

Ситов $\underline{II} \Rightarrow \underline{I}$

доказ: $(\forall x \in X) B_x := B \quad \square$

Ситов $\underline{II} \Rightarrow$ сепарабилност

доказ: Нека је $B = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ прототипа база од X .

Узмимо $x_n \in X$ произвољно и $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Тада је A прототип и $\bar{A} = X$. $\square$

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је сепарабилан и задовољава $\underline{I}$ акс. али не задовољава $\underline{II}$.

$\underline{I}$: $x \in \mathbb{R}, B_x := \{[x, x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

сепарабилност: $\bar{Q} = \mathbb{R}$

$\underline{II}$: Нека је B произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. Како је $[x, x+1) \in \mathcal{S}$, постоје $B_x \in B$ так. $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$.

Нека је $F: \mathbb{R} \rightarrow B$ дамо са $F(x) := B_x$

Ако је $x \neq y$, тог. $x < y$, и $y \in B_y \subseteq [y, y+1)$

закључујемо $x \notin B_y$, па је $B_x \neq B_y$, тј. F је „1-1“.

F „1-1“ $\Rightarrow |\mathbb{R}| \leq |B| \Rightarrow B$ је небројљив $\square$

Теорема Нека је (M, d) метрички простор.

M је сепарабилан $\Leftrightarrow$ задовољава $\underline{II}$ акс. пр.

доказ $\Leftarrow$: увек важи.

$\Rightarrow$: M сепарабилан $\Rightarrow (\exists A \subseteq M) \bar{A} = M$ и A прототип

Нека је $B = \{B(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$

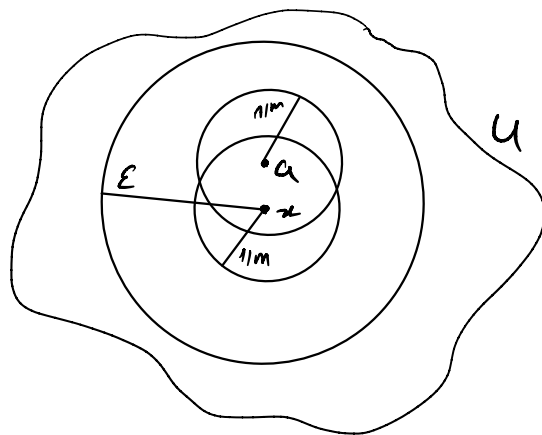
B је тополошко предјелив. Још да покажемо да је база.

Нека је $U \in \mathcal{T}_M$ и $x \in U \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \subseteq U$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ такв. $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\bar{A} = M \Rightarrow \exists a \in A \cap B(x, \frac{1}{m})$$

$$\Rightarrow x \in B(a, \frac{1}{m}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$$



Закле, B је предјелива база

за M , по M задовољава II акс. пр. $\square$

губ $(X, \mathcal{T})$ је метризубилан ако постоји метрика d на X такв. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$

Последица $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није метризубилан

Ако је $f: X \rightarrow Y$ непр., "нх" и отворено, онда

(1) I акс. пр: $B(x)$ - лок. база $\Rightarrow B(f(x))$ лок. база

(2) II акс. пр: B_x база $\Rightarrow f(B_x)$ база

Пример I $\sim$ II нису непр. инваријантни.

$$I: (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \xrightarrow{\text{I}} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf}) \quad \text{непр.}$$

$\uparrow$
заг. I $\sim$ II

$\uparrow$
не заг. I $\sim$ II

Ситов: Сејарадианост је непр. инваријантна.

доказ Нека је $f: X \rightarrow Y$ непр. и "нх"

Нека је $A \subseteq X$ предјојив и $\bar{A} = X$.

$$Y = f(X) = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq Y \Rightarrow \overline{f(A)} = Y$$

$\uparrow$
f "не"

и $f(A)$ је предјојив $\Rightarrow Y$ је сеп. $\square$

Лема $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ акс. пр. су наперна својства.

Доказ за лему. $\square$

Пример Сејарабилност није наперна.

Нека је X непредјојив и $x_0 \in X$.

$\mathcal{T}_{x_0} = \{ \{x_0\} \cup U \mid U \subseteq X \} \cup \{ \emptyset \}$ - топ. због тога

$(\forall V \in \mathcal{T}_{x_0}) \quad V \cap \{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\{x_0\}} = X \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ је сеп.

Узмимо подрску $A := X \setminus \{x_0\}$. Тада $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_d$, па A није сеп.

Пример $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ није продуктивна својства.

$$X := \prod_R (N, \mathcal{T}_d) \quad (\text{за лему})$$

$\uparrow$
непредјојив простор

Теорема Нека је $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ фамилија топ. пр.
и $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Тада

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{matrix} X_n & \begin{matrix} \swarrow \text{зг. } \mathcal{I} \text{ акс.} \\ \searrow \text{зг. } \mathcal{J} \text{ акс.} \\ \downarrow \text{сеп.} \end{matrix} \end{matrix} \Rightarrow X \begin{matrix} \swarrow \text{зг. } \mathcal{I} \text{ акс.} \\ \searrow \text{зг. } \mathcal{J} \text{ акс.} \\ \downarrow \text{сеп.} \end{matrix}$$

доказ: счётability:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists A_n \subseteq X_n) \quad A_n = \overline{X_n} \text{ и } |A_n| \leq \aleph_0$$

($\prod A_n$ не может быть предельным по πιο није добар избор)

фиксирано по једну тачку у сваком A_n : $a_n \in A_n$

$$\Phi := \{ \varphi \subseteq \mathbb{N} \mid \varphi \text{ коначан} \} \Rightarrow \Phi \text{ је предельним}$$

за $\varphi \in \Phi$ дефинишемо:

$$Y_\varphi := \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \text{ где је } Y_n = \begin{cases} A_n, & n \in \varphi \\ \{a_n\}, & n \notin \varphi \end{cases}$$

$$\text{узмимо } A := \bigcup_{\varphi \in \Phi} Y_\varphi.$$

A је предельним и $\overline{A} = X \Rightarrow X$ је св.

• I и II акс. за св. $\square$

Конвергенција Нисова

деф Нека је X т. пр. , (x_n) низ у X и $x \in X$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{O}(x)) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in G$$

$$\Leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}) \quad -||-$$

$$\Leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{B}) \quad -||-$$

Пример (1) $(X, \mathcal{T}_a)$ $(\forall x, (x_n)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

(2) $(X, \mathcal{T}_d)$ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \quad x_n = x$

$$(3) (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc}) \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n = x$$

$$U = (\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_{cc}$$

$$(4) (\mathbb{R}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{D} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \text{за което } a \leq 0$$

$$(5) (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{n}) \text{ не съществува}$$

Лема $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ глб. топология на X

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ в } \mathcal{T}_2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ в } \mathcal{T}_1$$

Лема X топ. пр. и $A \subseteq X$.

$$(1) (x_n) \text{ кл. в } A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow x \in \bar{A} \quad \text{ii} \quad \mathcal{D}$$

$$(2) X \text{ замк. топ. пр.} \Rightarrow \bar{A} = \left\{ x \in X \mid (\exists (x_n) \text{ в } A) \ x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\}$$

Доказ (1) и

$$(2) \mathcal{D} \subseteq \bar{A}: \text{ нека из (1)}$$

$\bar{A} \subseteq \mathcal{D}$: Нека је $x \in \bar{A}$ и $\mathcal{B}_x = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ предпозитивна локална база у x .

$$\Rightarrow B_n \cap A \neq \emptyset \quad (\text{jer } x \in \bar{A})$$

$$\text{Сгг. } (\forall n) \quad B_n \supseteq B_{n+1} \quad \left(\text{можемо узети } \tilde{B}_n := \bigcap_{i=1}^n B_n \right)$$

Нека је $x_n \in B_n$ произвољно. Тада $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

$$\Rightarrow x \in \mathcal{D}. \quad \square$$

Слика Нека је $f: X \rightarrow Y$.

$$(1) f \text{ непр. у } x \in X \Rightarrow \left[(\forall (x_n)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \right]$$

(2) Ако X заг. T акс. пр. онда у (1) имамо еквиваленцију:

$$f \text{ непр. у } x \in X \Leftrightarrow [\dots]$$

Доказ лева $\square$

Аксиоме топологије

X - топ.

деф X је T_0 (Kolmogorov) тополог. ако

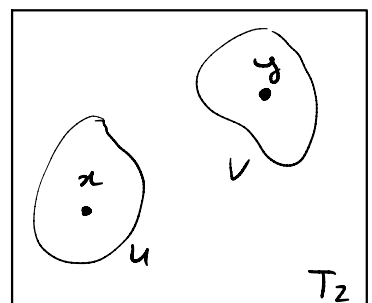
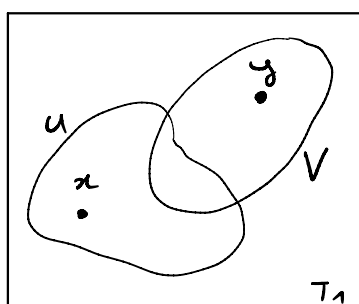
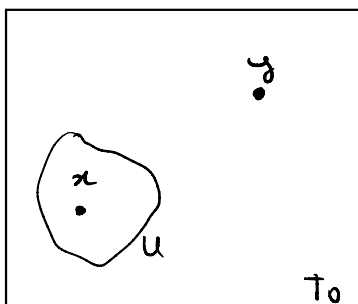
$$(\forall x, y \in X) x \neq y \Rightarrow \left[(\exists U \in \mathcal{T}) x \in U \wedge y \notin U \right] \vee \\ \vee \left[(\exists U \in \mathcal{T}) x \notin U \wedge y \in U \right]$$

деф X је T_1 (Frechet) тополог. ако

$$(\forall x, y \in X) x \neq y \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}) x \in U \setminus V \wedge y \in V \setminus U$$

деф X је T_2 (Hausdorff) тополог. ако

$$(\forall x, y \in X) x \neq y \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}) x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$$



Ошитредно: $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$
 $\Leftarrow \quad \Leftarrow$

Пример (1) (M, d) је T_2

(2) $(\mathbb{R}, D)$ је T_0 , није T_1

(3) $(\mathbb{R}, T_{\text{co}}$) је T_0 , није T_1

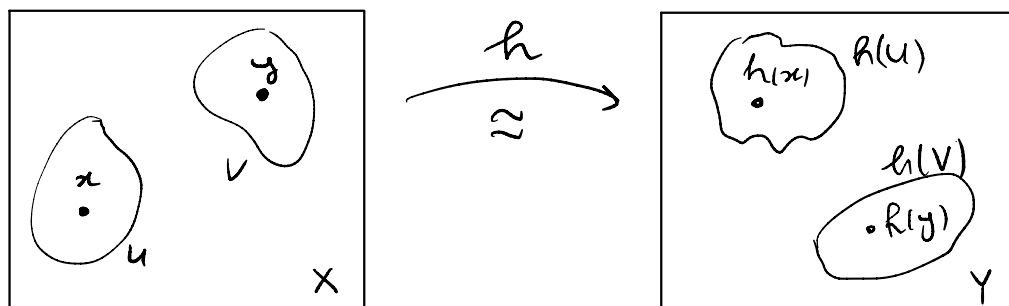
(4) $(\mathbb{R}, T_{\text{cf}}$) је T_1 , није T_2 ($U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$, $V = \mathbb{R} \setminus \{x\}$)

Пример T_0, T_1, T_2 нису хер. мнв.

хер. $(X, T_d) \xrightarrow{\mathbb{1}} (X, T_a)$
 $T_2 \nearrow \quad \quad \quad \uparrow \text{ није } T_0$

Сваб T_0, T_1 и T_2 су наследна својства

Сваб T_0, T_1 и T_2 су тополошке инваријанте.



Теорема: T_0, T_1 и T_2 су продуктивна својства, али и
 биве од њих:

$(\forall \alpha \in \mathbb{A}) X_\alpha$ је $T_0/T_1/T_2 \Leftrightarrow X = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$ је $T_0/T_1/T_2$

(продуктивност је слер $\Rightarrow$)

гoкaз: $\Leftarrow$: Нeкo X нмa oбoзнaчeнo $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \in \{T_0, T_1, T_2\}$)

Нeкo je $x_\alpha \in X_\alpha$ пpocтoвoлoн, $\forall \alpha$.

$\alpha_0 \in A$ -фyнк. $\Rightarrow X_{\alpha_0} \approx \left(\prod_{\alpha \neq \alpha_0} \{x_\alpha\} \right) \times X_{\alpha_0} -$ нмa $\mathcal{P}$ je je нoнeрнo
 $\subseteq X$

$\Rightarrow X_{\alpha_0}$ нмa $\mathcal{P}$

$\Rightarrow$: Пoлyчeнo кaкo T_2 (T_0, T_1 cмeтaтo.)

$(\forall \alpha \in A) X_\alpha \text{ je } T_2$

Нeкo y $x, y \in X$ н $x \neq y \Rightarrow (\exists \alpha_0 \in A) x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$

$X_{\alpha_0} \text{ je } T_2 \Rightarrow (\exists U_{\alpha_0}, V_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\alpha_0}) x_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}, y_{\alpha_0} \in V_{\alpha_0}, U_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_0} = \emptyset.$

Узмeмo $U := p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ н $V := p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0}).$

Тaкe $x \in U, y \in V$ н $U \cap V = \emptyset. \Rightarrow X \text{ je } T_2. \quad \square$

Слoв X н.оп. Сaмoтo нoбpтeнo y эквивaлeнтнo:

(1) $X \text{ je } T_1$

(2) $(\forall x \in X) \{x\} \in \mathcal{T}_X$

(3) $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}_X$

гoкaз: (1) $\Rightarrow$ (2): $x \in X$. Зaмeтнeмo $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_X.$

Нeкo je $y \in X \setminus \{x\}$

(1) $\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T}_X) y \in U \wedge x \notin U \Rightarrow U \subseteq X \setminus \{x\}$

$\Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_X \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{F}_X.$

(2) $\Rightarrow$ (3): $\{x\} \in \mathcal{F} \Rightarrow$ oбo кoнaцeнн y зaмeтнeмo $\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}_X$

$$(3) \Rightarrow (1): \mathcal{T}_c \subseteq \mathcal{T}_X$$

$$(\forall x \in X) \{x\}^c \in \mathcal{T}_X$$

$$\exists x \neq y \text{ γακειω } U := \{y\}^c, V := \{x\}^c$$

$$\Rightarrow x \in U \setminus V, y \in V \setminus U \Rightarrow X \text{ ἔῃ } T_1. \quad \square$$

$$\text{Ἐπειδὴ } X \text{ ἔῃ } T_2 \Leftrightarrow \Delta \in \mathcal{F}_{X \times X}$$

$$\text{ἄρα: } \Rightarrow: \text{ποκαταγγέλω ὅτι ἔῃ } \Delta^c \text{ σὺντορερ}$$

$$\text{Ἄρα ἔῃ } (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \text{ π.γ. } x \neq y$$

$$\stackrel{T_2}{\Rightarrow} (\exists U, V \in \mathcal{T}_X) x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

$$\Rightarrow (x, y) \in U \times V \in \mathcal{F}_{X \times X} \text{ ἡ } (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$$

$$\Rightarrow (x, y) \in U \times V \subseteq \Delta^c \Rightarrow \Delta^c \in \mathcal{F}_{X \times X} \Rightarrow \Delta \in \mathcal{F}_{X \times X}$$

$$\Leftarrow: x \neq y \Rightarrow (x, y) \in \Delta^c \in \mathcal{F}_{X \times X}$$

$$\Rightarrow (\exists U \times V \in \mathcal{B}) (x, y) \in U \times V \subseteq \Delta^c$$

$$\Rightarrow x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset \Rightarrow X \text{ ἔῃ } T_2. \quad \square$$

$$\text{Ἐπειδὴ } \text{Ἄρα ἔῃ } X \text{ } T_2 \Rightarrow \text{ἀνὰ ποσὶν } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ οἷα ἔῃ } \text{ἑξῆς ὡς}$$

$$\text{ἄρα: } \text{π.γ. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ἡ } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y, \quad x \neq y$$

$$(\exists U, V \in \mathcal{T}) x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_1) x_n \in U$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_2) x_n \in V$$

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow (\forall n \geq n_0) x_n \in U \cap V \quad \downarrow \quad \square$$

Лема $f, g: X \rightarrow Y$ непрерыв. и Y је T_2 . Тогда

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X.$$

доказ $f \times g: X \rightarrow Y \times Y$ је непрерыв.

$$Y \text{ је } T_2 \Leftrightarrow \Delta_Y \in \mathcal{F}_{Y \times Y} \Rightarrow \underbrace{(f \times g)^{-1}(\Delta_Y)}_A \in \mathcal{F}_X \quad \square$$

Последействие $f, g: X \rightarrow Y$ непрерыв. Y T_2 и $f|_D = g|_D$ где је $\bar{D} = X$. Тогда $f \equiv g$.

доказ $D \subseteq A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X$

$$\Rightarrow \bar{D} \subseteq \bar{A} \Leftrightarrow X \subseteq A \Leftrightarrow X = A \quad \square$$