

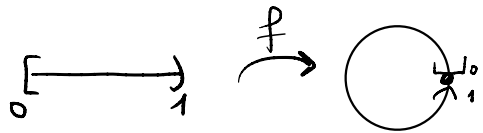
Колмишико пресликавање

деф. Пресликавање $f: X \rightarrow Y$ је колмишико ако је "нх" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(Приметимо: смер " $\Rightarrow$ " је неупрекидношћу.)

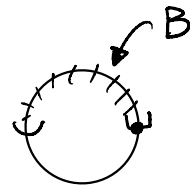
Пример $f: [0, 1) \rightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



f је нхр. и "нх", али не важи услов " $\Leftarrow$ " па није колмишико

За $B := f([0, \frac{1}{2}))$ имамо:

$$f^{-1}(B) = [0, \frac{1}{2}) \in \mathcal{T}_{[0, 1)} \not\Rightarrow B \in \mathcal{T}_{S^1}$$



Снаб Пресликавање $f: X \rightarrow Y$ је колмишико ако је "нх" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

доказ лежда. $\square$

Снаб Ако је f нхр., "нх" и отворено/затворено,
онда је f колмишико.

доказ f отворено:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \xRightarrow{\text{нхр.}} \underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\substack{\text{"нх"} \\ B}} \in \mathcal{T}_Y$$

f затворено: слично. $\square$

Последња $f: X \rightarrow Y$ непр. и „на“, X компактан, Y T_2

$\Rightarrow f$ је коликтиво.

доказ имамо само раније твђење: $f: \text{комп.} \rightarrow T_2$ је затворено. $\square$

Лема Нека су $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ коликтива. Тада је и $g \circ f$ коликтиво.

доказ: $g \circ f$ је непр. и „на“ $\checkmark$

Нека је $B \subseteq Z$ и $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{T}_X \xRightarrow{f \text{ кол.}} g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_Y \xRightarrow{g \text{ кол.}} B \in \mathcal{T}_Z \quad \square$$

Теорема Нека је $f: X \rightarrow Y$ коликтиво и $g: Y \rightarrow Z$. Тада је g је непрекидно ако је $g \circ f$ непр.

доказ: $\Rightarrow$: $\checkmark$

$\Leftarrow$: Нека је $g \circ f$ непр. и $V \in \mathcal{T}_Z$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \circ f \searrow & \downarrow & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

$$g \circ f \text{ непр.} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_X \xRightarrow{f \text{ кол.}} g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow g \text{ непр.} \quad \square$$

Коликтиви простори

Нека је X топ. пр. и Y скуп и $f: X \rightarrow Y$ „на“.

На Y дефинишемо финалну топологију индукувану f :

$$\mathcal{T}_f := \mathcal{T}_f = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}$$

Лема $\mathcal{T}_f$ јесте топологија на Y .

доказ лева. $\square$

Ситав $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$ је колички.

доказ директно из деф. $\square$

Ситав $\mathcal{T}_f$ је најмања топ. топ. је f нестр.

Колички простор задајемо на 3 начина.

① Помоћу релације екв.

Нека је X топ. и $\sim$ рел. екв. на X . Природна пројекција $\pi: X \rightarrow X/\sim$ нем деје топ. на $X/\sim$:
$$x \mapsto [x]$$

$$\mathcal{T}_{X/\sim} := \mathcal{T}_\pi = \{ V \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}.$$

Пар $(X/\sim, \mathcal{T}_{X/\sim})$ је колички простор.

② Помоћу подскупа.

Нека је X топ. и $A \subseteq X$. Дефиницемо рел. $\sim$ на X :

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x=y \vee x, y \in A$$

$\sim$ је рел. екв. па дефиницемо:

$$X/A \stackrel{\text{def}}{=} X/\sim \quad \text{и} \quad \mathcal{T}_{X/A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{X/\sim}$$

Пар $(X/A, \mathcal{T}_{X/A})$ је колички простор.

③ Помоћу преликавања.

Нека су X, Y топ. и $f: X \rightarrow Y$ нестр. Дефиницемо $\sim$ на X :

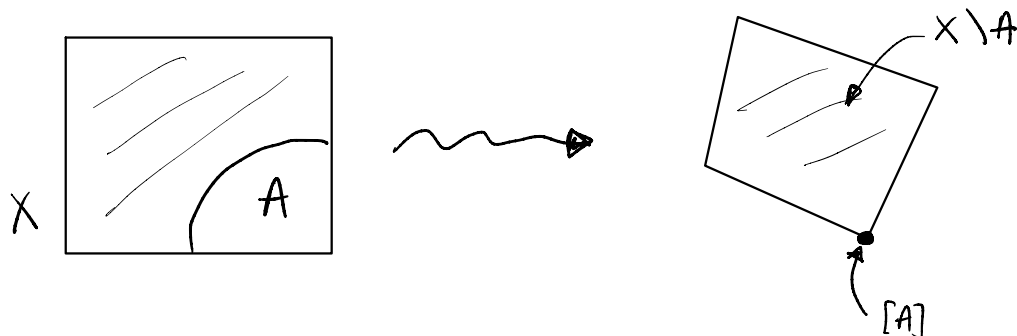
$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

$\sim$ је рел. екв. и

$$X/f \stackrel{\text{def}}{=} X/\sim, \quad \mathcal{T}_{X/f} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{X/\sim}.$$

Пар $(X/\sim, \mathcal{T}_{X/\sim})$ је количански простор.

Пример $A \subseteq X$, $X/A =$ „склепимо A у тачку“



(1) $X/X \approx *$

(2) $D^2/A =$

(3) $D^n/\partial D^n = S^n$

(4) $[1,4]/\{1,2,3,4\} =$ $\approx$

Пример (1) $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x-y \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R} \approx \dots \begin{array}{ccccccc} | & \times & 0 & | & \times & 0 & | & \times & 0 & | & \times & 0 \\ -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & \dots \end{array} \Big/ \sim \approx S^1$

интервал $\rightarrow \bigcirc_{S^1}$ („Намотамо“ $\mathbb{R}$ на S^1)
 $\approx \mathbb{R}$

(2) $\sim$ на $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}^2/\sim \approx T^2 =$ $=$ тороус

Теорема Ако је $f: X \rightarrow Y$ количничко, онда је $X/f \approx Y$.

доказ: $X \xrightarrow{f} Y$ Нека је $g: X/f \rightarrow Y$ тако да



$$g([x]) := f(x)$$

g је добро деф.: $x, y \in X$

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow g([x]) = g([y])$$

g је неур.: $g \circ \pi = f$ је неур. и π кол. $\Rightarrow g$ је неур.

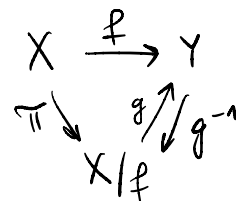
g је "1-1": $g([x]) = g([y]) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

g је "на": $y \in Y \xRightarrow{f^{-1}}$ $(\exists x \in X) f(x) = y \Leftrightarrow y = g([x])$.

g је биекција $\Rightarrow$ постоји g^{-1}

g^{-1} је неур.: $g^{-1} \circ f = \pi$ је неур. и

f количничко $\Rightarrow g^{-1}$ је неур.



$\Rightarrow g$ је хомеоморфизам $\Rightarrow X/f \approx Y$. $\square$

Пример $f: [0,1] \rightarrow S^1$ $f(t) = e^{2\pi i t}$

f је неур. и слика компактно $[0,1]$ у T_2 простор S^1 , па је затворена.

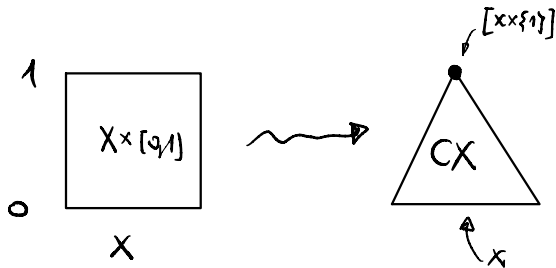
Дакле, f је неур., "на" и затворена $\Rightarrow f$ је количничко.

$\Rightarrow [0,1]/f \approx S^1$.

Конструкція нових м.пр.

① Конус простора X ("cone of X ")

$$CX \stackrel{\text{def}}{=} X \times [0,1] /_{X \times \{1\}} = X \times [0,1] /_{\substack{(x,1) \sim (y,1) \\ (\forall x,y \in X)}}$$

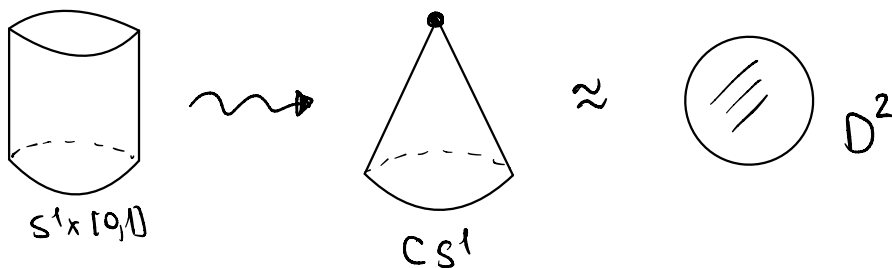


лишемо гвіаєє $i: X \hookrightarrow CX$:

$$i(x) = [x, 0]$$

(а може и $i(x) = [x, t], t \in [0,1)$)

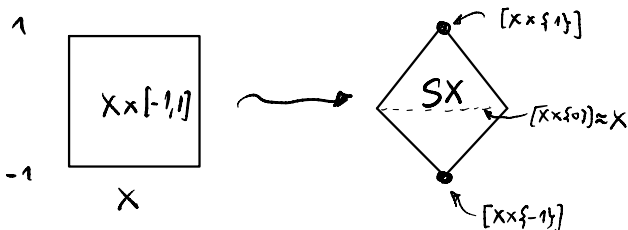
Пример $CS^1 = S^1 \times [0,1] /_{S^1 \times \{1\}} = D^2$



Генералю: $CS^n = D^{n+1}$

② Суспензия простора X ("suspension of X ")

$$SX = X \times [-1,1] /_{\substack{(x,1) \sim (y,1), \\ (x,-1) \sim (y,-1), \\ (\forall x,y \in X)}}$$

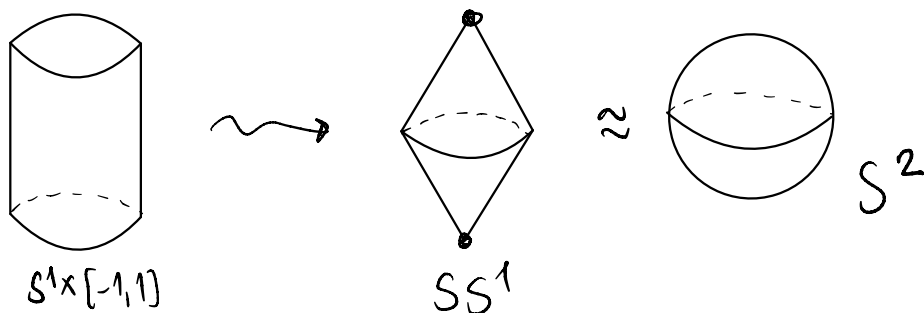


лишемо гвіаєє $i: X \hookrightarrow SX$:

$$i(x) = [x, 0]$$

(а може и $i(x) = [x, t], t \in (-1,1)$)

Пример $SS^1 = S^1 \times [-1, 1] / \sim \approx S^2$



Теорема $SS^n \approx S^{n+1}$

③ Замкнутое union $X \sqcup Y : (X \sqcup Y, \mathcal{T}_{X \sqcup Y})$

$$\mathcal{B}_{X \sqcup Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_X \sqcup \mathcal{T}_Y$$

④ Простор с данной точкой (X, x_0)

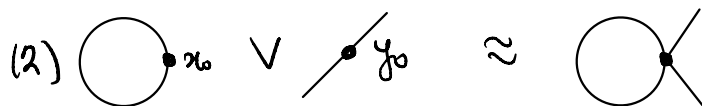
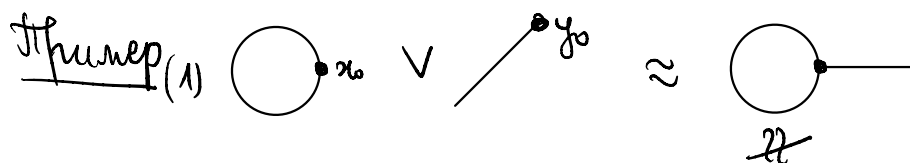
$x_0 \in X$ - произвольная точка из X

(объект не конструируем, только вводим поjam данной точке)

⑤ Букет пространств X и Y ("wedge of X and Y ")

$x_0 \in X, y_0 \in Y$ данные точки

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$$



Букет зависит от выбора данных точек!

у неким просторима је сваједно миш је даване π . и тада миш само $X \vee Y$. η).

$$(\forall x_0, x_1 \in X) (\forall y_0, y_1 \in Y) (X, x_0) \vee (Y, y_0) \approx (X, x_1) \vee (Y, y_1)$$

$$\Rightarrow X \vee Y \stackrel{\text{def}}{=} (X, x_0) \vee (Y, y_0), \text{ за } x_0 \in X, y_0 \in Y \text{ произвољно.}$$

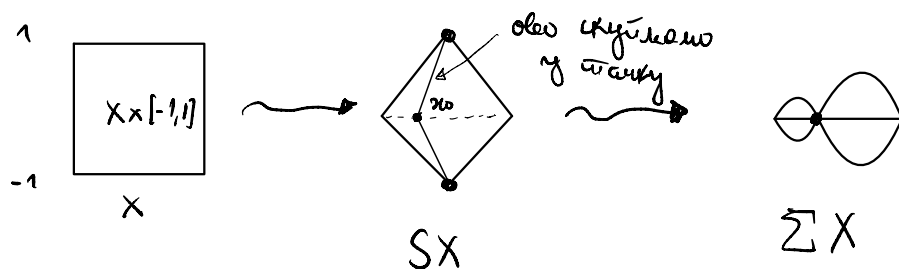
(углавном се и сретемо даци са овом ситуацијом.)

Пример $[1,4] / \{1,2,3,4\} \approx \bigcirc = S^1 \vee S^1 \vee S^1$

⑥ Редукована суспензија од X ("reduced suspension of X ")

$x_0 \in X$ давана тачка

$$\Sigma X \stackrel{\text{def}}{=} SX / \begin{matrix} [(x_0, t)] \sim [(x_0, s)] \\ (\forall s, t \in [-1, 1]) \end{matrix}$$

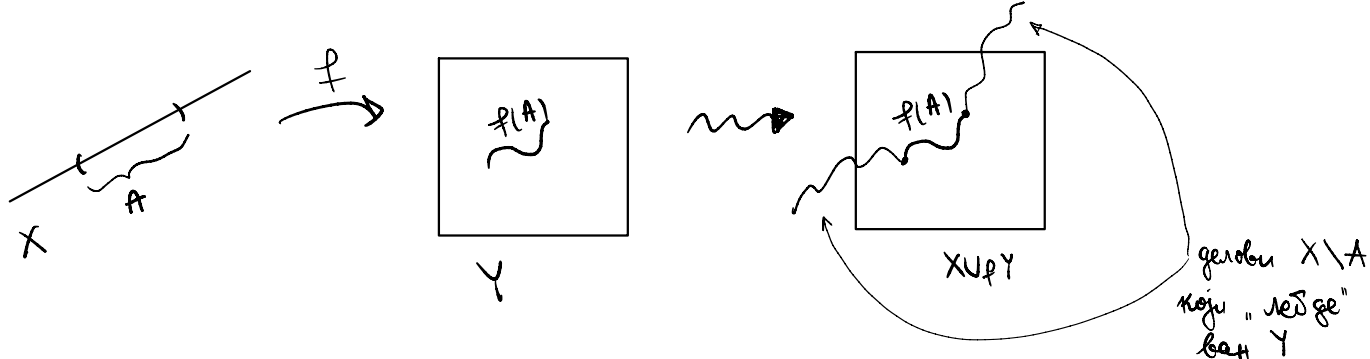


SX и ΣX ће имати сличне особине, али разлика је у таме миш у ΣX много природан избор даване тачке $(\{x_0\} \times [-1, 1])$ док у SX то не може.

⑦ Лејбнџов простор (adjunction space)

X, Y топ. пр., $A \subseteq X$, $f: A \rightarrow Y$

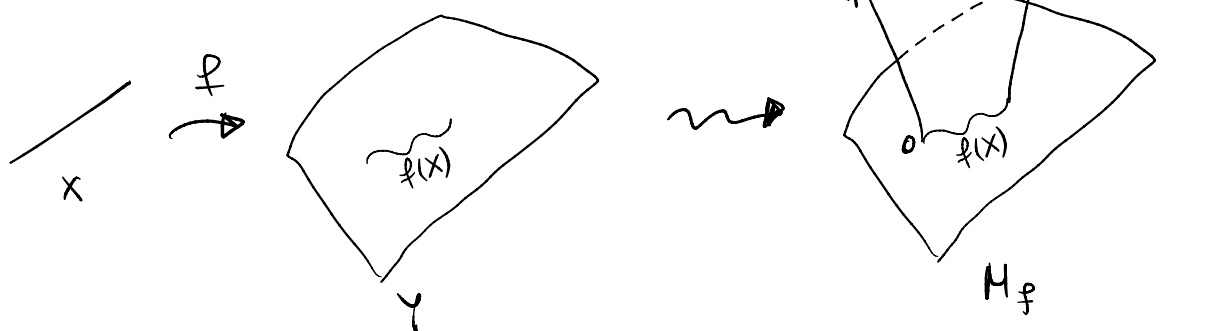
$$X \cup_f Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cup Y / \begin{matrix} a \sim f(a) \\ (\forall a \in A) \end{matrix}$$



Пример $X \cup_{\text{const}} Y \approx X/A \vee Y$

⑧ Цилиндар преликавање ("mapping cylinder")
 $f: X \rightarrow Y$ непр.

$$M_f \stackrel{\text{def}}{=} (X \times [0,1]) \sqcup Y / (x,0) \sim f(x)$$



⑨ Конус преликавање ("mapping cone")
 $f: X \rightarrow Y$ непр.

$$C_f \stackrel{\text{def}}{=} (X \times [0,1]) \sqcup Y / \begin{aligned} &(x,0) \sim f(x) \\ &(x_1,1) \sim (x_2,1) \\ &(\forall x_1, x_2 \in X) \end{aligned}$$



⑩ Связное произведение X и Y ("join of X and Y ")

$$X * Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \times Y \times [0, 1]) / \sim$$

$\sim$ задана так:

$$(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), \quad x \in X, y_1, y_2 \in Y$$

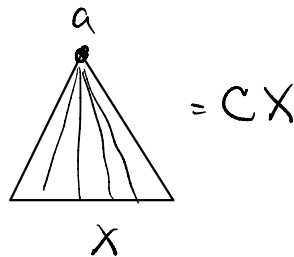
$$(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1), \quad x_1, x_2 \in X, y \in Y$$

$X * Y =$ "связку точек из X соединим со всеми точками из Y "

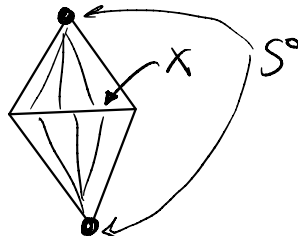
Пример (1) $S^0 * S^0 \approx S^1$ ($S^0 = \bullet \bullet$ (две точки))

$$\begin{array}{c} \bullet \\ S^0 \end{array} * \begin{array}{c} \bullet \\ S^0 \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \approx \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \approx S^1$$

(2) $\underbrace{\{a\}}_{\substack{\text{н.т.р. от} \\ 1 \text{ точки}}} * X \approx CX$



(3) $S^0 * X \approx SX =$



(4) $S^m * S^n \approx S^{m+n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} S^0 * S^0 = S(S^0) = S^1 \\ S^0 * S^0 * S^0 = S^0(S^1) = S^2 \\ \dots \\ S^0 * \dots * S^0 \approx S^{k-1} \end{array} \right\} \Rightarrow S^m * S^n \approx \underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{m+1} * \underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{n+1} \approx S^{m+n+1}$$