

(2) $\Rightarrow$ (3): неор. суј. $\forall F \in \mathcal{F}_X$

$$f(F) = \left(\underbrace{f(F^c)}_{\substack{\text{суј.} \\ \in \mathcal{F}_Y}} \right)^c \in \mathcal{F}_Y \Rightarrow f \text{ је замишљено.}$$

$\uparrow$
 $f \text{ суј.}$

(3) $\Rightarrow$ (4): суј. $\forall$

$$f \text{ неор.} \Rightarrow (\forall A \subseteq X) \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

опротивно: $f(A) \subseteq f(\bar{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\bar{A})}$

$\underbrace{\substack{\text{замишљено} \\ \in \mathcal{F}_Y}}_{\substack{\in \mathcal{F}_Y}} \quad \underbrace{\substack{\in \mathcal{F}_X}}_{\substack{\in \mathcal{F}_X}}$

(4) $\Rightarrow$ (1): суј. $\forall$

$$(\forall A \subseteq X) \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f \text{ је неор.}$$

f^{-1} неор.: нека је $F \in \mathcal{F}_X$

$$\underbrace{(f^{-1})^{-1}(F)}_{f \text{ суј.}} = f(F) = f(\bar{F}) \stackrel{(4)}{=} \overline{f(F)} \in \mathcal{F}_Y. \quad \square$$

деф. $f: X \rightarrow Y$ је ушљивање ако је $f: X \rightarrow f(X)$ хомео.

(свој. ушљивање је "1-1" и неор.) Пшљено $f: X \hookrightarrow Y$.

Пример M^n платка матрица структура.

За које k имамо: $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^k$

Видети: $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

неор. $\mathbb{R}P^{2^k} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2 \cdot 2^k - 1}$

Конструкција топологије пресликавањима:

$$(1) f: X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$\uparrow$ скуп

иницијална топ. $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) := \{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y \}$

$$(2) f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$$

финална топологија $\mathcal{T}_f := \{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}$

- иницијална топ. је најмања топ. је f нпр., а
финална је највећа топ. је f нпр.

Пример $i: A \hookrightarrow X \Rightarrow \mathcal{T}_A = i^{-1}(\mathcal{T}_X)$

Тополошки производ

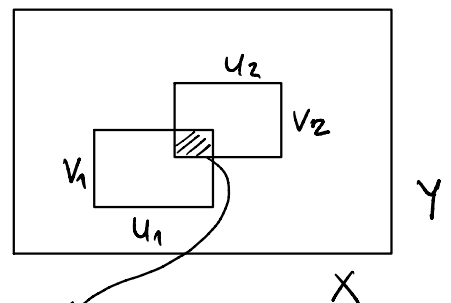
Нека су $(X, \mathcal{T}_X) \sim (Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр. дефинишемо топ. на $X \times Y$.

База: $\mathcal{B}_{X \times Y} = \{ U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \}$

$$1) X \times Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{X \times Y}} B$$

$$2) U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}_{X \times Y}$$

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}_{X \times Y}$$

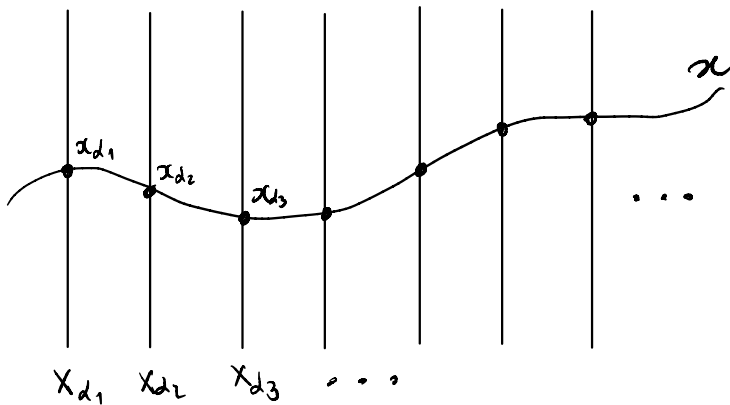


$$1) + 2) \Rightarrow \mathcal{B}_{X \times Y} \text{ јесте база}$$

Ова база ни задаје топ. $T_{X \times Y}$ на $X \times Y$.
 Слично дефинијемо $(X_1 \times \dots \times X_n, T_{X_1 \times \dots \times X_n})$

Пошто свако $\alpha \in A$ произведе простор $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha \in A}$

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid (\forall \alpha \in A) \underbrace{x(\alpha)}_{x_\alpha} \in X_\alpha\}$$



Имамо пројекцију за $\alpha_0 \in A$:

$$p_{\alpha_0}: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_{\alpha_0}$$

$$x \mapsto x_{\alpha_0}$$

На $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ дефинијемо следеће топологије:

- 1) box топ.
- 2) топ. Тихонова

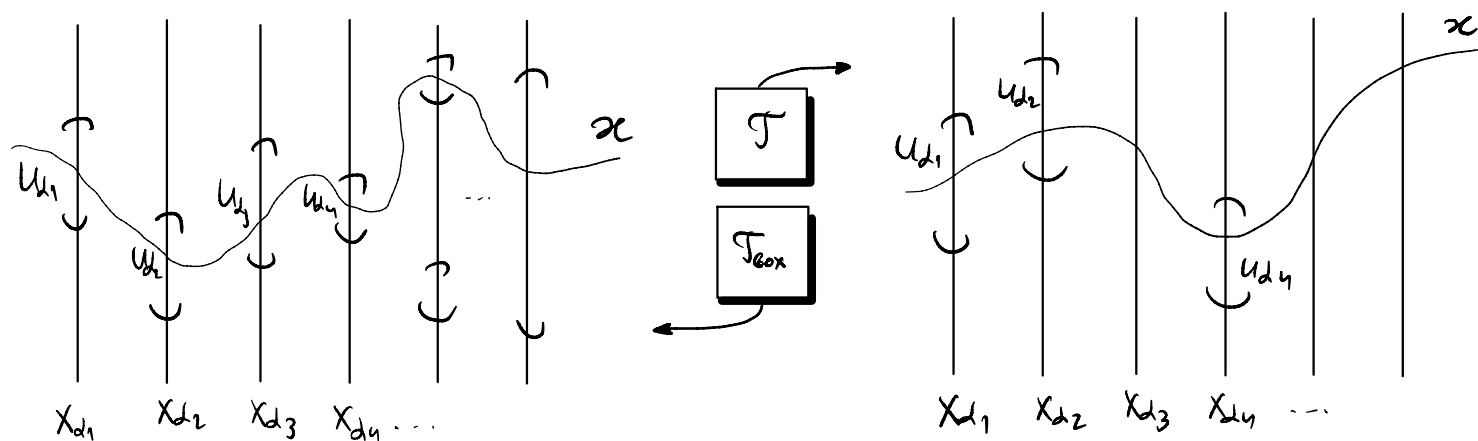
box топ.: задата база $B_{box} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid (\forall \alpha \in A) U_\alpha \in T_\alpha \right\}$

Тихонова топ.: задата предбаза

$$\mathcal{U} = \{ p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A, U_\alpha \in T_\alpha \} \rightsquigarrow \mathcal{T}$$

деф. Топологија производа топологија $\{(X_\alpha, T_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ је простор $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ са топологијом Тихонова $\mathcal{T}$.

Илустрација башних скупова у $\mathcal{T}_{\text{box}}$ и $\mathcal{T}$:



$$U = \prod_{d \in \mathcal{D}} U_d$$

$$V = \bigcap p_{d,j}^{-1}(U_{d,j})$$

↑ коначан индекс

$$x \in U \Leftrightarrow x_d \in U_d, \forall d$$

$$x \in V \Leftrightarrow x_d \in U_d, \text{ коначно много } d$$

↑
за свако d имамо
"гранични" кука x
може да прође

↑
имамо само неколико
"граничних"

Како изабрати $p_d^{-1}(U_d) \in \mathcal{T}$?

$$p_{d_0}^{-1}(U_{d_0}) = \prod_{d \in \mathcal{D}} V_d, \quad V_d = \begin{cases} U_{d_0}, & d = d_0 \\ X_d, & d \neq d_0 \end{cases}$$

Оштрије је $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}_{\text{box}}}$, па и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{box}}$. Произвођи:

Лема (1) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{box}}$

(2) Ако је $\mathcal{A}$ коначан, онда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{box}}$.

Лема $\mathcal{T}$ је најужа топологија на X из $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ свих пројекција p_d непрекидне.

Слѡб: $(\forall \alpha \in A) p_\alpha$ је сѡборено.

доказ: Докажимо је да је слика датих сѡборено.

$$p_\alpha(p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})) = \begin{cases} U_{\alpha_i}, & \alpha = \alpha_i \\ X_{\alpha_i}, & \alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n \end{cases} \in \mathcal{T}_{\alpha_i} \quad \square$$

Слѡб Нека је X топ. пр. и $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фамилија топ. пр.

Продуктска мапа $f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ је непрекидно ако

$(\forall \alpha \in A) p_\alpha \circ f: X \rightarrow Y_\alpha$ је непр.

(на $\prod Y_\alpha$ подразумевамо топ. $\mathcal{T}_{\text{продуктска}}$.)

доказ: $\Rightarrow$: композиција непр. је непр.

$\Leftarrow$: На основу слѡба од раније (са $\mathcal{T}$ инверзно) доказуемо је да се уверимо да је инверзна слика ел. из $\mathcal{F}$ сѡборено.

Нека је $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \in \mathcal{F}$.

$$f^{-1}(p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})) = \underbrace{(p_{\alpha_0} \circ f)^{-1}}_{\text{непр.}}(\underbrace{U_{\alpha_0}}_{\in \mathcal{T}_{\alpha_0}}) \in \mathcal{T}_X. \quad \square$$

Слѡб (1) $\prod_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha \in A} A_\alpha} \quad (A_\alpha \subseteq X_\alpha)$

(2) $\text{int}(\prod_{\alpha \in A} A_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha \in A} \text{int} A_\alpha$

Пример $X = \mathbb{R}^\mathbb{N} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} =$ простор реалних низова

Показујемо гласовито гласоване $d: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$

$d(x) := (x, x, x, x, \dots) =$ константан низ.

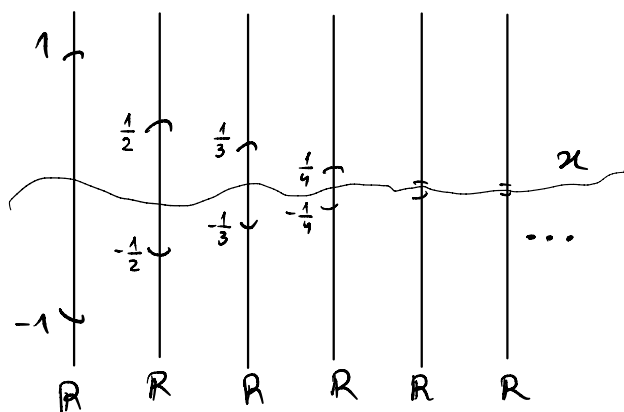
d је неоп. у $\mathcal{T}$:

$$(p_\alpha \circ d)(\alpha) = p_\alpha(\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \overset{\alpha}{\downarrow} \alpha, \dots) = \alpha = \Pi_R(\alpha)$$

$\Pi_R: R \rightarrow R$ је неоп. $\Rightarrow d$ је неоп.

d није неоп. у $\mathcal{T}_{\text{cox}}$:

нпр. d је неоп. и још увек $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{T}_{\text{cox}}$



$$d^{-1}(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \notin U$$

⚡

геп. Нека су $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фамилије н. пр. и $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$. Трансформација $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ је

$$f: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$$

гласно са $(f(x))_\alpha = f_\alpha(x_\alpha)$.

Закле, компјутира гласно:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in A} X_\alpha & \xrightarrow{f} & \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \\ p_\beta \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow p_\beta \\ X_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & Y_\beta \end{array}$$

Лема Производ пресл. је непр. ако је f_α непр. $\forall \alpha \in A$.
доказ: директно из леми о непрекинутости $f: X \rightarrow \prod Y_\alpha$. $\square$

Лема Ако је f_α хомео. за свако $\alpha \in A$, онда је и производ ових пресл. хомео.

Тополошка својства

P -неко својство (непр. компактност, повезаност, ...)

- P је непрекидна инваријантна ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X, Y) (\forall \text{ непр. и "нр" } f: X \rightarrow Y) P(X) \Rightarrow P(Y)$$

- P је тополошка инваријантна ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X, Y) X \approx Y \Rightarrow (P(X) \Leftrightarrow P(Y))$$

- P је наследно ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X) (\forall A \subseteq X) P(X) \Rightarrow P(A)$$

- P је слабо наследно ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X) (\forall A \in \mathcal{F}_X) P(X) \Rightarrow P(A)$$

- P је продуктивна ако

$$(\forall A) (\forall \text{ фем. т. пр. } \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}) \left((\forall \alpha \in A) P(X_\alpha) \right) \Rightarrow P\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$$

Повезаности

деф. Пош. пр. $(X, \mathcal{T}_X)$ је повезан ако не постоји пар скупова $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ так. $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$.

Ако постоје овакви скупови, кажемо да је X неповезан, а пар (U, V) називамо дисјункцијом од X .

Лема Следјућа тврђења су еквивалентна:

- (1) X је повезан;
- (2) не постоји непр. и „на“ $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{T}_d)$;
- (3) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.

Доказ $(1) \Rightarrow (3)$: прс. $(\exists U \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{F}) \setminus \{\emptyset, X\})$

$\Rightarrow (U, U^c)$ је дисјункција од X $\nless$

$(3) \Rightarrow (1)$: прс. X није повезан и (U, V) нека дисјункција,
так. $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.

$\Rightarrow U = V^c \in \mathcal{F}_X \Rightarrow U \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{F}_X$ $\nless$

$(1) \Rightarrow (2)$: прс. $\exists f: X \rightarrow \{0, 1\}$ непр. и „на“

$$U := f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$$

$$V := f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$$

$\Rightarrow (U, V)$ је дисјункција од X $\nless$

$(2) \Rightarrow (1)$: прс. (U, V) дисјункција од X .

географично $f|_u = 0, f|_v = 1$.

f је непр. на основу леме о ланцању. $\hookrightarrow \square$

деф. $A \subseteq X$ је повезан ако је (A, τ_A) повезан.

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ $A \subseteq \mathbb{R}$ је повезан ако је интервал
(отворен, затворен, отворен, затворен, интервал, сек, ...)

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ Зоренсфрајова права

$A \subseteq \mathbb{R}$ је пов. $\Leftrightarrow |A| = 1$

$|A| \geq 2 \Rightarrow \exists a, b \in A, a \neq b$

$$A = \left(A \cap \left(-\infty, \frac{a+b}{2} \right) \right) \cup \left(A \cap \left[\frac{a+b}{2}, +\infty \right) \right)$$

$\nwarrow \nearrow$
дисконекција

Лема Повезаност је непр. инваријантна, тј. $f: X \xrightarrow{HA} Y$
непр., X пов. $\Rightarrow Y$ пов.

доказ прс. Y није пов.

$\Rightarrow \exists$ непр. и "на" $g: Y \rightarrow \{0, 1\}$

$\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow \{0, 1\}$ непр. и "на". $\hookrightarrow \square$