Количнички простори

дефиниција Нека су X и Y тополошки простори. Пресликавање $f: X \to Y$ је количничко ако:

(1) f је „на";

(2) $(\forall U \subseteq Y)\ U \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$

у деф. смо могли заменити $\mathcal{T}_X$ и $\mathcal{T}_Y$ са $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$

Лако се види:

ако је f непрекидно, „на" и отворено (или затворено), онда је f количничко.

лема1 Нека су X, Y и Z тополошки простори, $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Ако је f количничко, онда:

$$g \text{ је непрекидно} \Leftrightarrow g \circ f \text{ је непрекидно}$$

доказ: $\Rightarrow$: композиција непрекидних пресликавања је непр.

$\Leftarrow$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Нека је $U \in \mathcal{T}_Z$. Показујемо $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$.

$U \in \mathcal{T}_Z \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ ← јер је $g \circ f$ непр.

$\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_X$

јер је f количничко → $\Rightarrow g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$. ■

Дефиниција Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. Пресликавање $r: X \to A$ је ретракција ако је непрекидно и $r|_A = \mathbb{1}_A$, тј. комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\mathbb{1}_A"'] & A \end{tikzcd}$$

A зовемо ретракт од X.

($i(a)=a$ - инклузија; $\mathbb{1}_A(a)=a$ - идентитета)

Свака ретракција је количничко пресликавање

Дефиниција Нека је X тополошки простор, Y скуп и $f: X \to Y$ „на". Количничка топологија на Y је $\mathcal{T}_Y \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$. (Ово је најфинија топологија таква да је f непрекидно.)

Количнички простор можемо задати на 3 начина:

1. помоћу релације еквиваленције

Нека је $\sim$ рел. екв. на тополошком простору X.
Имамо природну пројекцију $\pi: X \xrightarrow{\text{„на"}} X/_\sim$

$$x \longmapsto [x]$$

и топологију на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}.$$

2. Тачку подскупа

Нека је X топ. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишимо релацију $\sim$ на X са:

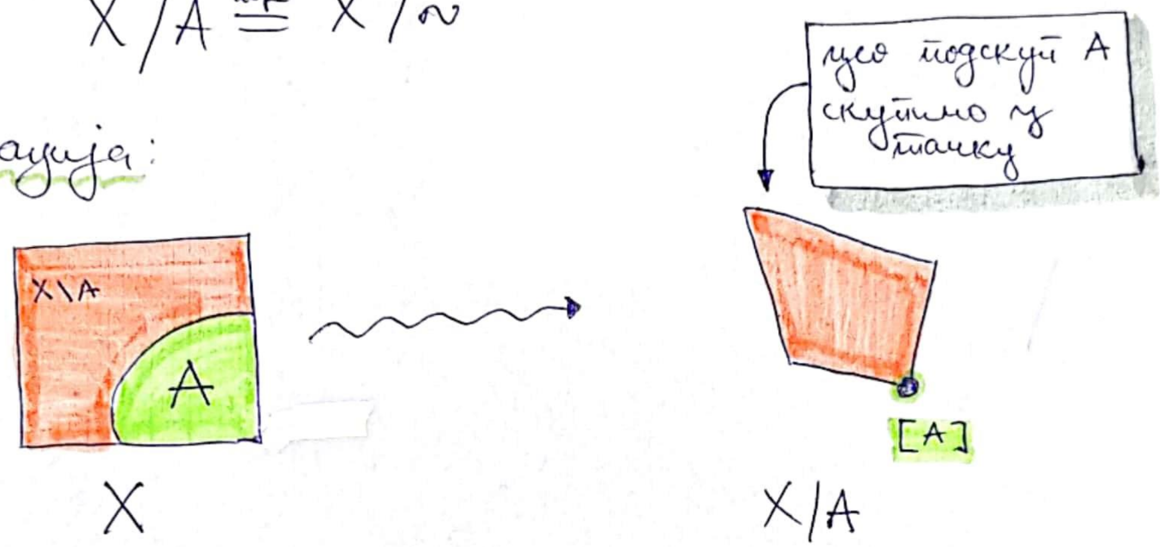
$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = y \ \vee \ x, y \in A$$

$\sim$ је релација екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{\text{def}}{=} X/\sim$$

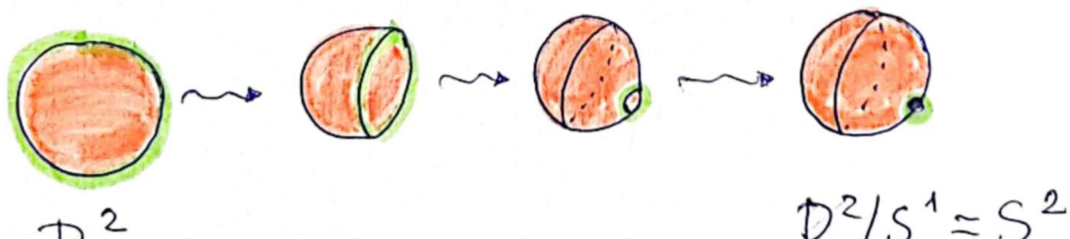
Илустрација:

(1)

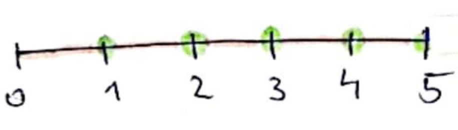


(2) $X/X \approx *$ ($*$ представља једну тачку)

(3) $D^2/S^1 \approx S^2$



(4) $[0,5]/\{1,2,3,4,5\} \approx$ 



3. Толоту пресликавања

Нека је X топ. пр. и $f: X \to Y$ непрекидно.

Релација $\sim$ на X дата са:

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y)$$

је рел. екв. па

$$X/f \overset{def}{=} X/\sim .$$

лема 2 Ако је $f: X \to Y$ количничко, онда $X/f \cong Y$.

доказ:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \\ & X/f \arrow[u, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

Нека је $g: X/f \to Y$ дато са

$$g([x]) := f(x)$$

добра дефинисаност:

$$[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow g([x_1]) = g([x_2])$$

Из дефиниције је очигледно $g \circ \pi = f$.

Како је π количничко и f непр. $\overset{\text{лема 1}}{\Longrightarrow}$ g је непр.

Показујемо да је g хомеоморфизам.

g је „1-1": $g([x_1]) = g([x_2]) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 \Rightarrow [x_1] = [x_2]$

g је „на": $y \in Y \overset{f \text{ је „на"}}{\Longrightarrow} (\exists x \in X)\, f(x) = y \Rightarrow g([x]) = y$

$\Rightarrow$ g је бијекција па постоји g^{-1}.

g^{-1} је непр.:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, "g^{-1}"] \arrow[dl, phantom, "?"] \\ & X/f \end{tikzcd}$$

f је количничко, π непр. $\overset{\text{лема 1}}{\Longrightarrow}$ g^{-1} је непр.

$\Rightarrow$ g је хомео. $\Rightarrow$ $Y \approx X/f$. ■

лема 3 Нека је $\sim$ рел. екв. на X, $X/\sim$ је T_2 и $A \in \mathcal{K}_X$ сече све класе еквиваленције. Тада $X/\sim \;\approx A/\sim_A$. $\left(\sim_A = \sim \cap (A \times A)\right)$

доказ:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "\pi \circ i_A"'] & X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, phantom, "?"] \\ & X/\sim \end{tikzcd}$$

$\pi \circ i_A$ је количничко:

(1) „на" јер сече све класе

(2) непр. јер су π и i_A непр.

(3) затворено јер слика компакт у T_2

$\overset{\text{лема 2}}{\Longrightarrow}$ $X/\sim \;\approx A/\pi\circ i_A = A/\sim_A$. ■

1. Доказати

(а) $[0,1]/\{0,1\} \approx S^1$;

(б) $\mathbb{R}/\sim \;\approx S^1$, где је $\sim$ релација на $\mathbb{R}$ дата

са: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

решење

(a)
$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\
{[0,1]/f} \arrow[ur, dotted, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

Нека је $f: [0,1] \to S^1$ дато са

$$f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

f је непр., „на" и затворено (јер слика компакт у T_2), па је количничко.

$\xRightarrow{\text{лема 2}}$ $S^1 \approx [0,1]/f$.

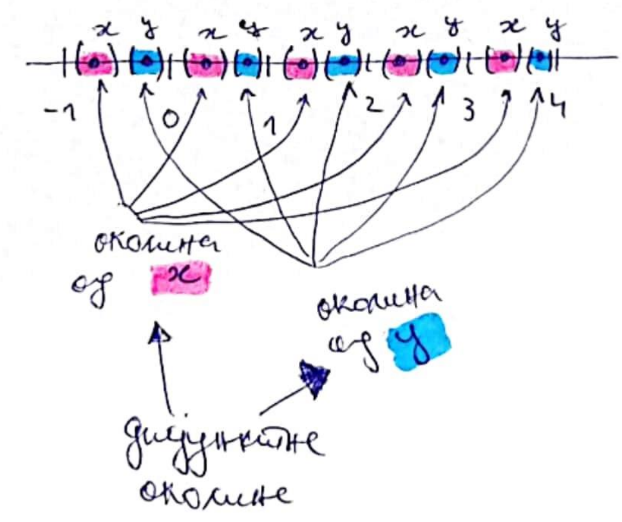
Шта је $[0,1]/f$?

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \lor |x-y| = 1$$
$$\Leftrightarrow x = y \lor \{x,y\} = \{0,1\}$$

$\Rightarrow [0,1]/f \approx [0,1]/\{0,1\}$.

(б) Нека је $A = [0,1]$ – то је компакт који сече све класе.

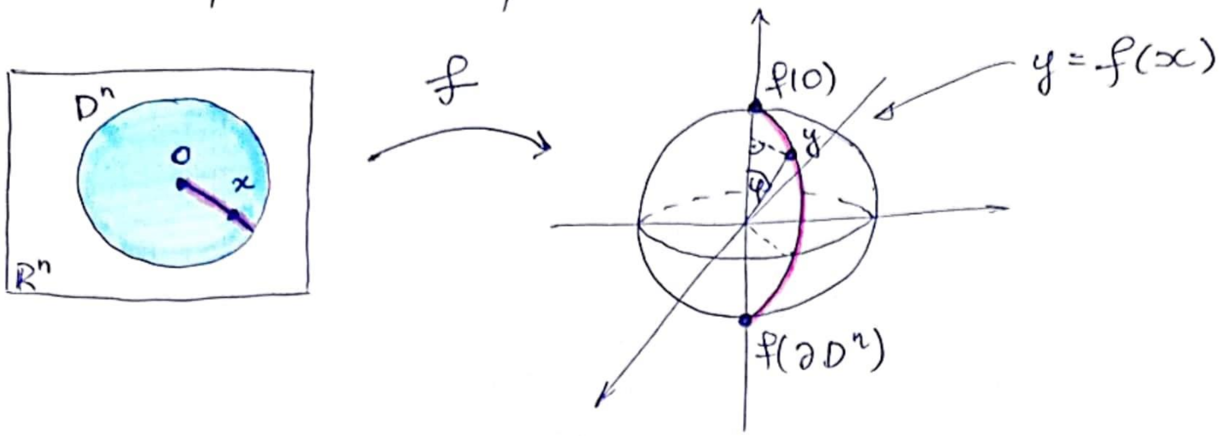
$\mathbb{R}/\sim$ је T_2 :



$\xRightarrow{\text{лема 3}}$ $\mathbb{R}/\sim \; \approx A/\sim_A = [0,1]/\{0,1\} \overset{(a)}{\approx} S^1$. ■

$\boxed{2.}$ Доказати $D^n/\partial D^n \approx S^n$.

решење Дефинишимо пресликавање $f: D^n \to S^n$



$y_i = \alpha x_i \;, \quad i = \overline{1,n}$ (α треба наћи)

$$\frac{\|x\|}{1} = \frac{\varphi}{\pi} \Rightarrow \varphi = \pi \cdot \|x\|$$

$$y_{n+1} = \cos\varphi = \cos(\pi\|x\|)$$

Мора да важи: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \|y_i\|^2 = 1$

$$1 = \sum_{i=1}^{n+1} \|y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha^2 \|x_i\|^2 + \cos^2(\pi\|x\|) = \|x\|\alpha^2 + \cos^2(\pi\|x\|)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}$$

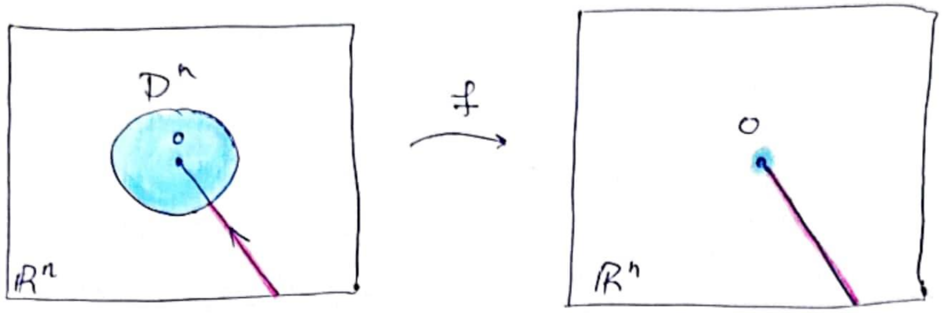
$$\Rightarrow f(x) := \begin{cases} \left(x_1 \cdot \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}, \ldots, x_n \cdot \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}, \cos(\pi\|x\|)\right), & x \neq 0 \\ (0, \ldots, 0, 1), & x = 0 \end{cases}$$

- f је „на"
- f је „непр." ($\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$)
- f је затворено (компакт $\to T_2$)

$\Rightarrow$ f је количничко $\overset{\text{лема 2}}{\Rightarrow} S^n \approx D^n/f = D^n/\partial D^n$ ■

$\boxed{3.}$ Доказати $\mathbb{R}^n/D^n \approx \mathbb{R}^n$

решење



Нека је $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ дато са

$$f(x)=\begin{cases}0, & \|x\|\le 1 \qquad (\text{тј. } x\in D^n)\\ x-\frac{x}{\|x\|}, & \|x\|\ge 1 \qquad (\text{тј. } x\in \mathbb{R}^n\setminus(\operatorname{int} D^n))\end{cases}$$

- f је „на"
- f је непр. (на основу леме о лепљењу јер $D^n,\ \mathbb{R}^n\setminus(\operatorname{int} D^n)\in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$)
- f је затворено (показујемо накнадно)

$\Rightarrow$ f је количничко

$\Downarrow$ лема 2

$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n/f = \mathbb{R}^n/D^n$.

Још до видимо да је f затворено.

$$A\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \overset{?}{\Longrightarrow} f(A)\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$$

$\boxed{1^\circ}$ $A\subseteq D^n$ или $A\subseteq \mathbb{R}^n\setminus D^n$ очигледно.

$\boxed{2^\circ}$ A сече и D^n и $\mathbb{R}^n \setminus D^n$

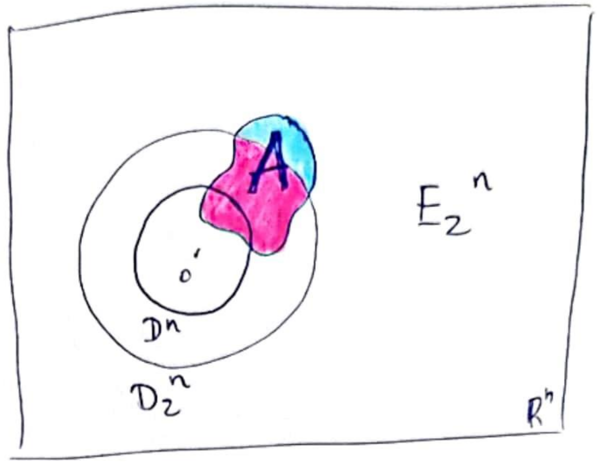
уведимо ознаке

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

$D_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2\}$

$E_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 1\}$

$E_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 2\}$



Нека је $g: E_2^n \to E_1^n$ дато са $g(x) = x - \frac{x}{\|x\|}$.

Очигледно је g хомеоморфизам.

$$f(A) = f(A \cap \mathbb{R}^n) = f(A \cap (D_2^n \cup E_2^n)) =$$

$$= f(A \cap D_2^n) \cup f(A \cap E_2^n)$$

(*) $A \cap D_2^n \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n}$ јер је A затворен, а D_2^n компактан

$\Rightarrow f(A \cap D_2^n) \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f(A \cap D_2^n) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$

(**) $f(A \cap E_2^n) = g(A \cap E_2^n)$

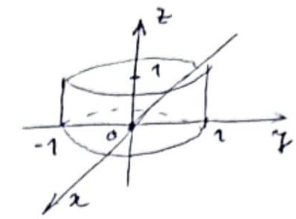
$A \cap E_2^n \in \mathcal{F}_{E_2^n} \Rightarrow g(A \cap E_2^n) \in \mathcal{F}_{E_1^n}$ (јер је g хомео.)

и E_1^n је затворен, па је $f(A \cap E_2^n) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$

Из (*) и (**) следи $f(A) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$. ■

Неки количнички модели у равни

1 цилиндар



$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$$

параметризација: $f(u,v):=(\cos u, \sin u, v)$,

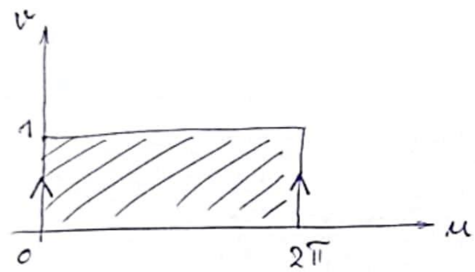
$$f:[0,2\pi]\times[0,1]\longrightarrow C$$

f је непр., „на" и затворено (компакт $\to T_2$)

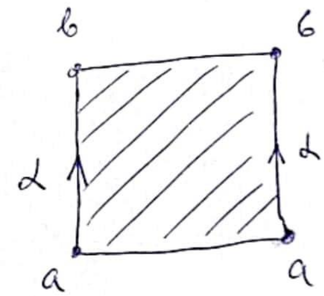
$\Rightarrow$ f је количничко $\Rightarrow$ $[0,2\pi]\times[0,1]/f \cong C$

$$f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \Leftrightarrow v_1=v_2 \wedge (u_1=u_2 \vee |u_1-u_2|=2\pi)$$

тј. $\{u_1,u_2\}=\{0,2\pi\}$



тј.



2 торус

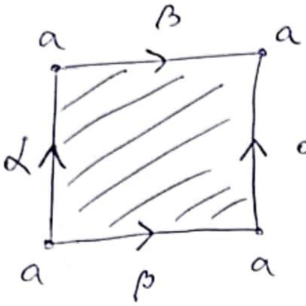
$f:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\longrightarrow T^2$

$$f(u,v):=\big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)$$

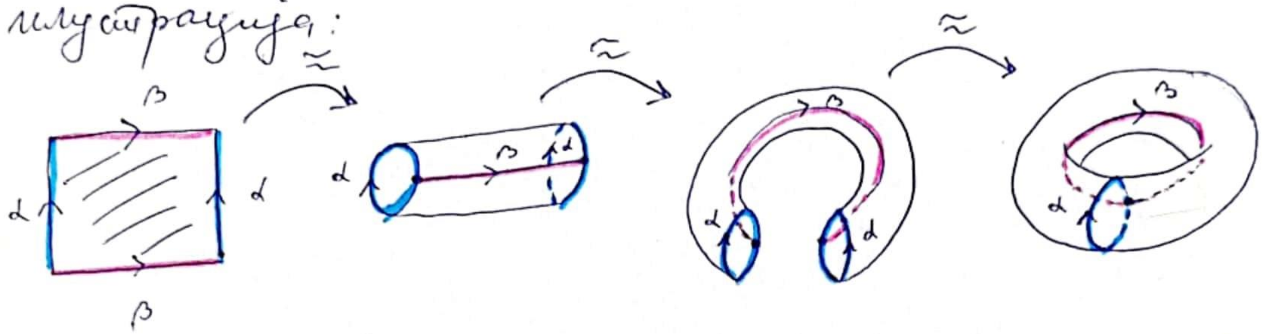
f је непр., „на" и затворено (компакт $\to T_2$)

$\Rightarrow$ f је количничко $\Rightarrow$ $[0,2\pi]^2/f \cong T^2$

$f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \iff |u_1-u_2|,\ |v_1-v_2| \in \{0, 2\pi\}$

$\Rightarrow \ T^2 \approx$ 

илустрација:



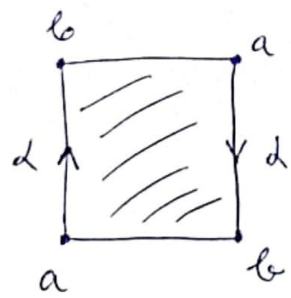
(3) Мебијусова трака $\quad f:[0,2\pi]\times[-\varepsilon,\varepsilon]\to M$ (довољно мало)

$$f(u,v)=(\cos u, \sin u, 0)+v\left(\sin\tfrac{u}{2}\cos u,\ \sin\tfrac{u}{2}\sin u,\ \cos\tfrac{u}{2}\right)$$

f је непр., „на" и затворено $\Rightarrow$ f је количничко

$\Rightarrow \ [0,2\pi]\times[-\varepsilon,\varepsilon]/_f \approx M$

$f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \iff |u_1-u_2|=2\pi \ \wedge \ v_1+v_2=0$

$\Rightarrow \ M \approx$ 

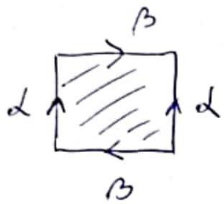
Битне кружице на M:

- централна

- гранична

4. Клајнова флаша

$K \cong$



5. Реални пројективни простор

На $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ дефинишемо рел. екв. $\sim$

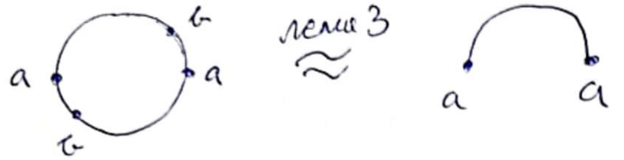
$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\ y = \lambda x$$

$$\mathbb{R}P^n \overset{def}{=} (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/_{\sim}$$

Класе еквиваленције су праве кроз коорд. почетак без 0.
Сфера S^n је компакт који сече сваку класу у две антиподалне тачке

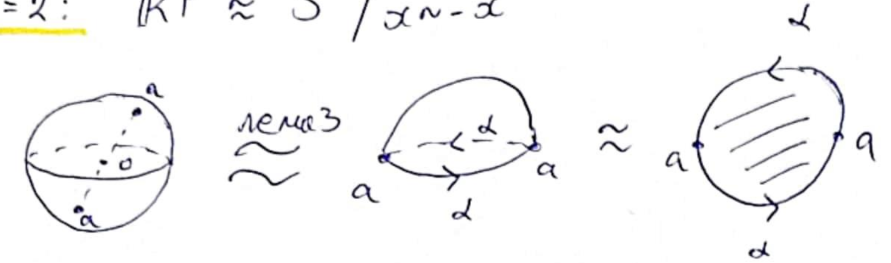
$$\xRightarrow{\text{лема 3}} \mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/_{\sim} \cong S^n/_{x\sim -x}$$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 \approx S^1/_{x\sim -x}$



$\approx S^1 \Rightarrow \mathbb{R}P^1 \approx S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 \approx S^2/_{x\sim -x}$



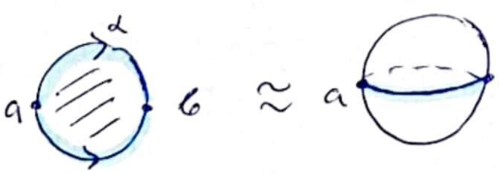
$\approx D^2/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^2}$

$n\geq 3$: $\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{x\sim -x} \approx D^n/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^n}$

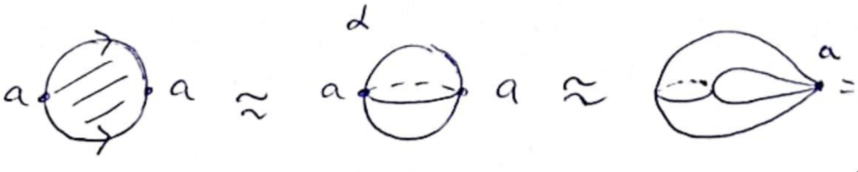
Ниједан потпростор од $\mathbb{R}^3$ није хомеоморфан К нити $\mathbb{R}P^2$, тј. они се не могу утопити (видети) у $\mathbb{R}^3$.

„Сечење и лепљење"

ПР

пример (1) 

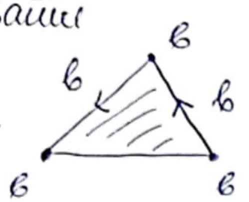
$= S^2$

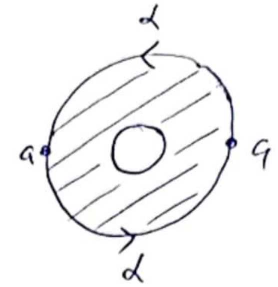
(2) 

= уштинута сфера

могла се видети и овако: 

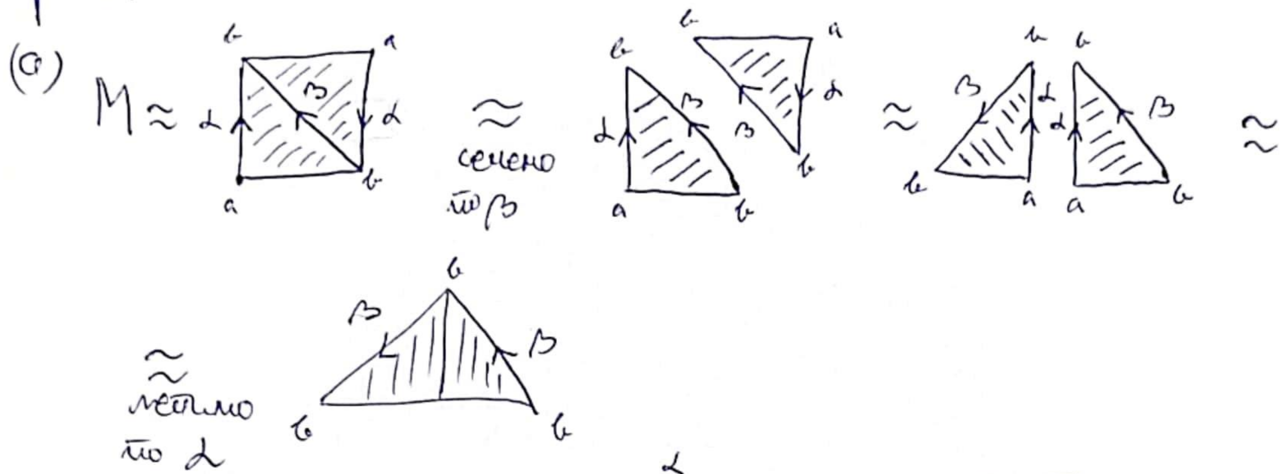
1. Доказати

(а) $M \approx$ 

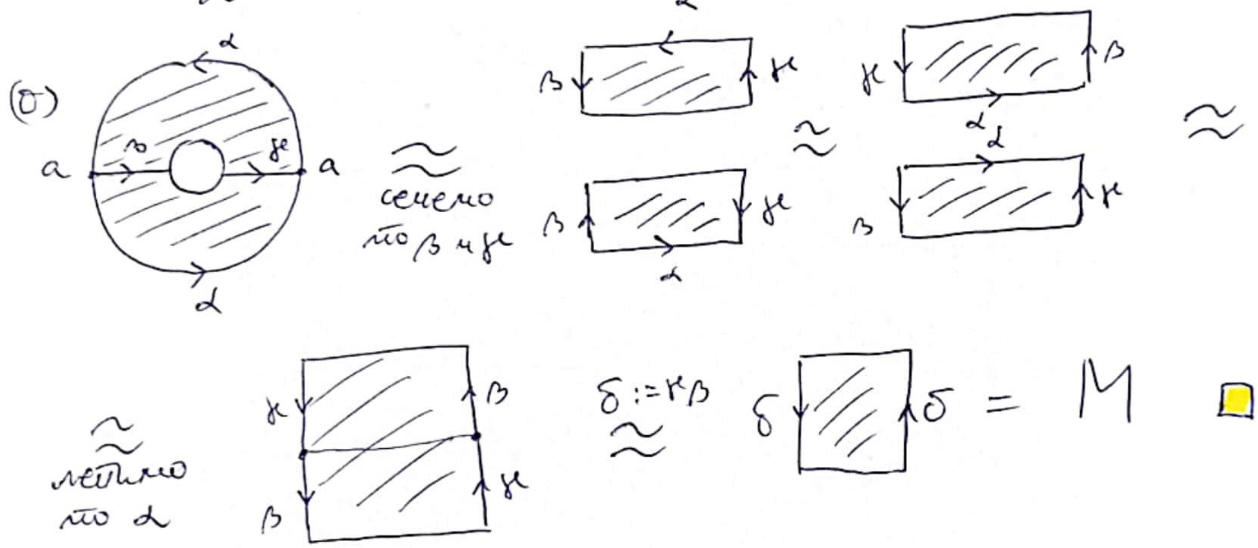
(б) $M \approx$ 

решење

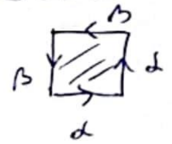
(а)



(б)



2. Доказати

$K \approx$ 

решење