Дисјунктна унија простора

X, Y – тополошки простори

$X \sqcup Y$ је топ. пр. са базом $\mathcal{B}_{X\sqcup Y} = \mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$

(ако $X \cap Y \neq \emptyset$, узмемо $X_1 \approx X$ и $Y_1 \approx Y$ т.д. $Y_1 \cap X_1 = \emptyset$)

Ако је $A \subseteq X \sqcup Y$:

$$A \in \mathcal{T}_{X\sqcup Y} \Leftrightarrow A \cap X \in \mathcal{T}_X \ \wedge \ A \cap Y \in \mathcal{T}_Y$$

Постоје природна утапања $X \hookrightarrow X \sqcup Y$ и $Y \hookrightarrow X \sqcup Y$.

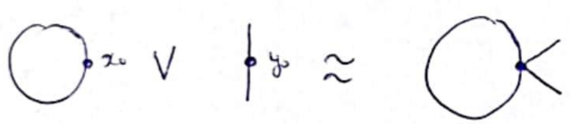
Букет простора

X, Y – тополошки простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ произвољне

$$X \vee Y := X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$$

ПР

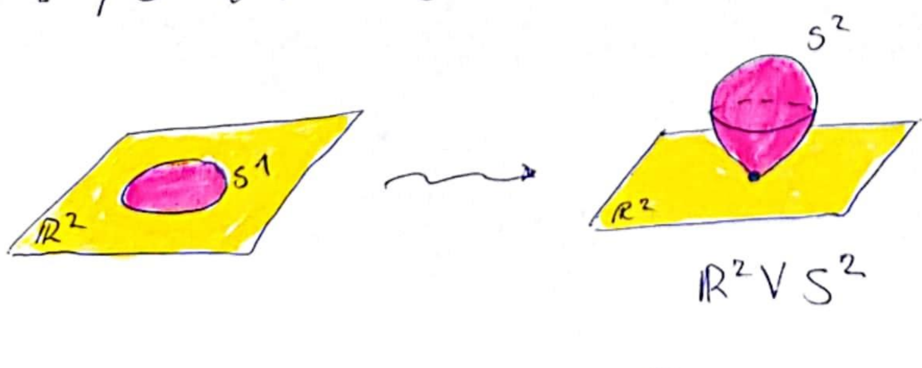
пример (1) 

(2) 

(3) 

зависи од избора тачака

(4) $\mathbb{R}^2/S^1 \approx \mathbb{R}^2 \vee S^2$

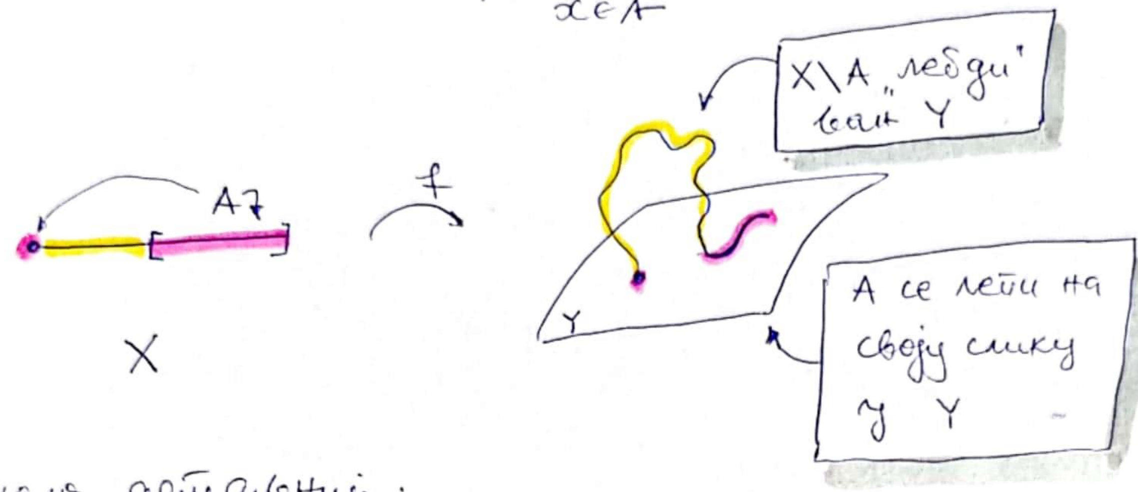


$\mathbb{R}^2 \vee S^2$

Лепљење пресликавањем

X, Y - тополошки простори, $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ непр.

$$X \cup_f Y := X \sqcup Y \Big/ \begin{smallmatrix} x \sim f(x), \\ x \in A \end{smallmatrix}$$



Мало детаљније:

$$X \cup_f Y = X \sqcup Y/\sim, \text{ где је } \sim:$$

$x_1, x_2 \in X$: $\quad x_1 \sim x_2 \iff x_1 = x_2 \lor (x_1, x_2 \in A \land f(x_1) = f(x_2))$

$x \in X,\ y \in Y$: $\quad x \sim y \iff x \in A \land f(x) = y$

$y_1, y_2 \in Y$: $\quad y_1 \sim y_2 \iff y_1 = y_2$

$\boxed{1.}$ Ако је $f: X \to Y$, докажати $X \cup_f Y \approx Y$. $(A = X)$

решење

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup Y & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & \cong ? & \\ X \sqcup Y/g & & \\ \cong ? & & \\ X \cup_f Y & & \end{array}$$

Нека је g дато са:

$g(x) := f(x)$, $x \in X$

$g(y) := y$, $y \in Y$

g је количнико:

(1) $g|_X$ и $g|_Y$ су непр. $\Rightarrow$ g је непр.

(2) g је „на"

(3) $B \subseteq Y$: Нека је

$$g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \sqcup B \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \quad \text{и} \quad B \in \mathcal{T}_Y$$

Дакле, $g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y} \Rightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_Y$

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ g је количнико

$$\overset{\text{лема 2}}{\Longrightarrow} \quad X \sqcup Y/_g \approx Y.$$

Још да видимо шта је $X \sqcup Y/g$.

- $x_1, x_2 \in X$: $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- $x \in X, y \in Y$: $g(x) = g(y) \Leftrightarrow f(x) = y$
- $y_1, y_2 \in Y$: $g(y_1) = g(y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2$

$$\Rightarrow \quad X \sqcup Y/g \approx X \cup_f Y.$$

Коначно, $X \cup_f Y \approx Y$. ■

2. Нека су X, Y топ. пр, $A \subseteq X$ и $f: A \to Y$ константно пресликавање. Доказати $X \cup_f Y \simeq X/A \vee Y$.

решење

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X/A \vee Y \\ X \sqcup Y/_g & \end{tikzcd}$$

Нека је

$g(x) := [x]$ ← класа у X/A

$g(y) := y$, $x \in X, y \in Y$

g је количничко.

(1) $g|_X : X \xrightarrow{\pi} X/A \hookrightarrow X/A \vee Y$ непр.

$g|_Y : Y \hookrightarrow X/A \vee Y$ непр. $\Big\} \Rightarrow g$ је непр.

(2) g је „На"

(3) $B \subseteq X/A \vee Y$ т.д. $g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y}$.

Показујемо $B \in \mathcal{T}_{X/A \vee Y}$, тј. да је

$B \cap X/A \in \mathcal{T}_{X/A}$ и $B \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

$g^{-1}(B) = \pi^{-1}(B \cap X/A) \sqcup (B \cap Y)$, где је $\pi: X \to X/A$ кол.

$$g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y} \Rightarrow \begin{cases} \pi^{-1}(B \cap X/A) \in \mathcal{T}_X \overset{\pi \text{ кол.}}{\Longrightarrow} B \cap X/A \in \mathcal{T}_{X/A} \\ B \cap Y \in \mathcal{T}_Y \end{cases}$$

Дакле, $B \in \mathcal{T}_{X/A \vee Y}$.

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ g је количничко.

лема 2 $\Longrightarrow$ $X \sqcup Y/g \simeq X/A \vee Y$

Још шта је $X \sqcup Y/g$?

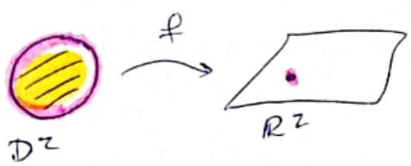
- $x_1, x_2 \in X$: $\quad g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow [x_1]=[x_2] \Leftrightarrow x_1=x_2 \vee x_1,x_2\in A$
  $\Leftrightarrow x_1=x_2 \vee f(x_1)=f(x_2)=\text{const}$

- $x\in X, y \in Y$: $\quad g(x)=g(y) \Leftrightarrow [x]=y \Leftrightarrow x\in A \wedge f(x)=\text{const}=y$

- $y_1,y_2\in Y$: $\quad g(y_1)=g(y_2) \Leftrightarrow y_1=y_2$

Дакле, $X\sqcup Y/g \simeq X\cup_f Y$ па је $X \cup_f Y \simeq X/A \vee Y$. ■

пример (1) $X=D^2, A=S^1, Y=\mathbb{R}^2$, $f: A\to Y$ константно

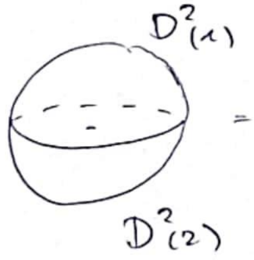


$\Longrightarrow$ $X\cup_f Y \simeq$

$= \mathbb{R}^2 \vee S^2$

(2) $X=D^2_{(1)}$, $Y=D^2_{(2)}$, $A=\partial D^2_{(1)}$, $f: \partial D^2_{(1)} \xrightarrow{\simeq} \partial D^2_{(2)}$

$X\cup_f Y \simeq$



$= S^2$

индекси (1) и (2) само значе да се ради о два различита диска

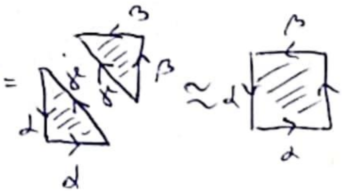
(3) $X=D^2, Y=M$, $f:\partial D^2 \xrightarrow{\simeq} \partial M$

$X\cup_f Y \simeq$

$= \mathbb{R}P^2$

(4) $X=Y=M$, $f: \partial M_{(1)} \xrightarrow{\simeq} \partial M_{(2)}$

$X\cup_f Y =$



$= K$

Многострукости и површи

Деф ~~дефиниција~~ Нека је X Хауздорфов. X је n-димензиона многострукост ако

$$(\forall x\in X)(\exists U\in \mathcal{O}(x)\cap T_X)\ U \approx \operatorname{int} D^n \approx \mathbb{R}^n .$$

X је многострукост са границом ако

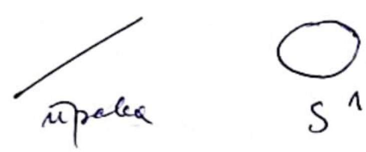
$$(\forall x\in X)\Big((\exists U\in\mathcal{O}(x)\cap T_X)\ U\approx\mathbb{R}^n \ \vee\ (\exists U\in\mathcal{O}(x)\cap T_X)\ U\approx \mathbb{R}^n_+\Big)$$

$\boxed{\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}}$

Граница многострукости X је

$$\partial X \overset{def}{=} \{x\in X \mid \neg(\exists U\in\mathcal{O}(x)\cap T_X)\ U\approx\mathbb{R}^n\}$$

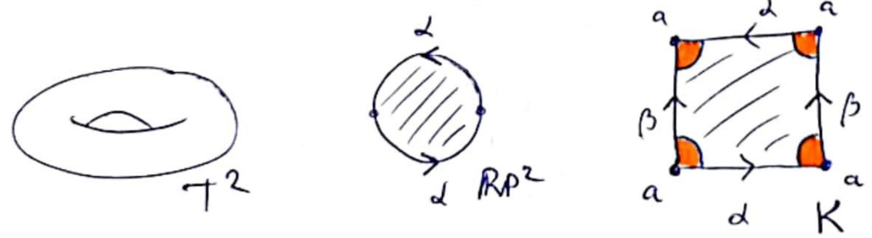
ПР ~~пример~~ (1)



1-многострукости

(2)

2-многострукости



околина од a (залепе се четвртине круга по α и β)

(3) $[0,1)$ је многострукост са границом и граница је $\{0\}$. Тополошка граница је $\{0,1\}$!

Граница многострукости и тополошка граница не морају бити исто!

Ако је X n-дим. мног. са границом, онда је ∂X $(n-1)$-дим. мног. без границе.

Ако је X n-дим. мног. са гр. и Y m-дим. мног. са гр., онда је $X \times Y$ $(m+n)$-дим. мног. са гр. и $\partial(X\times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y$.

$\boxed{1.}$ Нека су X и Y n-дим. мног. са гр. и $f: X \to Y$ хомеоморфизам. Тада је $f(\partial X) = \partial Y$.

решење $\boxed{\subseteq:}$ Нека је $y \in f(\partial X)$, тј. $y = f(x)$, $x \in \partial X$.

Показујемо $y \in \partial Y$.

Ппс. $y \notin \partial Y$, тј. $(\exists V \in \mathcal{O}(y) \cap \mathcal{T}_Y)\ V \simeq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X$ и $\underset{\text{хомео.}}{f^{-1}(V)} \simeq V \simeq \mathbb{R}^n$ $\lightning$

(јер $x \in \partial X$).

Дакле, $y \in \partial Y$.

$\boxed{\supseteq:}$ Нека је $y \in \partial Y$. f је хомеоморфизам, па постоји $x \in X$ т.д. $f(x) = y$. Да ли је $x \in \partial X$?

Ппс. $x \notin \partial X \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X)\ U \simeq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(U) \simeq \mathbb{R}^n$ је отворена околина од y $\lightning$

(јер $y \in \partial Y$).

Дакле, $x \in \partial X$, па је $y \in f(\partial X)$. ■

последица $\quad X \approx Y \Rightarrow \partial X \approx \partial Y$.

дефиниција Пресликавање $f: X \to Y$ је локални хомеоморфизам ако за свако $x \in X$ постоји отворена околина U од x т.д. f слика U хомеоморфно на $f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

пример (1) f хомеоморфизам $\Rightarrow$ f је локални хомео.

(2) $f: \mathbb{R} \to S^1$ дато са $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ је локални хомео., али није хомео.

$\boxed{2.}$ Да ли је

(а) $C \approx M$? $\quad$ (б) $\operatorname{int} C \approx \operatorname{int} M$?

решење

граница многострукости

(а) $\underset{\substack{\parallel \\ S^1 \sqcup S^1}}{\partial C} \not\approx \underset{\substack{\parallel \\ S^1}}{\partial M} \Rightarrow C \not\approx M$

(б) Ово су мнот. без границе, па не може као под (а).

пос. $\operatorname{int} C \approx \operatorname{int} M \Rightarrow (\operatorname{int} C)^* \approx (\operatorname{int} M)^*$

Александровљева компактификација

$(\operatorname{int} C)^* \approx$  уштинута сфера — није мнот.

$(\operatorname{int} M)^* \approx \Big($  $\Big)^* =$  $= \mathbb{R}P^2$ — јесте мнот. ↯ $\Rightarrow \operatorname{int} C \not\approx \operatorname{int} M$ ■

дефиниција Многострукост X је затворена ако је компактна и без границе.

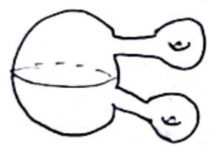
Сада конструишемо неке повезане затворене површи (тј. мног. димензије 2).

$M_0 \stackrel{def}{=} S^2$

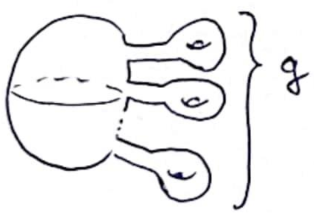
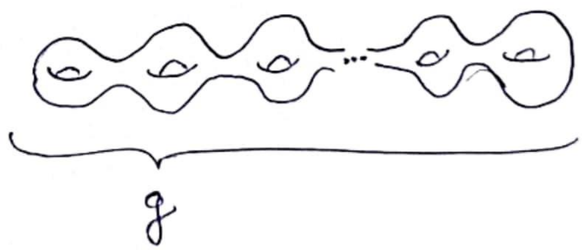
$\boxed{M_g}$ - добијамо тако што са сфере M_0 скинемо диск и залепимо  на g места

торус

$M_1 =$  $\approx$  $= T^2$

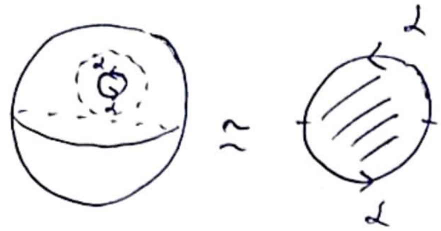
$M_2 =$  $\approx$ 

$\vdots$

$M_g =$  $\approx$ 

$\boxed{N_h}$ - добијамо тако што са сфере M_0 скинемо диск и залепимо  на h места

Мебијусова трака

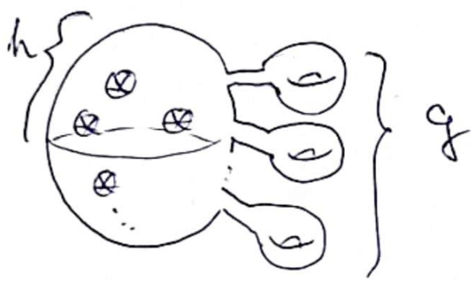
$N_1 =$  $= \mathbb{R}P^2$

$N_2 =$ 

$\vdots$

$N_h =$ 

$\boxed{H_{g,h}}$ – на S^2 залепљено g торуса и h Мебијусових трака на сличан начин.



Површ P је оријентабилна ако има 2 стране.

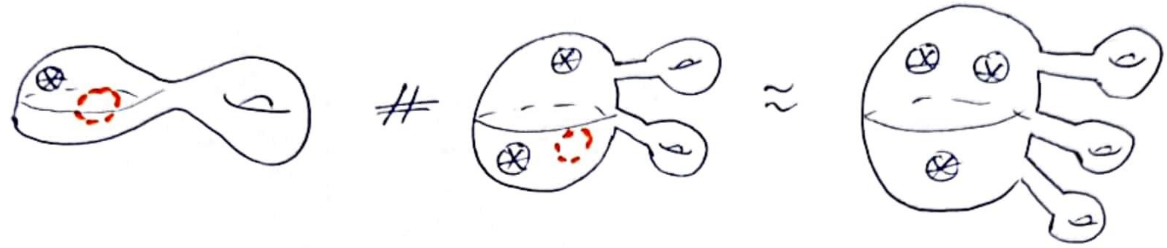
M_g су оријентабилне, N_h су неоријентабилне.

Дефинишемо операцију $\#$ на површима

повезана сума

Са обе површи скинемо по један мали диск и залепимо их по хомеоморфизму граница:

нпр.



је комутативна и асоцијативна (до на хомео.)

$$M_{g_1} \# M_{g_2} \approx M_{g_1+g_2}$$

$$N_{h_1} \# N_{h_2} \approx N_{h_1+h_2}$$

$$H_{g_1,h_1} \# H_{g_2,h_2} \approx H_{g_1+g_2,\, h_1+h_2}$$

S^2 је неутрал за #.

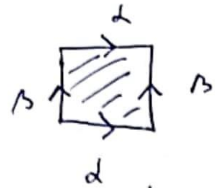
Количнички модели у равни

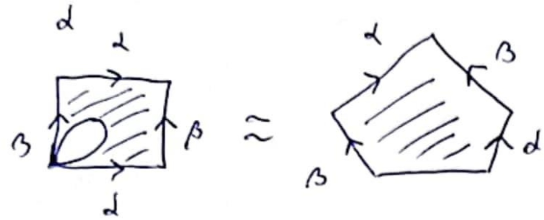
Већ знамо моделе за $M_1 = T^2$ и $N_1 = \mathbb{R}P^2$, а помоћу

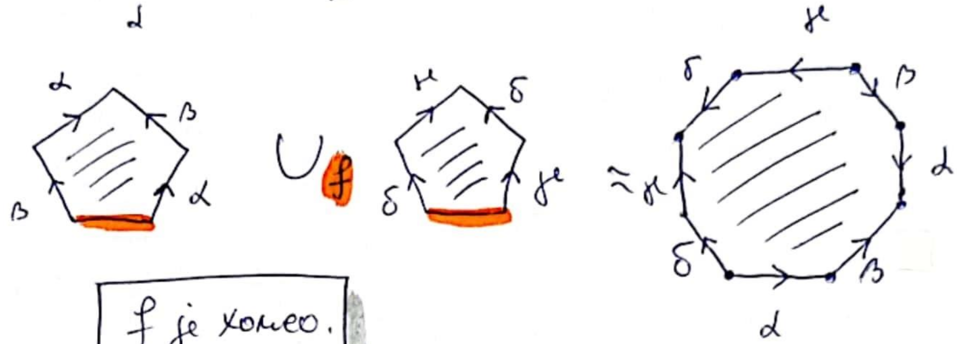
$$M_g = \underbrace{M_1 \# M_1 \# \cdots \# M_1}_{g}$$

$$N_h = \underbrace{N_1 \# N_1 \# \cdots \# N_1}_{h}$$

добићемо количничке моделе за све M_g и N_h.

$M_1 = T^2 =$ 

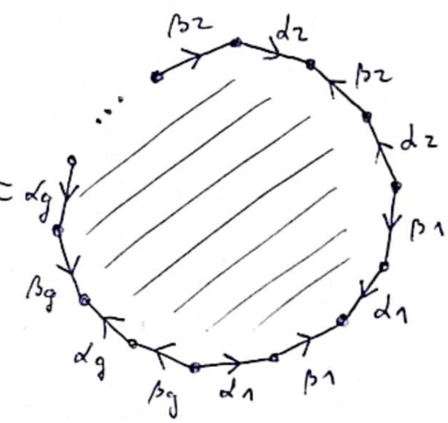
M_1 без диска: 

$M_2 = M_1 \# M_1 \approx$ 

f је хомео. граница

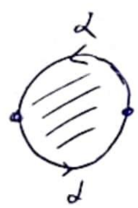
$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$

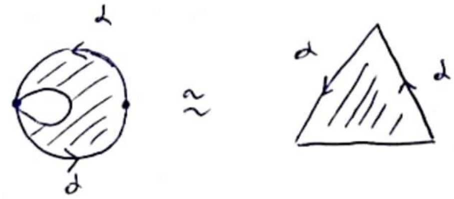
Слично

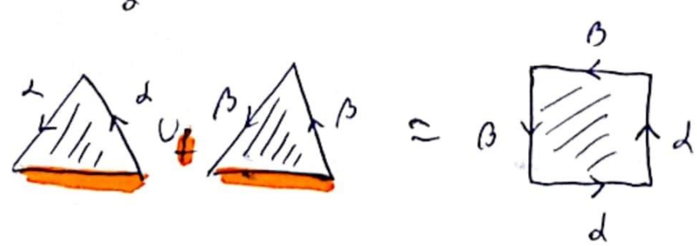
$M_g \approx \underbrace{M_1 \# M_1 \# \cdots \# M_1}_{g} \approx$ 

4h ивица
2h иденти-фикација

$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$

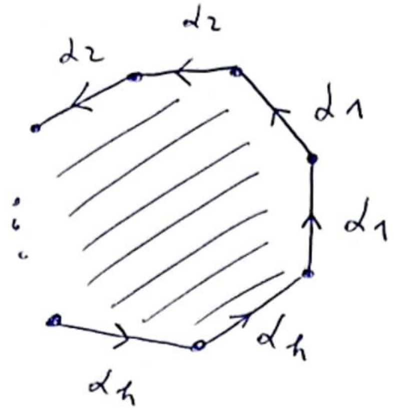
$N_1 \approx \mathbb{R}P^2 =$ 

N_1 без диска: 

$N_2 = N_1 \# N_1 \approx$  $\approx K$

Слично

$N_h = N_1 \# N_1 \# \cdots \# N_1 \approx$



$\boxed{2h \text{ ивица, } h \text{ идентификација}}$

$\boxed{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2}$

Теорема [о класификацији површи] Нека је X повезана затворена површ. Тада

(1) ако је X оријентабилна, онда

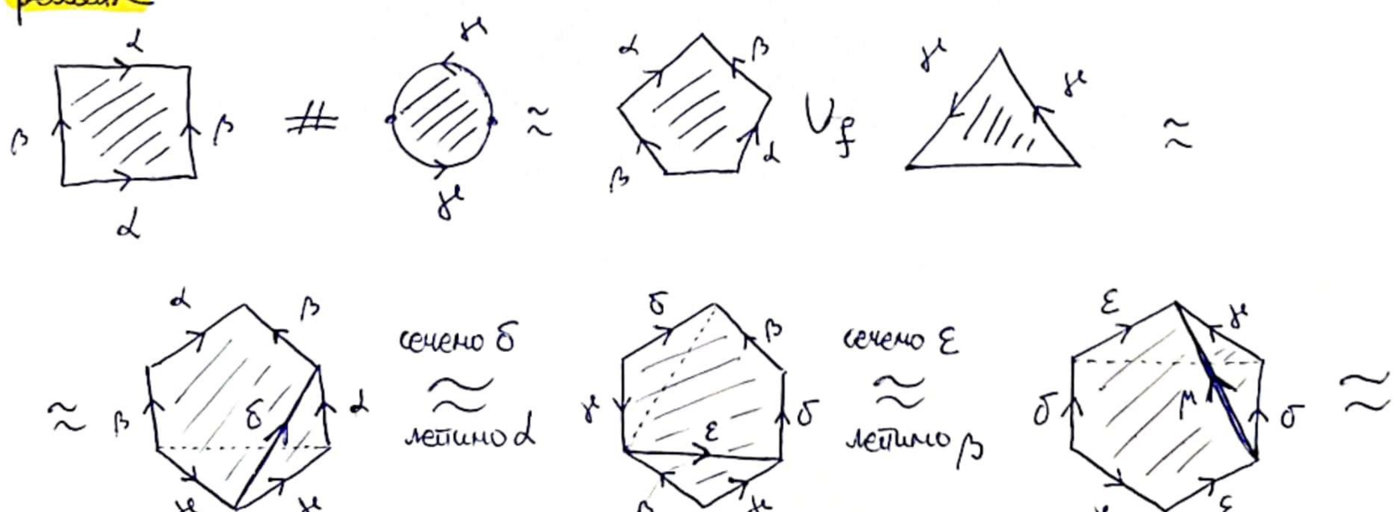
$$(\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g;$$

(2) ако је X неоријентабилна, онда

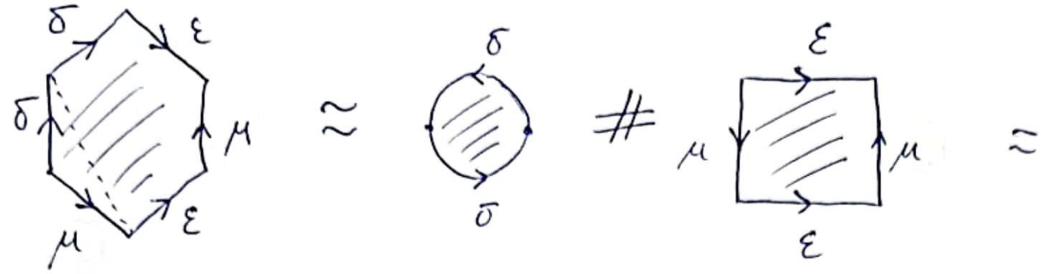
$$(\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h.$$

1. Доказати $M_1 \# N_1 \approx N_3$

решење



сечемо μ
$\approx$
лепимо је



$$\approx \mathbb{R}P^2 \# K = N_1 \# N_2 \approx N_3 \quad \blacksquare$$