

Лема $f, g: X \rightarrow Y$ нпр. и Y је T_2 . Тогда

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X.$$

доказ $f \times g: X \rightarrow Y \times Y$ је нпр.

$$Y \text{ је } T_2 \Leftrightarrow \Delta_Y \in \mathcal{F}_{Y \times Y} \Rightarrow \overbrace{(f \times g)^{-1}(\Delta_Y)}^A \in \mathcal{F}_X \quad \square$$

Послеђица $f, g: X \rightarrow Y$ нпр. Y T_2 и $f|_D = g|_D$ где је $\bar{D} = X$. Тогда $f = g$.

доказ $D \subseteq A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X$

$$\Rightarrow \bar{D} \subseteq \bar{A} \Leftrightarrow X \subseteq A \Leftrightarrow X = A \quad \square$$

деф X је регуларан ако

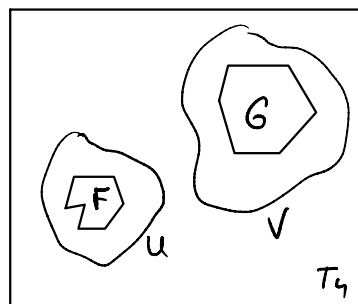
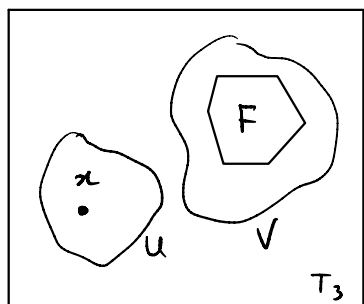
$$(\forall x \in X)(\forall F \in \mathcal{F}) x \notin F \Rightarrow [(\exists U, V \in \mathcal{T}) x \in U \wedge F \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset]$$

деф X је T_3 ако је регуларан и T_1 .

деф X је нормалан ако

$$(\forall F, G \in \mathcal{F}) F \cap G = \emptyset \Rightarrow [(\exists U, V \in \mathcal{T}) F \subseteq U \wedge G \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset]$$

деф X је T_4 ако је нормалан и T_1 .



Теорема $M \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ (M = метрики)

доказ $T_i \Rightarrow T_{i-1}$ по деф. Само још да покажемо $M \Rightarrow T_4$.

Сваки метрички пр. M је очигледно T_1 , па још да покажемо да је нормалан.

Нека су $F, G \in \mathcal{F}_M$ и $F \cap G \neq \emptyset$. Дефинишемо пресекавање $f: M \rightarrow [0, 1]$ на следећи начин:

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

f је добро дефинисано: • $f(x) \in [0, 1]$ и

$$F \cap G = \emptyset \Rightarrow d(x, F) + d(x, G) \neq 0$$

f је и неур. као композиција неур.

Приметимо: $x \in F \Rightarrow f(x) = 0$

$$x \in G \Rightarrow f(x) = 1$$

Нека је $U := f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ и $V := f^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$.

Тада $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset \Rightarrow M$ је нормалан. $\square$

Пример (1) $T_4 \not\Rightarrow M$ (Зоренфралојева права)

(2) $T_3 \not\Rightarrow T_4$ (Зоренфралојева права $(\mathbb{R}, S) \times (\mathbb{R}, S)$)

(3) $T_2 \not\Rightarrow T_3$ (topology.pi-base.org ← контрпримери)

Знај $(\mathbb{R}, S)$ је T_4 .

доказ T_1 : $x, y \in \mathbb{R}$, дуо. $x < y \Rightarrow x \in [x, \frac{x+y}{2})$, $y \in [y, y+1)$

нормалност: Нека су $F, G \in \mathcal{F}$ и $F \cap G = \emptyset$.

$$(\forall x \in F) \ x \in G^c \in \mathcal{S} \Rightarrow (\exists [x, x') \in \mathcal{B}) \ [x, x') \subseteq G^c$$

$$(\forall y \in G) \ y \in F^c \in \mathcal{S} \Rightarrow (\exists [y, y') \in \mathcal{B}) \ [y, y') \subseteq F^c$$

Нека је $U = \bigcup_{x \in F} [x, x')$ и $V = \bigcup_{y \in G} [y, y')$.

Оштрије је $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ и $U, V \in \mathcal{S}$.

Да ли је $U \cap V = \emptyset$? Пре. постоји $a \in U \cap V$

$$\Rightarrow (\exists x \in F, y \in G) \quad a \in [x, x') \cap [y, y')$$

$$\text{Број } x < y \Rightarrow y \in [x, x') \subseteq G^c \quad \nabla$$

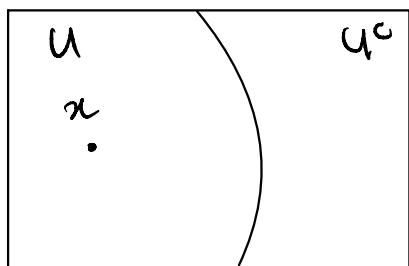
$$\Rightarrow (R, \mathcal{S}) \text{ је } T_4. \quad \square$$

Лема X је регуларан ако

$$(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{T}) \quad x \in U \Rightarrow [(\exists V \in \mathcal{T}) \quad x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U]$$

доказ: $\Rightarrow$: Нека је $x \in X$ и $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$

$$\Rightarrow x \notin U^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (\exists V, W \in \mathcal{T}) \quad x \in V, U^c \subseteq W, V \cap W = \emptyset$$



$$V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subseteq W^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{V} \subseteq W^c$$

$$\Rightarrow x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W^c \subseteq U$$

$\Leftarrow$: Нека је $x \in X$, $F \in \mathcal{F}$, $x \notin F$. Тада $x \in F^c \in \mathcal{T}$

$$\Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T}) \quad x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq F^c$$

$$\text{Узмимо } U := \bar{V}^c \in \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow x \in V, F \subseteq U, U \cap V = \emptyset \Rightarrow X \text{ је регуларан. } \quad \square$$

Лема X је нормалан ако

$$(\forall F \in \mathcal{F})(\forall U \in \mathcal{T}) \quad F \subseteq U \Rightarrow [(\exists V \in \mathcal{T}) \quad F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U]$$

доказ: за брзо. $\square$

Лема Нормалност, регуларност, T_3 и T_4 су топ. инваријантне.

Доказ: за већу. $\square$

Пример Нормалност, регуларност, T_3 и T_4 нису метр. инв.

$$\Pi : (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow (X, \mathcal{T}_a)$$

$\nearrow$
 T_3, T_4

$\nwarrow$
није ни T_0

Лема Регуларност и T_3 су напредна својства.

Доказ X регуларан, $A \subseteq X$

$$x \in A, F \in \mathcal{T}_A, x \notin F \Rightarrow (\exists G \in \mathcal{T}_x) F = G \cap A$$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_x) x \in U, G \subseteq V, U \cap V = \emptyset$$

$$\text{узмимо: } U_A := U \cap A, V_A := V \cap A \in \mathcal{T}_A$$

$$\Rightarrow x \in U_A, F \subseteq V_A, U_A \cap V_A = \emptyset. \quad \square$$

Пример Нормалност није напредна.

$$X = \{a, b, c, d\} \quad \mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

$$A = \{b, c, d\} \quad \mathcal{T}_A = \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

X је нормалан (нема гужуњавити затворени скупова)

A није ($\{b\}, \{c\} \in \mathcal{T}_A$ и не можемо их раздвојити)

Лема Нормалност је слабо напредна.

Доказ за већу. $\square$

Теорема Регулярности и T_3 су еквивалентна својства, али и више од тога:

$$(\forall \alpha \in A) X_\alpha \text{ рет./} T_3 \Leftrightarrow X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ рет./} T_3$$

доказ T_1 и

регулярности: $\Rightarrow$: X_α регуларни, $\alpha \in A$

Нека је $x \in X$ и $\kappa \in U \in \mathcal{T}$. Изражимо $V \in \mathcal{T}$ так. $\kappa \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

$\kappa \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq U$,

$$B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad U_\alpha = X_\alpha \text{ за } \alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

За $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i} \Rightarrow (\exists V_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}) x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i} \subseteq \bar{V}_{\alpha_i} \subseteq U_{\alpha_i}$

$$\text{Нека је } V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha, \quad V_\alpha = \begin{cases} V_{\alpha_i}, & \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha, & \alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \end{cases}$$

Тада $x \in V \subseteq \bar{V} = \overline{\prod_{\alpha \in A} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \bar{V}_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in A} U_\alpha = B \subseteq U \Rightarrow X$ је рет.

$\Leftarrow$: Нека је $\alpha_0 \in A$ произвољно. X_{α_0} је потпростор од X и регуларности је наслеђе $\Rightarrow X_{\alpha_0}$ је регуларна. $\square$

Теорема [Уонов лема] Нека је X топ. пр. топ. Ако постоји своја топ. скуп $D \subseteq X$ и дискретан $S \in \mathcal{F}_X$ топ.

$$|P(D)| \leq |S|$$

онда X није нормалан.

доказ лема $\square$

Пример $(\mathbb{R}, S)^2$ није нормалан

$$S := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad D := \mathbb{Q}^2$$

Stage: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$, $S \in \mathcal{F}$,

$$|S| = c = 2^{|\mathcal{V}_0|} = |\mathcal{P}(\mathcal{D})|$$

Чоне $\Rightarrow (\mathbb{R}, S)^2$ није нормалан.

Последње Нормалност и T_4 није продуктивна својство.

геп X је потпуно регуларан ако

$$(\forall x \in X)(\forall F \in \mathcal{F}_x \setminus \{\emptyset\}) x \notin F \Rightarrow \left[(\exists f: X \rightarrow [0,1] \text{ неор.}) f(x)=0, f(F)=\{1\} \right]$$

геп X је $T_{3\frac{1}{2}}$ (Тихонов) ако је потпуно регуларан и T_1 .

Лема $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$

геп Нека је $x \in X$, $F \in \mathcal{F}_x$, $x \notin F$.

$$\Rightarrow \exists f: X \rightarrow [0,1] \text{ неор.}, f(x)=0, f(F)=\{1\}.$$

$$\text{узмимо } U := f^{-1}([0, \frac{1}{3})), V := f^{-1}([\frac{2}{3}, 1]) \in \mathcal{T}_x$$

Stage $x \in U$, $F \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ је T_3 . $\square$

Лема Потпуно рег. и $T_{3\frac{1}{2}}$ су продуктивна и наследна својства

геп Лема $\square$

Пример Потпуно рег. и $T_{3\frac{1}{2}}$ није неор. инваријанте

$$\mathcal{D}: (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow (X, \mathcal{T}_a)$$

$\swarrow$
 $T_{3\frac{1}{2}}$

$\searrow$
није $T_{3\frac{1}{2}}$

Пример $(\mathbb{R}, S)^2$ је $T_{3\frac{1}{2}}$, није T_4 .

Уришнова лема

Теорема [Уришнова лема] Хаусдорфов простор X је нормалан ако

$$(\forall A, B \in \mathcal{F}_X) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \left[(\exists f: X \rightarrow [0, 1] \text{ непр.}) f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\} \right]$$

доказ: $\Leftarrow$: узмемо $U := f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$, $V := f^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$ и имамо $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ је нормалан.

$\Rightarrow$: Нека су $A, B \in \mathcal{F}_X$, $A \cap B = \emptyset$

$$(1) A \subseteq B^c \in \mathcal{T} \Rightarrow (\exists U_0 \in \mathcal{T}) A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq B^c$$

$$(2) \quad \begin{array}{c} \bar{U}_0 \\ \uparrow \\ \mathcal{T} \end{array} \in B^c \in \mathcal{T} \Rightarrow (\exists U_{1/2} \in \mathcal{T}) \quad \bar{U}_0 \subseteq U_{1/2} \subseteq \bar{U}_{1/2} \subseteq B^c$$

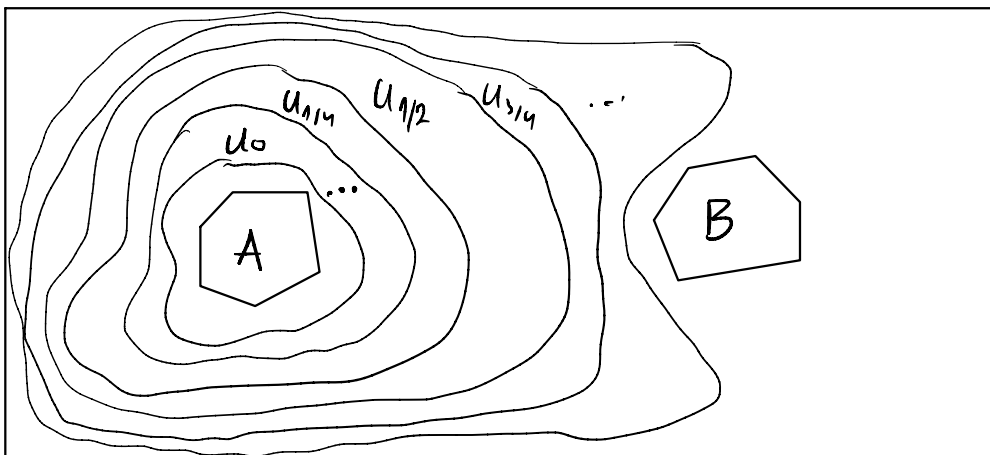
$$(3) (\exists U_{1/4}, U_{3/4} \in \mathcal{T}) \quad \bar{U}_0 \subseteq U_{1/4} \subseteq \bar{U}_{1/4} \subseteq U_{1/2}$$

$$\bar{U}_{1/2} \subseteq U_{3/4} \subseteq \bar{U}_{3/4} \subseteq B^c$$

$\vdots$

добивамо рачунујући франкцију отворених скупова

$$\{ U_{k/2^i} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq k < 2^i \}$$



Уочио прелиминаре $f: X \rightarrow [0, 1]$ тако да

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{ r \mid x \in U_r \}, & x \in B^c \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

Оштрило је $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.

f неор: Неко је $x \in X$ произвољно.

• Неко је $f(x) \in (0,1)$ и $\varepsilon > 0$ мј. $f(x) - \varepsilon > 0$ и $f(x) + \varepsilon < 1$.

Неко су $r_1, r_2 \in [0,1]$ (одлика $\frac{R}{2^i}$) мј.

$$f(x) - \varepsilon < r_1 < f(x) < r_2 < f(x) + \varepsilon$$

$\Rightarrow V = U_{r_2} \setminus \bar{U}_{r_1}$ је отворена околина од x мј.

$$(\forall v \in V) \quad r_1 \leq f(v) \leq r_2$$

$\Rightarrow f$ је неор. у x .

Слично се доказује неор. и у x мј. $f(x) \in \{0,1\}$. $\square$