (\exists\, \bar{F} : X\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I)\ \bar{F}|_{X\times\{0\}\cup A\times I} = F = \mathbb{1}$,

тј. $\bar{F}$ је тражена ретракција.

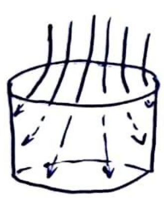
$\Leftarrow$: Нека је Y произвољан топ. пр. и

$F : X\times\{0\}\cup A\times I \to Y$ непр.

Имамо ретракцију $r : X\times I \to X\times\{0\}\cup A\times I$.

Дефинишемо $\bar{F} := F\circ r$. Тада је $\bar{F}$ проширење хомотопије F па (X,A) има HEP. $\square$

пример (1) (D^2, S^1) има HEP јер је $D^2\times\{0\}\cup S^1\times I$ ретракт од $D^2\times I$.



(2) X - CW-комплекс, $A\subseteq X$ поткомплекс

$\Rightarrow (X,A)$ има HEP.

лема Нека је Y Хаусдорфов, B ретракт од Y, онда $B \in \mathcal{F}_Y$.

доказ Нека је $r: Y \to B$ ретракција. $i_B \circ r : Y \to Y$ је непр., па је $A := \{ y \in Y \mid (i_B \circ r)(y) = y = \mathbb{1}_Y(y) \} \in \mathcal{F}_Y$ (јер је Y T_2). Показујемо $A = B$.

$\subseteq$: $a \in A \Rightarrow i_B(r(a)) = r(a) = a \in B$

$\supseteq$: $b \in B \Rightarrow i_B(r(b)) = i_B(b) = b \in A$ $\square$

$\boxed{12.}$ Ако је X Хаусдорфов и (X,A) има HEP, онда $A \in \mathcal{F}_X$.

решење $X \times \{0\} \cup A \times I$ је ретракт од $X \times I$ (зад. 11), па на основу леме је $X \times \{0\} \cup A \times I \in \mathcal{F}_{X \times I}$

$$\Rightarrow \underbrace{X \times \{1\} \cap (X \times \{0\} \cup A \times I)}_{A \times \{1\} \approx A} \in \mathcal{F}_{X \times \{1\}}$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_X$. $\square$

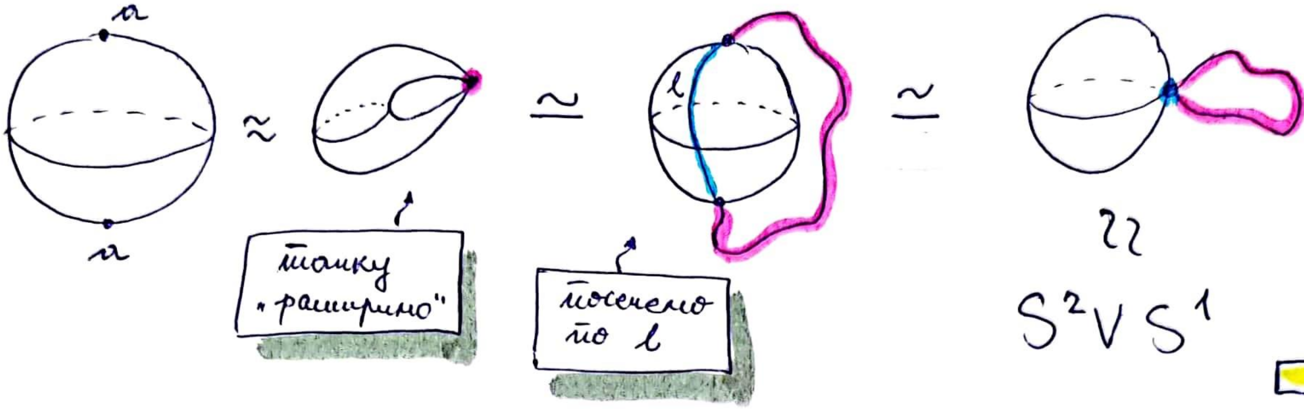
теорема Ако (X,A) има HEP и $A \simeq *$, онда $X \simeq X/A$.

корисно за интуицију

ПР *пример* Комплекс и његов поткомплекс имају НЕР.

$\boxed{13.}$ $S^2/_{N\sim S} \simeq ?$ (N = северни пол, S = јужни пол)

решење



$\cong$

$S^2 \vee S^1$ ☐

$\boxed{14.}$ $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \simeq ?$

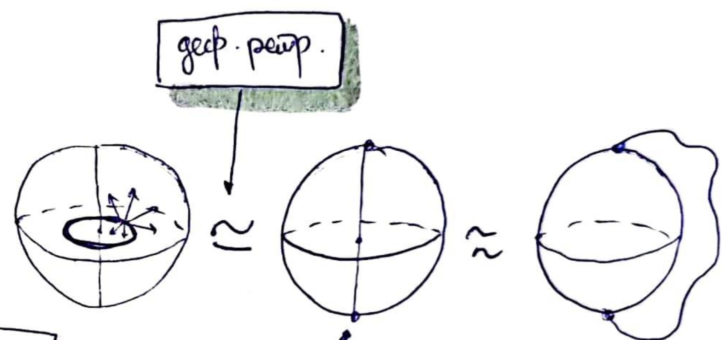
решење

деф. ретр.

$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \simeq D^3 \setminus S^1 \simeq$

диск полупречника већег од 1

сфера полупречника 1



сфера са једним пречником

$\cong$

$S^2 \vee S^1$ ☐

За вежбу:

(1) $\mathbb{R}^3 \setminus$  $\simeq ?$ (2) $\mathbb{R}^3 \setminus$  $\simeq ?$

дефиниција: Кажемо да тополошки простор X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно пресликавање $f : X \to X$ има фиксну тачку.

теорема [Брауер] За свако $n \in \mathbb{N}$, D^n има СФТ.

- СФТ је тополошка инваријанта.
- Ако X има СФТ, онда је повезан.

$\boxed{15.}$ Нека X има СФТ и A је ретракт од X, онда и A има СФТ.

решење

Нека је $f : A \to A$ непр. и $r : X \to A$ ретракција.

Уочимо композицију:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[rrr, bend right, dashed] & A \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

$i \circ f \circ r$ је непр. па има фиксну тачку, тј.

$$(\exists x_0 \in X)\ (i \circ f \circ r)(x_0) = x_0$$

$(f \circ r)(x_0) \in A$, па и $(i \circ f \circ r)(x_0) \in A$, тј. $x_0 \in A$.

Онда ова једнакост заправо постаје

$(i \circ f \circ r)(x_0) = \underbrace{f(x_0) = x_0}$, тј. A има СФТ. $\square$

$\boxed{16.}$ Доказати да D^n има СФТ акко S^{n-1} није ретракт од D^n.

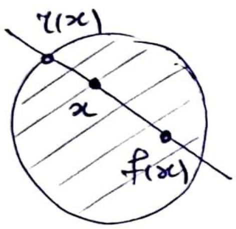
(Дакле, ово је еквивалент Брауерове теореме)

решење

$\Rightarrow$: ПТС. S^{n-1} је ретракт од $D^n \xRightarrow{\text{зад } 15} S^{n-1}$ има СФТ ↯

нпр. $a_{S^{n-1}}: S^{n-1} \to S^{n-1}$ нема ФТ.

$\Leftarrow$: ПТС. D^n нема СФТ, тј. постоји непр. $f: D^n \to D^n$ т.д. $(\forall x \in D^n)\ f(x) \neq x$. Правимо ретракцију $r: D^n \to S^{n-1}$:



$$r(x) = f(x) + t(x) \cdot (x - f(x))$$

пресек праве кроз x и $f(x)$ са S^{n-1} (пресек ближи x)

Још да одредимо $t(x)$. (ради једноставности $t := t(x)$)

$$1 = \|r(x)\|^2 = \langle f(x) + t(x - f(x)),\ f(x) + t(x - f(x)) \rangle =$$

$$= \|f(x)\|^2 + t^2 \cdot \|x - f(x)\|^2 + 2t \langle x - f(x), f(x) \rangle$$

$$t_{1/2} = \frac{-2\langle x - f(x), f(x)\rangle \pm \sqrt{4\langle x - f(x), f(x)\rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2 (\|f(x)\|^2 - 1)}}{2 \cdot \|x - f(x)\|^2}$$

$t(x) := t_1(x)$ – јесте непр. и добро деф.

$\Rightarrow r: D^n \to S^{n-1}$ је ретракција ↯ ■

Шта закључујемо из претходног задатка:

S^{n-1} није ретракт од D^n $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{S^{n-1}}$ се не проширује на $CS^{n-1} = D^n$ (јер би то била ретракција)

$\Rightarrow \mathbb{1}_{S^{n-1}} \not\simeq const$

$\Rightarrow S^{n-1} \not\simeq *$

$\boxed{17.}$ Ако је $f: S^2 \to S^2$ непр. и није „на", онда f има ФТ.

решење

1. начин f није „на" $\xrightarrow[\text{стр.45}]{\text{зад. 6}}$ $f \simeq const \Rightarrow$ проширује се на $CS^2 = D^3$, тј. $(\exists \tilde{f}: D^3 \to S^2)\ \tilde{f}|_{S^2} = f$.

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^2 \arrow[r, hook] & D^3 \\
D^3 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

$i \circ \tilde{f} : D^3 \to D^3$ је непр.

$\xrightarrow{\text{Брауер}} (\exists x_0 \in D^3)\ i(\underbrace{\tilde{f}(x_0)}_{\in S^2}) = x_0$

$\Rightarrow x_0 \in S^2$, па је $i(\tilde{f}(x_0)) = x_0$ у ствари $f(x_0) = x_0$.

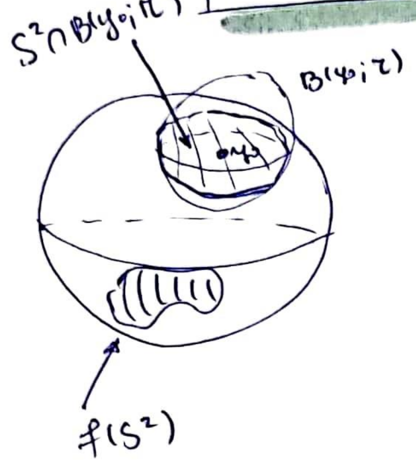
2. начин Нека је $y_0 \in S^2 \setminus f(S^2)$.

S^2 је компактан и f непр. $\Rightarrow f(S^2)$ је компактан и $f(S^2) \subseteq S^2$ који је $T_2 \Rightarrow f(S^2) \in \mathcal{F}_{S^2}$

$\Rightarrow S^2 \setminus f(S^2) \in \mathcal{T}_{S^2}$

$\Rightarrow (\exists r>0)\ B(y_0; r) \cap f(S^2) = \emptyset$

лопта у $\mathbb{R}^3$



Нека је $X := S^2 \setminus B(y_0; r) \approx D^2$

и $\bar{f} : X \to X$, $\bar{f}(x) = f(x)$.

Тада $\bar{f}$ има ФТ, па и

f има ФТ. $\blacksquare$

18. Нека је $f: D^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и $(\forall x \in S^1)\ f(x) = x$.

Доказати да је $D^2 \subseteq f(D^2)$.

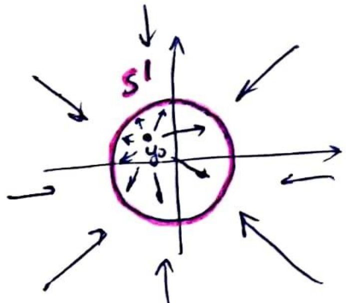
Решење

Пнс. $\exists y_0 \in D^2 \setminus f(D^2) \Rightarrow y_0 \notin S^1$ (јер би иначе

било $f(y_0) = y_0$)

$\Rightarrow y_0 \in \operatorname{int} D^2$

Имамо ретракцију $r: \mathbb{R}^2 \setminus \{y_0\} \to S^1$, па је

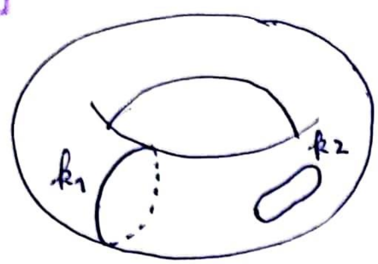


композиција

$D^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{y_0\} \xrightarrow{r} S^1$

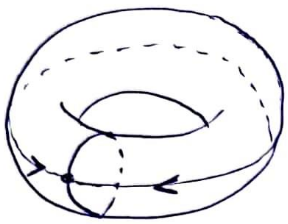
ретракција D^2 на S^1 ↯ $\blacksquare$

19. Да ли су кружнице k_1 и k_2 ретракти торуса?



решење

k_1 јесте ретракт:



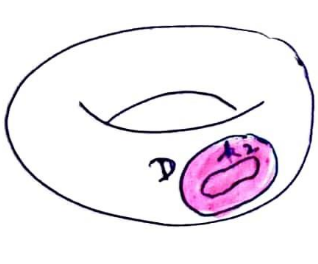
$$r : S^1 \times S^1 \to \overset{k_1}{S^1} \times \{z_0\}$$

$$(t, z) \longmapsto (t, z_0)$$

k_2 није ретракт:

тјс. $\exists\, r : T^2 \to k_2$ ретракција.

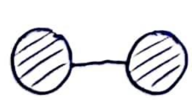
Уочимо диск на торусу који садржи k_2.



Тада је $r|_D : D \to k_2$, $D \cong D^2$

ретракција диска на кружницу $\lightning$ $\square$

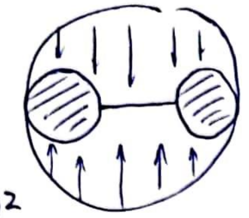
20. Испитати СФТ следећих простора

(а) X:  (б) Y:  (в) Z: 

(г) $C = S^1 \times I$; (д) M.

(а) X је ретракт од D^2, а D^2 има СФТ,

па и X има СФТ



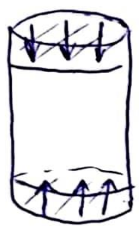
D^2

2. начин:

$A \vee B$ има СФТ $\Leftrightarrow$ A и B имају СФТ

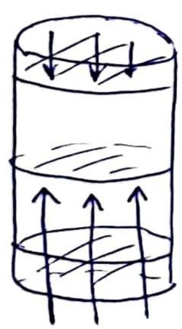
$X =$  $\Rightarrow$ X има СФТ

имају СФТ

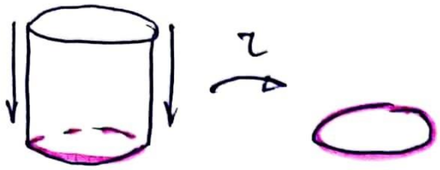
(б) $Y =$  $\xrightarrow{r}$  $\approx S^2$ нема СФТ, па нема ни Y

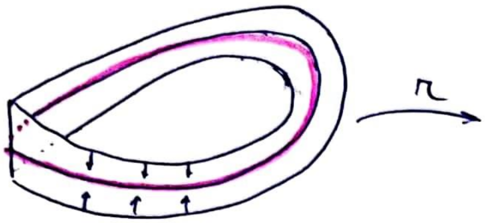
пуни ваљак са задебљаним дисковима на врху и дну

2. начин: Y је централно симетричан, а не садржи центар симетрије па нема СФТ (јер имамо антиподално пресл. које нема ФТ.)

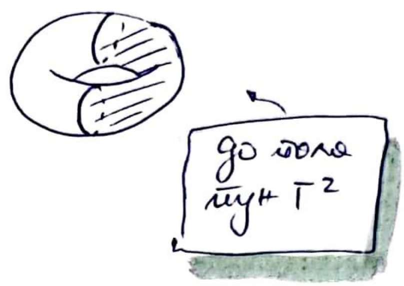
(в) $Z =$  $\xrightarrow{r}$  $\approx S^2$ нема СФТ па ни Z нема СФТ

исто као Y плус диск по средини

(г)  $\simeq S^1$ нема СФТ, па ни C нема СФТ

(д)  S^1 нема СФТ, па ни M нема СФТ. □

21. X: 

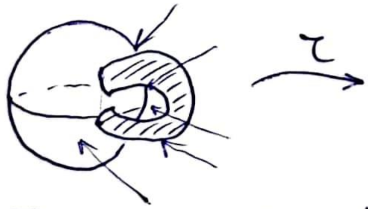
Y: 

Да ли X и Y имају СФТ? Да ли су ретракти пуних тела?

решење

$X =$  $\simeq S^2$ нема СФТ, па ни X нема СФТ

$\Rightarrow$ X није ретракт од D^3 (јер D^3 има СФТ).

$Y \simeq$  S^2 нема СФТ, па ни Y нема СФТ.

Пс. $\exists\, \rho$: пун $Y \to Y$ ретракција.

$$\begin{tikzcd} D^3 \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "\text{ретракција}"'] & \text{пун } Y \arrow[r, "\rho"] & Y \arrow[r, "r"] & S^2 \end{tikzcd}$$
↯

$\Rightarrow$ Y није ретракт пуног тела. □

Нека су (X,x_0), (Y,y_0) простори са базним тачкама. Дефинишемо два количничка простора

$$[X,Y] \overset{\text{def}}{=} \{ f: X \to Y \mid f \text{ непр.} \} /_{\simeq}$$

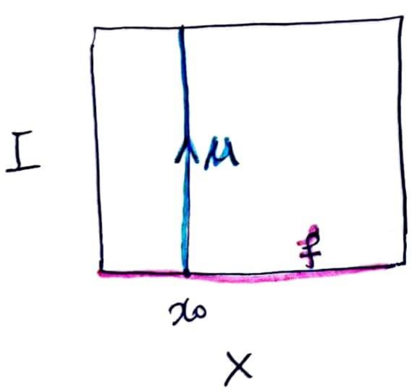
$$[X,Y]_0 \overset{\text{def}}{=} \{ f: X \to Y \mid f \text{ непр. и } f(x_0)=y_0 \} /_{\simeq \,(\text{rel } x_0)}$$

Имамо и пресликавање ϕ које „заборавља базну тачку"

$$\phi : [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]$$
$$[f]_0 \longmapsto [f]$$

$\boxed{22.}$ Ако (X,x_0) има HEP и Y је путно повезан, онда је ϕ „на".

решење Нека је $[f] \in [X,Y]$, f непр., $f: X \to Y$. Тражимо $g: X \to Y$ т.д. $\phi([g]_0) = [f]$, тј. да је $g(x_0) = y_0$ и $f \simeq g$.



Како је Y путно повезан, постоји пут $u: I \to Y$, $u(0) = f(x_0)$, $u(1) = y_0$.

Нека је $F: X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I \to Y$ дато са
$$F(x,0) := f(x)$$
$$F(x_0,t) := u(t)$$

Како (X, x_0) има HEP, то постоји $\bar{F} : X \times I \to Y$ т.д.

$\bar{F}|_{X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I} = F$. Нека је $g := \bar{F}(x, 1)$.

Тада је $\bar{F} : f \simeq g$ и $g(x_0) = \bar{F}(x_0, 1) = u(1) = y_0$.

$\Rightarrow [f] = \phi([g]_0) \Rightarrow \phi$ је „на". $\blacksquare$