

Симплицијални комплекси

деф Нека су $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ тачке у одређеном положају.

Геометријски n -симплекс одређен тачкама $a_0, \dots, a_n$ је скуп

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, (\forall i) \lambda_i \geq 0\}$$

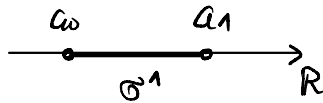
Тачке $a_0, \dots, a_n$ су брадови симплекса, а n његова димензија.

(Другим речима, σ^n је конвексни омотач тачака $a_0, \dots, a_n$.)

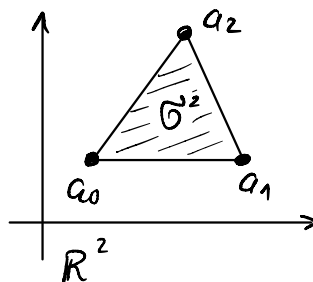
Пример $n=0$

$$a_0 = \sigma^0$$

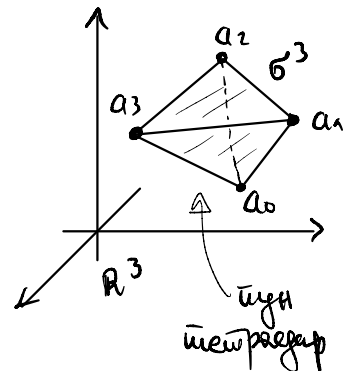
$n=1$



$n=2$



$n=3$



деф Унутрашњост (интерјор) симплекса σ^n је

$$\overset{\circ}{\sigma}^n = \{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \in \sigma^n \mid (\forall i) \lambda_i > 0 \}$$

Пример

$$\text{int } \sigma^0 = \emptyset, \text{ int } \sigma^1 = \text{---}, \text{ int } \sigma^2 =$$



деф Руб симплекса σ^n је $|\overset{\circ}{\sigma}^n| \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^n \setminus \overset{\circ}{\sigma}^n$.

Коментисај $\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^m$ па много лакшеју пош. на σ^n од $\mathbb{R}^m$.

Унутрашњост/руб у нацртању пош. и код симплекса нуди ниво.

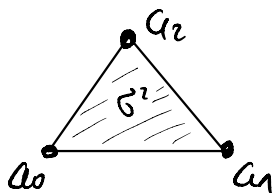
Нпр. $a_0 = (0,0), a_1 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$$\overset{\circ}{\sigma}^1 = (0,1), |\overset{\circ}{\sigma}^1| = \{0,1\}, \underbrace{\text{int } \sigma^1 = \emptyset, \partial \sigma^1 = \sigma^1}_{\text{у овом оп.}}$$

σ^n означавамо и $\sigma (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

геп Сваки подмно $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ од $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ је страна симплекса σ^n .

Пример



$\rightsquigarrow$ шрпекс:

$\emptyset$,

a_0, a_1, a_2 , $\leftarrow$ тменна

$(a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_0, a_2)$, $\leftarrow$ ивице

(a_0, a_1, a_2)

геп Барцентар од σ^n је тачка

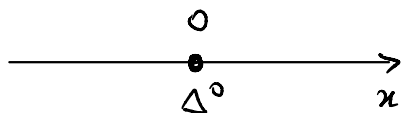
$$\hat{\sigma}^n = \frac{1}{n+1} a_0 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$$

геп Стандардни n -симплекс је

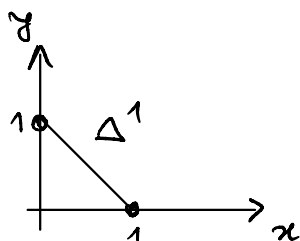
$$\Delta^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1, (\forall i) x_i \geq 0 \}$$

Пример

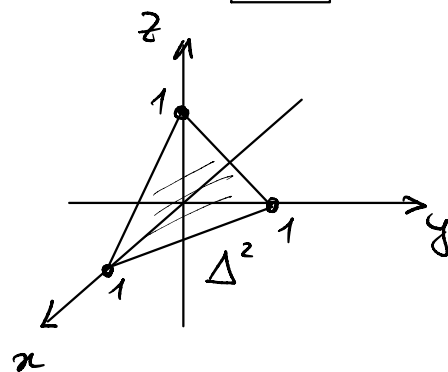
$n=0$



$n=1$



$n=2$



Слов Свака два n -симплекса су хомеоморфни и сваки од њих је компактан подскуп од $\mathbb{R}^m$.

деф. Геометријски симплицијални комплекс K у $\mathbb{R}^m$ је коначна фамилија симплекса у $\mathbb{R}^m$ и-г.

- (1) свака страна симплекса из K припада K ,
- (2) пресек сваке два симплекса је страна сваког од њих.

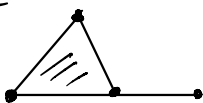
Пример

$K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1, a_2), (a_0), (a_1), (a_2)\}$ јесте с.к.

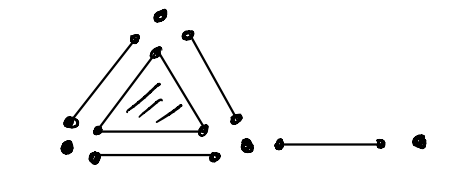
$K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1), (a_2)\}$ није с.к.

Пример

с.к.

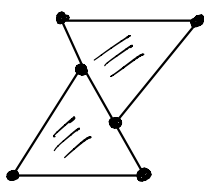


заменимо K са:



фамилија симплекса

Пример



није с.к. јер пресек два троугла (2-симплекса)
није страна ниједног од њих

деф Димензија геометријског с.к. K је димензија највећег симплекса у K .

у деф. геом. с.к. услов (2) се може зачети са:

- (2') интериори различитих симплекса из K су дисјунктни.

деф Унија свих симплекса у геом. с.к. K је подскуп од $\mathbb{R}^m$ који се назива матедром с.к. K и означава се $|K|$.

деф Нека су K и L с.к. Пресликавање $f: |K| \rightarrow |L|$ је симулацијално ако

(1) $a_0, \dots, a_n$ елементи од $K \Rightarrow f(a_0), \dots, f(a_n)$ елементи од L
(не нужно различити)

(2) $x = \sum \lambda_i a_i \in |K| \Rightarrow f(x) = \sum \lambda_i f(a_i)$

Лема Свако симулацијално прел. $f: |K| \rightarrow |L|$ је нестр.

доказ Нека је $\sigma^k \in K$ произвољан симплекс.

$\Rightarrow |\sigma^k|$ је контактант.

Пресликавање $g: |\sigma^k| \rightarrow [0,1]^k$ гласи

$$g(\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_k a_k) = (\lambda_0, \dots, \lambda_k)$$

та је очигледно нестр. и слике контакти у T_L , па је и полимичко. Нека је $h: [0,1]^k \rightarrow |L|$ гласи се

$$h(\lambda_0, \dots, \lambda_k) = \lambda_0 f(a_0) + \dots + \lambda_k f(a_k)$$

h је очигледно нестр.

Закле, имамо

$$\begin{array}{ccc} |\sigma^k| & \xrightarrow{f|_{|\sigma^k|}} & |L| \\ \downarrow g & \searrow \uparrow h & \\ \text{кон.} \rightarrow & [0,1]^k & \end{array}$$

$\Rightarrow f|_{|\sigma^k|}$ је нестр.

$\Rightarrow$ сви $|\sigma^k|$ су затворени, па је f нестр. на основу леме о нестр. $\square$

def Абстрактни симплицијални комплекс је пар $K = (V, \Sigma)$ где је V коначан скуп, а Σ фамилија подскупова од V под.

$$(1) (\forall v \in V) \{v\} \in \Sigma,$$

$$(2) \sigma \in \Sigma \text{ и } \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma.$$

Тачке $v \in V$ су врхови (темења) од K , а чланови фамилије Σ су апстрактни симплекси.

Димензија симплекса $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \subseteq V$ је n , док је димензија с.к. K димензија највећег симплекса у K .

def Нека су $K = (V, \Sigma)$ и $K' = (V', \Sigma')$ и $f: V \rightarrow V'$ под.

$$(\forall \sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma) f(\sigma) = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in \Sigma'.$$

Тада је f симплицијално прел. и пишемо $f: K \rightarrow K'$.

Ако је $f: V \rightarrow V'$ биекција и f и f^{-1} симплицијалне, онда је f симплицијални изоморфизам и пишемо $K \approx K'$.

def Абстракционизација геометријског с.к. K је апстрактни с.к.

$K(K) = (V, \Sigma)$, где је V скуп темења од K , а Σ фамилија скупова темења симплекса у K .

Лема За сваки апстрактни с.к. K постоји геом. с.к. K чије је абстракционизација изоморфна са K .

доказ (скица) $K = (V, \Sigma)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$v_i \mapsto e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

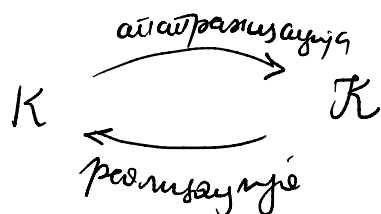
□

деј Теом. с.к. из претходног става се зове (геометричка) реализација од K .

Став Ако су K' и K'' две реализације од K , онда

$$|K'| \approx |K''|.$$

Углавном не правимо разлику између теом. и аутофактних с.к. јер имамо



Барицентрична подела

$$K = (V, \Sigma), \quad V = \{v_0, \dots, v_n\}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 членови симплекси

$K^{(1)}$ - прва барицентрична подела од K :

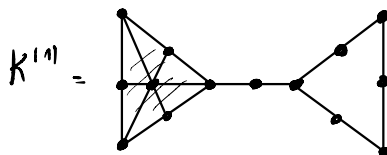
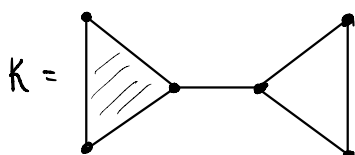
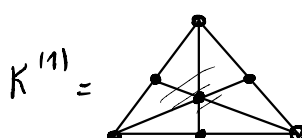
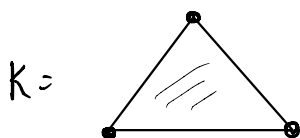
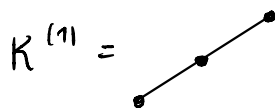
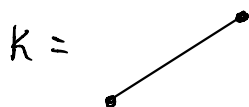
$V(K^{(1)}) =$ барицентри свих симплекса у Σ

$\Sigma(K^{(1)}) =$ сви симплекси $\{v_0, \dots, v_n\} \in V(K^{(1)})$ из.

$$\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots \subseteq \sigma_k \subseteq V,$$

где је v_i барицентар од $\sigma_i \in \Sigma$

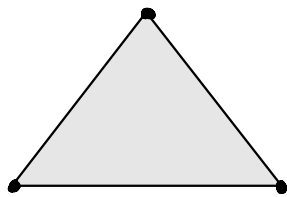
Пример



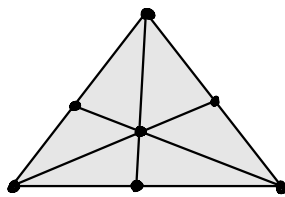
Тенерачно, n -та сарцензентрична поделба је

$$K^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (K^{(n-1)})^{(1)}$$

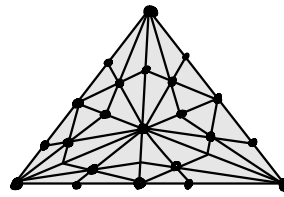
Пример



K



$K^{(1)}$



$K^{(2)}$

где σ теом. симплекс, $\text{diam } \sigma$ је максимум растојања између σ .

Норма од K је $\|K\| = \max \{ \text{diam } \sigma \mid \sigma \in K \}$

Лема K -теом. с.к. димензије n . Тада

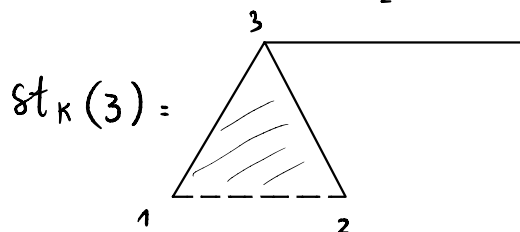
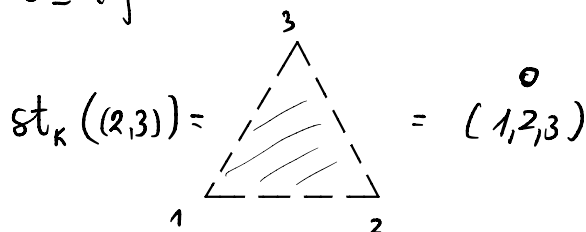
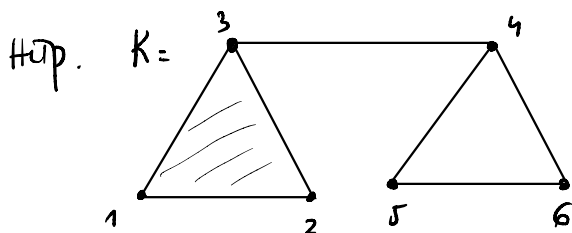
$$\|K^{(n)}\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \|K\|.$$

Теорема о симплицијалној апроксимацији

Ако је σ неки симплекс, $\tau \in \sigma$ значи τ је страна од σ .

где K с.к., $\sigma \in K$ симплекс. Ошворена звезда од σ је

$$\text{st}_K(\sigma) = \bigcup \{ \tau \mid \sigma \subseteq \tau \}$$



Лема $\sigma, \tau \in K$, онда $\sigma \subseteq \tau \Rightarrow \text{st}_K(\sigma) \supseteq \text{st}_K(\tau)$.

деф Нема су K и L с.к. и $f: |K| \rightarrow |L|$ нпр. Ако постоји симплицијална прел. $s: |K| \rightarrow |L|$ тш.

$$(\forall a \in K) f(st_K(a)) \subseteq st_L(s(a)),$$

онда је s симплицијална апроксимација од f .

Лема Ако је s симплицијална апроксимација за f , онда $f \approx s$.

(" $f \approx s$ " значи f је хомотопан са s - реди се да тога)

Лема K, L с.к., $f: |K| \rightarrow |L|$ нпр. Ако

$$(\forall a \in K) (\exists b \in L) f(st_K(a)) \subseteq st_L(b),$$

онда постоји симп. апрокс. s од f .

деф Нема је $\mathcal{U}$ отворен покривач метричког простора (M, d) .

Кажемо да је δ Лебегов број од $\mathcal{U}$ ако

$$(\forall A \subseteq M) \text{diam } A < \delta \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{U}) A \subseteq U.$$

Лема [Лебегова лема] Ако је M компактан метрички пр,

онда сваки отворен покривач пр M има Лебегов бр.

Теорема [о симп. апрокс.] Нема су K и L с.к. и $f: |K| \rightarrow |L|$

нпр. Тада постоји сарциентричне поделе $K^{(r)}$ тш. $f: |K^{(r)}| \rightarrow |L|$

има симплицијалну апрокс.

(приметимо: с.к. K и $K^{(r)}$ су различити, али $|K| = |K^{(r)}|$).

закључ. $\{st_L(b) \mid b \in L\}$ је ауторет покривајући за $|L|$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{f^{-1}(st_L(b)) \mid b \in L\}$ је сав. покр. за $|K|$.

$|K|$ је комп. метр. пр. $\Rightarrow \mathcal{U}$ има Лебега пр. Иако је λ Лебега пр. за $\mathcal{U}$. Из теореме

$$\|K^{(r)}\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \|K\|$$

имамо за свако r пр. $\|K^{(r)}\| < \frac{\lambda}{2}$, па је

$$(\forall a \in K^{(r)}) \quad \text{diam}(st_{K^{(r)}}(a)) < \lambda$$

$$\stackrel{\text{гип. } \lambda}{\Rightarrow} (\exists b \in L) \quad st_{K^{(r)}}(a) \subseteq f^{-1}(st_L(b)) \in \mathcal{U}$$

$$\text{пр. } (\forall a \in K^{(r)}) (\exists b \in L) \quad f(st_{K^{(r)}}(a)) \subseteq st_L(b)$$

$$\Rightarrow f: |K^{(r)}| \rightarrow |L| \text{ има комп. ауторет. } \square$$