

Пример $\overline{(0,1)} = \mathbb{R}$ у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ гранична тачка скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x)) G \cap A \neq \emptyset$ и $G \cap A^c \neq \emptyset$.

Скуп свих граничних тачака је граница (∂A) дат скупа

$$\partial A = \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x)) G \cap A \neq \emptyset, G \cap A^c \neq \emptyset\}$$

опште: (1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

(2) $(\forall A \subseteq X) X = \text{int } A \sqcup \partial A \sqcup \overbrace{\text{ext } A}^{\text{int}(A^c)}$

(3) $\bar{A} = \text{int } A \sqcup \partial A$

Пример у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ $\partial(0,1) = \mathbb{R}$ $(\overline{(0,1)} = \text{int}(0,1) \sqcup \partial(0,1))$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \emptyset \end{array}$$

деф. $x \in X$ је тачка напонилавања скупа A ако

$$(\forall G \in \mathcal{O}(x)) G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Скуп свих тачака напонилавања означавамо са A' .

деф. $x \in A$ је изолована тачка скупа A ако $x \in A \setminus A'$.

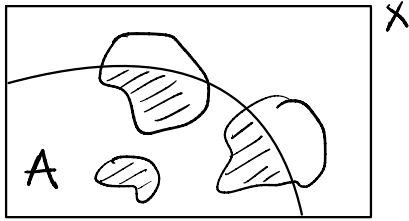
деф. $A \subseteq X$ је свуда густ у X ако је $\bar{A} = X$.

деф. $A \subseteq X$ је нигде густ ако је $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

Тополошки подпростор

Нека је $(X, \mathcal{T})$ т. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$



Лема $(A, \mathcal{T}_A)$ је тополошки простор.
($\mathcal{T}_A$ је топологија на A наследиена од X .)

глас: то глас. $\square$

$$F \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T}) F = A \setminus U$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T}) F &= A \setminus (U \cap A) = A \cap (U \cap A)^c = A \cap (U^c \cup A^c) \\ &= (A \cap U^c) \cup (A \cap A^c) = A \cap U^c \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{F}) F = A \cap V$$

$$\text{Закле, } \mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$$

$$\text{Лема: (1) } A \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$$

$$(2) A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_X$$

глас: то глас. $\square$

$$\text{За глас: } A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mathcal{d}_B A \subseteq \mathcal{d}_X A \text{ и}$$

$$\mathcal{d}_B A = \mathcal{d}_X A \cap B$$

Непрерывность

гевр. Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр. Прелиминање $f: X \rightarrow Y$ је непрекидно ако $(\forall V \in \mathcal{T}_Y) f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Пример (1) $f: X \rightarrow Y, f = \text{const} \Rightarrow f$ је невр.

(2) $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_a)$ је невр.

(3) $f: (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow Y$ је невр.

(4) $f(x) = \text{id}_X(x) = x, f: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$

f је невр. $\Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

гевр. Прелиминање $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ је невр. у $x_0 \in X$ ако $(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0))) f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x_0)$.

Теорема Нека је $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$. Следићи искази су еквивалентни:

- (1) f је невр.
- (2) $(\forall x \in X) f$ је невр. у x .
- (3) Ако је $\mathcal{B}_Y$ база за Y , онда $(\forall B \in \mathcal{B}_Y) f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.
- (4) Ако је $\mathcal{S}_Y$ предбаза за Y , онда $(\forall S \in \mathcal{S}_Y) f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$.
- (5) $(\forall F \in \mathcal{F}_Y) f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$.
- (6) $(\forall A \subseteq X) f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
- (7) $(\forall B \subseteq Y) \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$

доказ: (1) $\Leftrightarrow$ (2) по гевр.

(1) $\Rightarrow$ (3): $\Rightarrow$ $\forall B \in \mathcal{B}_Y B \subseteq \mathcal{T}_Y$

$\Leftarrow$: $U \in \mathcal{T}_Y, U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f^{-1}(B_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$$

(1) $\Leftrightarrow$ (5): $F \in \mathcal{F}_Y$

$$(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(\underbrace{F^c}_{\in \mathcal{F}_Y}) \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$$

(1) $\Leftrightarrow$ (4): $\Rightarrow$: $\forall$ jez $\mathcal{G}_Y \subseteq \mathcal{F}_Y$

$\Leftarrow$: $\text{pokazujemo } (4) \Rightarrow (3) (\Leftrightarrow (1))$

$$B \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}_Y} \Rightarrow B = A_1 \cap \dots \cap A_k, A_i \in \mathcal{G}_Y$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \underbrace{f^{-1}(A_1)}_{\in \mathcal{T}_X} \cap \dots \cap \underbrace{f^{-1}(A_k)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$$

(1) $\Rightarrow$ (6): $f(\bar{A}) \stackrel{?}{\subseteq} \overline{f(A)}$

Herma je $y \in f(\bar{A})$, naj. mnogo $x \in \bar{A}$ tak $y = f(x)$

Herma je $G \in \mathcal{O}(Y)$. $\text{Uzimo: } G \cap f(A) \neq \emptyset$.

f je otv. $y \approx \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(X)$

Kako $x \in \bar{A} \Rightarrow A \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \cap f^{-1}(G)$

$$\left. \begin{array}{l} a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A) \\ a \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(G)) \subseteq G \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) \in f(A) \cap G$$

$$\Rightarrow f(A) \cap G \neq \emptyset \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$$

(6) $\Rightarrow$ (7): Herma je $B \subseteq Y$. Imamo $f^{-1}(B) \subseteq X$

$$\stackrel{(6)}{\Rightarrow} f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \underbrace{\overline{f(f^{-1}(B))}}_{\subseteq B} = \bar{B} \quad / \quad f^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)}))}_{\subseteq \overline{f^{-1}(B)}} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$$

$$\overline{f^{-1}(\emptyset)}$$

$$(7) \Rightarrow (5): F \in \mathcal{F}_Y \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \Leftrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X. \quad \square$$

Лема Композиција непр. ф-ја је непр.

доказ: по глф.

Лема: Нека је $f: X \rightarrow Y$ непр. и $A \subseteq X$. Тада је и $f|_A$ непр.

доказ: $f|_A: A \rightarrow Y$

$$\text{Нека је } V \in \mathcal{T}_Y. \quad (f|_A)^{-1}(V) = A \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_A. \quad \square$$

$$\text{глф. } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{O}(x)) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) n > n_0 \Rightarrow x_n \in G$$

Лема Нека је $f: X \rightarrow Y$ непр. и (x_n) нис у X . Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Теорема [В. Лемберг] Нека су X, Y топ., $A_\alpha \subseteq X, \alpha \in \mathcal{A}, X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$.

Нека је $f: X \rightarrow Y$ топ. $f_\alpha := f|_{A_\alpha}: A_\alpha \rightarrow Y$ непр. $\alpha \in \mathcal{A}$.

(1) $(\forall \alpha \in \mathcal{A}) A_\alpha \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f$ је непр.

(2) $\mathcal{A}$ коначан и $(\forall \alpha \in \mathcal{A}) A_\alpha \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f$ је непр.

доказ: (1) Нека је $V \in \mathcal{T}_Y$.

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (f^{-1}(V) \cap A_\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \underbrace{f_\alpha^{-1}(V)}_{\in \mathcal{F}_{A_\alpha} \subseteq \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f \text{ је непр.}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad F \in \mathcal{F}_Y &\Rightarrow f^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap X = f^{-1}(F) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \right) = \\
 &= \bigcup_{\alpha \in A} \left(f^{-1}(F) \cap A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f_\alpha^{-1}(F)}_{\in \mathcal{F}_{A_\alpha} \subseteq \mathcal{F}_X} \in \mathcal{F}_X \quad \square
 \end{aligned}$$

Хомеоморфизми

деф. Кажемо да је $h: X \rightarrow Y$ хомеоморфизам ако је h биекција и h и h^{-1} су нпр.

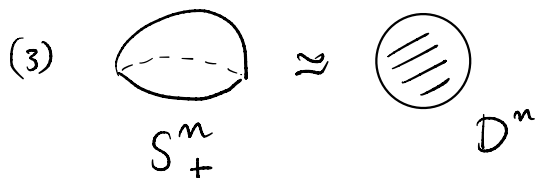
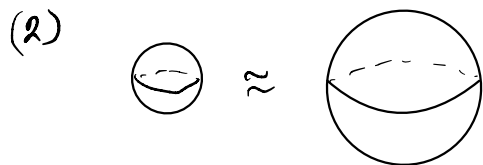
Ако постоји хомео. између X и Y пишемо $X \approx Y$.

Лема $\approx$ је рел. еквиваленција.

гочес вета. $\square$

деф. Својства која се чувају при хомеоморфизму називају се тополошким инваријантима.

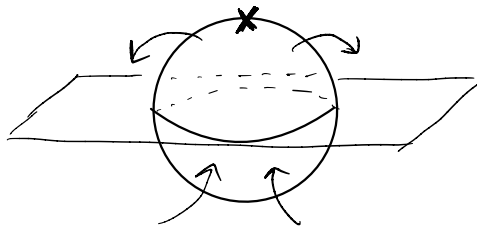
Пример (1) $[a, b] \approx [0, 1]$



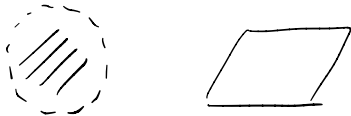
$$(4) \quad X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Gamma_f \approx X$$

$$(5) \quad S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$$



$$(6) \quad \text{int } D^n \approx \mathbb{R}^n$$



$$(7) \quad \mathbb{R}^2 \setminus * \approx C = S^1 \times \mathbb{R}$$

$$(8) \quad \text{(shaded circle with } *) \approx \text{(shaded wedge)}$$

$$\text{(shaded circle with } x) \approx \text{(cylinder)} = S^1 \times [0, 1)$$

глас Нека је $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$.

(1) f је отворено ако $(\forall U \in \mathcal{T}_X) f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

(2) f је затворено ако $(\forall F \in \mathcal{F}_X) f(F) \in \mathcal{F}_Y$.

Лема Нека је $f: X \rightarrow Y$. Следиће импликације су еквивалентне.

(1) f је хомео.

(2) f је хомео., биекција и отворено.

(3) f је хомео., биекција и затворено.

(4) f је биекција и $(\forall A \subseteq X) f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

доказ: (1) $\Rightarrow$ (2): хомео, бј. $\forall$ Нека $U \in \mathcal{T}_X$.

$$f(U) = \underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{\text{хомео. јер хомео}}(U) \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow \text{отворено.}$$

(2) $\Rightarrow$ (3): $\text{Herp. surj. } \forall F \in \mathcal{F}_X$

$$f(F) = \left(\underbrace{f(F^c)}_{\substack{\text{surj.} \\ \in \mathcal{F}_Y}} \right)^c \in \mathcal{F}_Y \Rightarrow f \text{ je surjectif.}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): $\text{surj. } \forall$

$$f \text{ Herp.} \Rightarrow (\forall A \subseteq X) \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

opposite: $f(A) \subseteq \underbrace{f(\bar{A})}_{\substack{\text{surj.} \\ \in \mathcal{F}_Y}} \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$

(4) $\Rightarrow$ (1): $\text{surj. } \forall$

$$(\forall A \subseteq X) \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f \text{ je Herp.}$$

f^{-1} Herp: $\text{Herp je } F \in \mathcal{F}_X$

$$\left(f^{-1} \right)^{-1} (F) \underset{\substack{\text{surj.}}}{=} f(F) = f(\bar{F}) \stackrel{(4)}{=} \overline{f(F)} \in \mathcal{F}_Y. \quad \square$$