

Лема Нека је X повезан и (U, V) дисјункција. Ако је $A \subseteq X$ повезан, онда $A \subseteq U$ или $A \subseteq V$.

доказ Имамо $X = U \sqcup V$, $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$

тв. $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$

$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap U)}_{\in \mathcal{T}_A \setminus \{\emptyset\}} \sqcup \underbrace{(A \cap V)}_{\in \mathcal{T}_A \setminus \{\emptyset\}}$ - дисјункција од A $\downarrow$ $\square$

Теорема^{*} Нека је $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фамилија повезаних потпростора од X тв. (1) $(\exists \alpha_0 \in A)(\forall \alpha \in A) X_{\alpha_0} \cap X_\alpha \neq \emptyset$

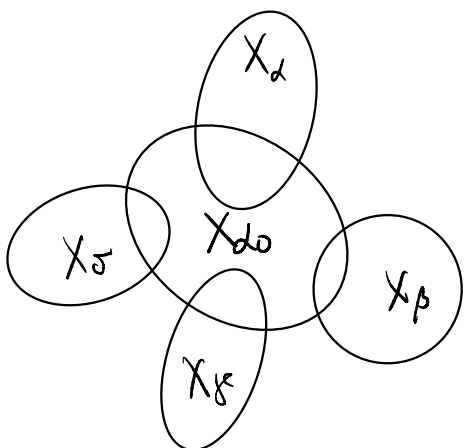
$$(2) X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

Тада је X повезан.

доказ тв. X није повезан и $X = U \sqcup V$ дисјункција
лема $\Rightarrow$ Бгд $X_{\alpha_0} \subseteq U$.

Пакoђе из леме $(\forall \alpha \in A) X_\alpha \subseteq U \vee X_\alpha \subseteq V$, али пошто је $X_\alpha \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset$, X_{α_0} и X_α морају бити у истом скупу, тв. $X_\alpha \subseteq U$, за свако $\alpha \in A$.

$$\Rightarrow X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \subseteq U \Rightarrow V = \emptyset \downarrow \square$$



Уопшћење: услов (1) можемо заменити са:

$$(1') (\exists \alpha_0 \in A)(\forall \alpha \in A) X_{\alpha_0} \cap \overline{X_\alpha} \neq \emptyset$$

Лема Нека је X топ. $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Ако је A повезан, онда је и B повезан.

(Симулјантно: A пов. $\Rightarrow \bar{A}$ пов.)

доказ тис. $B = B_1 \sqcup B_2$ дисконекција

лема $\Rightarrow$ БУО $A \subseteq B_1$

$$B_1 \in \mathcal{F}_B \Rightarrow (\exists F \in \mathcal{F}_X) B_1 = B \cap F$$

$$\Rightarrow A \subseteq F \in \mathcal{F}_X \Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow B \subseteq F \Rightarrow B_1 = B \cap F = B \Rightarrow B_2 = \emptyset \quad \square$$

деф Нека је X повезан и $x_0 \in X$ твр. $X \setminus \{x_0\}$ је неповезан.

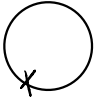
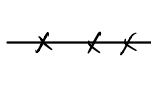
Тада x_0 називамо тачком дисконекције (раздијање).

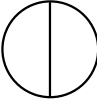
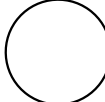
Лема Број тачак раздијања простора X је тополошка инваријантна.

доказ $h: X \approx Y$ и $x_0 \in X$

$$X \setminus \{x_0\} \text{ не повезан} \Leftrightarrow Y \setminus \{h(x_0)\} \text{ не повезан} \quad \square$$

Пример

(1)  $\not\approx$ 
 нема т. разд. ∞ т. разд.

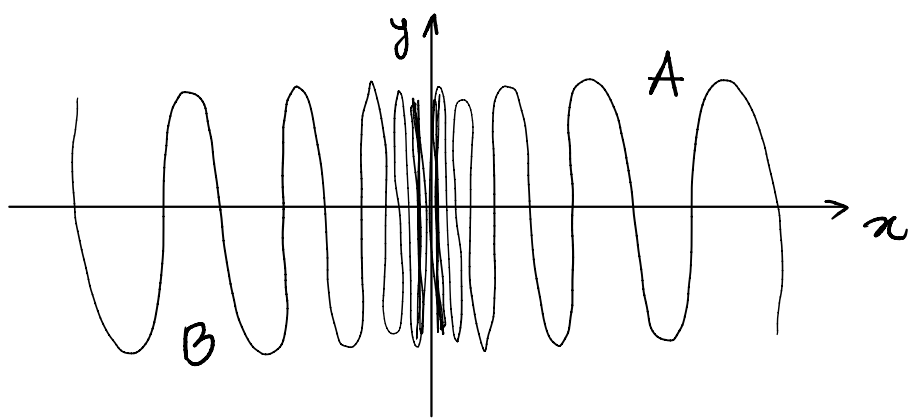
(2)  $\not\approx$ 
 0 ∞

(3) $\mathbb{R}_0^n \approx \mathbb{R}_\infty$

Пример тополошка сингуларна $X = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x < 0 \right\}$$



$A \approx (0, +\infty), B \approx (-\infty, 0) \Rightarrow A \text{ и } B \text{ су повезани}$

$\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1]), \bar{B} = B \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ — повезани
 $\Rightarrow X = \bar{A} \cup \bar{B}$ пов. (из шифра $A \cup B \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$)

Компоненте повезаности

дефиницијом релацију $\sim$ на ш. пр. X . За $x, y \in X$:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists C \subseteq X) \text{ } C \text{ повезан и } x, y \in C$$

Ситов $\sim$ је рел. екв.

лемма P и C ситовно, T из теореме $\otimes$. $\square$

деф. Класе рел. екв. $\sim$ називамо компоненте повезаности:

$$C_x = [x], x \in X$$

деф. X је потпуно неповезан ако $(\forall x \in X) C_x = \{x\}$.

Пример $(\mathbb{R}, S)$ и $(\mathbb{Q}, \cup \mathbb{Q})$ су потпуно неповезани.

Лема C_x је највећи повезан скуп који садржи $x \in X$.

Доказ C_x је повезан:

Нека је $y \in C_x$, тј. $x \sim y$

$\Rightarrow \exists K_y$ повезан тј. $x, y \in K_y$

$\Rightarrow K_y \subseteq C_x$

$\Rightarrow C_x = \bigcup_{y \in C_x} K_y \xrightarrow{\text{III. 8}} C_x$ је повезан

C_x је највећи: Нека је K повезан тј. $x \in K$. Онда $K \subseteq C_x$ $\square$

Лема C_x је затворен за свако $x \in X$.

Доказ C_x је повезан $\Rightarrow \overline{C_x}$ повезан, али C_x је највећи пов. који садржи x , па $C_x = \overline{C_x} \Rightarrow C_x \in \mathcal{F}_x$. $\square$

Пример C_x не мора бити отворен, нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_a)$.

X, Y ш. гр. $f: X \rightarrow Y$ непр. $C_x = \{C_x \mid x \in X\}$,
 $C_y = \{C_y \mid y \in Y\}$, онда имамо и $\overline{f}: C_x \rightarrow C_y$

$$\overline{f}(C_x) = C_{f(x)}.$$

Лема Број компонент повезаности је топ. инваријант.

Пример $T \not\cong K$
 $\uparrow \nearrow$
своје



$T \setminus \{x_0\} = 3$ компоненте

тј. $h: T \xrightarrow{\sim} K$

1° $K \setminus \{h(x_0)\} \Rightarrow K \setminus \{h(x_0)\} = 2$ комп.

2° $h(x_0) \in K \Rightarrow K \setminus \{h(x_0)\} = 4$ комп. ∇

Локална повезаност

деф $(X, \mathcal{T})$ је лок. пов. ако

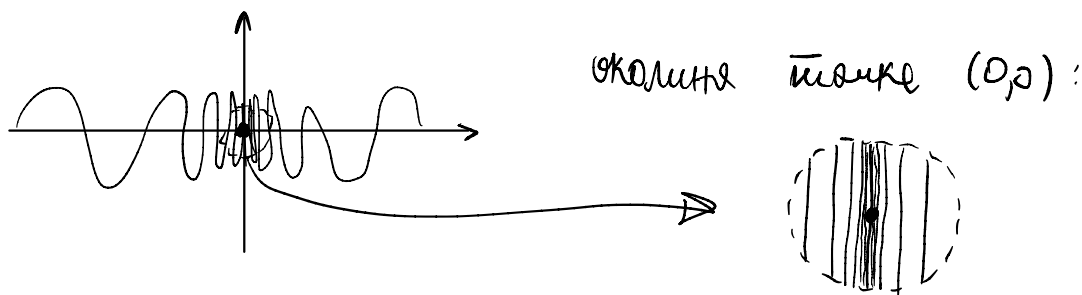
$$(\forall x \in X) (\forall G \in \mathcal{O}(x)) (\exists H \in \mathcal{O}(x)) H \subseteq G \wedge H \text{ повезан.}$$

(тј. свака околина има повезану подоколингу)

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ је лок. пов.

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ није пов., а јесте лок. пов. ($\{x\}$ -пов. окол. од x)

(3) тополошка синусоида је пов., а није лок. пов.



Теорема X је лок. пов. ако су компоненте повезаности сваког отвореног скупа $A \subseteq X$ отворене у X .

доказ $\Rightarrow$: Нека је $A \in \mathcal{T}_X$, $x \in A$. Хоћемо да покажемо да је $C_x^A \in \mathcal{T}_X$.

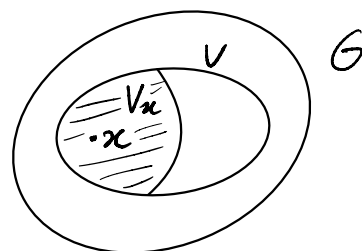
$$(\forall y \in C_x^A) A \in \mathcal{O}(y) \stackrel{x \text{ лок. пов.}}{\Rightarrow} (\exists H \in \mathcal{O}(y)) H \text{ пов. и } H \subseteq A$$

$$\Rightarrow H \subseteq C_x^A \Rightarrow C_x^A \in \mathcal{T}_X$$

$\Leftarrow$: Нека је $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$.

$$\Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T}_X) x \in V \text{ и } V \subseteq G$$

Нека је V_x комп. пов. од V тј. $x \in V_x$



Из условия теореме можно дойти $\forall x$ открыт, то же $\forall x \in \mathcal{O}(x)$, т.е. $\forall x \subseteq G$ является открытым. $\square$

Последнее X локально открыт. $\Rightarrow (\forall x \in X) C_x \in \mathcal{T}_x \cap \mathcal{F}_x$.

Особые: (1) локально открыт. ниже непрерывно инвариантно

$$\Pi_Q : (Q, \mathcal{T}_Q) \rightarrow (Q, \mathcal{U}_Q)$$

$\uparrow$ локально открыт. $\uparrow$ ниже локально открыт.

(2) локально открыт. ниже произвольное свойство

Производ локально открыт. произведение является локально открытым. А если у нас есть конечно много таких локально открытых.

(3) $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. непрерывно и "на" и X локально открыт. $\Rightarrow Y$ локально открыт.

(4) локально открыт. ниже наследно: $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\mathbb{R}})$ локально открыт, $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$ ниже.

Повторение произведений

Свойство Если у нас X и Y открыты, тогда же и $X \times Y$ открыт.

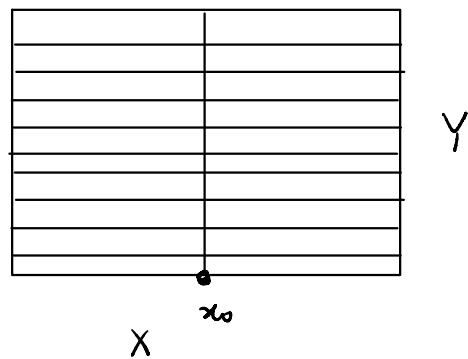
доказательство $x_0 \in X$ произвольное

$$X \times Y = \left(\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} \right) \cup \{x_0\} \times Y$$

Если $X \times \{y\}$ и $\{x_0\} \times Y$ являются открытыми. и

$$(\forall y \in Y) (X \times \{y\}) \cap (\{x_0\} \times Y) \neq \emptyset$$

П. 88 $\Rightarrow X \times Y$ является открытым. $\square$



Индукция: $X_1, \dots, X_n$ пов. $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ пов.

Помогаете себе произвольную семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ попарных топологий.

$$(\forall \alpha \in A) X_\alpha \text{ пов.} \not\Rightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{box}} \right) \text{ пов.}$$

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ - пов.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \{ a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \} = \text{реални низови}$$

Нека је $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп отворених и $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп неотворених низова.

$$A \cap B = \emptyset, \quad A, B \neq \emptyset, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = A \sqcup B.$$

Да ли су A и B отворени?

За $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имамо

$$\mathcal{U}_x := \prod_{n \in \mathbb{N}} (x_{n-1}, x_{n+1}) \in \mathcal{T}_{\text{box}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \Rightarrow \mathcal{U}_x \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{T}_{\text{box}} \\ x \in B \Rightarrow \mathcal{U}_x \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{\text{box}} \end{array} \right\} \Rightarrow (A, B) \text{ је дисјункција } \text{ of } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$