

f неор: Неко је $x \in X$ произвољно.

• Неко је $f(x) \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ мр. $f(x) - \varepsilon > 0$ и $f(x) + \varepsilon < 1$.

Неко су $r_1, r_2 \in [0, 1]$ (ошмика $\frac{\varepsilon}{2}$) мр.

$$f(x) - \varepsilon < r_1 < f(x) < r_2 < f(x) + \varepsilon$$

$\Rightarrow V = U_{r_2} \setminus \overline{U_{r_1}}$ је отворена околина оу x мр.

$$(\forall v \in V) \quad r_1 \leq f(v) \leq r_2$$

$\Rightarrow f$ је неор. у x .

Слично се доказује неор. и у x мр. $f(x) \in \{0, 1\}$. $\square$

Тимурова теорема о екстензији

Ако је $A \subseteq X$, $f: A \rightarrow Y$ неор. да ли постоји непрекинуто проширење $F: X \rightarrow Y$ мр. $F|_A = f$?

Лема Неко је X нормалан и Хаусдорфов, $C \in \mathcal{F}_X \setminus \emptyset$, $M > 0$ и $f: C \rightarrow [-M, M]$ неор. Тада постоји $g: X \rightarrow [-\frac{M}{3}, \frac{M}{3}]$ неор. мр.

$$(\forall x \in C) \quad |f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3} M.$$

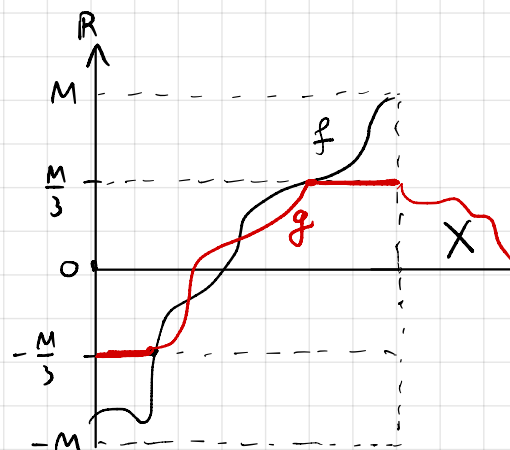
доказ: Узмимо скупове

$$A = f^{-1}([-M, -\frac{M}{3}]) \in \mathcal{F}_X$$

$$B = f^{-1}([\frac{M}{3}, M]) \in \mathcal{F}_X$$

1° $A, B \neq \emptyset$: Ошмигемо $A \cap B = \emptyset$

$\xRightarrow{\text{зрмиса}} \exists g: X \rightarrow [-\frac{M}{3}, \frac{M}{3}]$ неор. мр. $f(A) = \{-\frac{M}{3}\}$, $f(B) = \{\frac{M}{3}\}$



$$x \in A \Rightarrow f(x) - g(x) = f(x) + \frac{M}{3} \in [-\frac{2}{3}M, 0] \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$$

$$x \in B \Rightarrow f(x) - g(x) = f(x) - \frac{M}{3} \in [0, \frac{2}{3}M] \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$$

$$x \in C \setminus (A \cup B) \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \frac{2}{3}M$$

$$2^\circ \underline{A = \emptyset, B \neq \emptyset} : g(x) = \frac{M}{3}$$

$$3^\circ \underline{A \neq \emptyset, B = \emptyset} : g(x) = -\frac{M}{3}$$

$$4^\circ \underline{A, B = \emptyset}, g(x) = 0 \text{ (може било нула)} \quad \square$$

Теорема [Пингрова п. о еквиваленцију] Хаусдорфов простор X је нормалан ако

$$(\forall C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}) (\forall f: C \rightarrow [-1, 1] \text{ непр.}) (\exists F: X \rightarrow [-1, 1] \text{ непр.}) F|_C = f.$$

доказ $\Leftarrow$: Нека су $A, B \in \mathcal{F}_X$, $A \cap B = \emptyset$ и нека је $f: A \cup B \rightarrow [-1, 1]$
 $f(A) = \{-1\}$, $f(B) = \{1\}$

$$f \text{ је непр. по лемми о неопењу} \Rightarrow \exists F: X \rightarrow [-1, 1] \text{ непр.}$$

$$F|_{A \cup B} = f, \text{ тј. } F(A) = \{-1\}, F(B) = \{1\}$$

$$\xrightarrow{\text{примена}} X \text{ је нормалан.}$$

$$\Rightarrow: \text{ Нека је } X \text{ нормалан, } C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}, f: C \rightarrow [-1, 1] \text{ непр.}$$

$$\xrightarrow{\text{лемма}} \exists g_1: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \text{ непр. тј. } (\forall x \in C) |f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f - g_1: C \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \text{ непр.}$$

$$\xrightarrow{\text{лемма}} \exists g_2: X \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}] \text{ непр. тј. } (\forall x \in C) |(f - g_1)(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow f - g_1 - g_2 : C \rightarrow \left[-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right] \text{ неур.}$$

⋮

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \exists g_n : X \rightarrow \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right] \text{ неур.}$$

$$\text{тј.} \quad \left| \left(f - \sum_{i=1}^n g_i \right)(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \text{за } x \in C.$$

$$\text{Дефиницијом} \quad F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x).$$

$$\text{Јако је} \quad |g_i(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \stackrel{*)}{=} 1 < \infty,$$

тј. $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ равномерно конвертира на основу Вајерштрасовог критеријума.

$\Rightarrow F$ је добро деф. и неур.

$$|F(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |g_i(x)| \stackrel{*)}{\leq} 1 \Rightarrow F : X \rightarrow [-1, 1]$$

Коначно, за $x \in C$:

$$|F(x) - f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) - f(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n g_i(x) - f(x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$$

$$\Rightarrow F|_C = f. \quad \square$$

Напомена: у претходној теорему умесно $[-1, 1]$ можемо је поново да будемо било који интервал (отворен или затворен). Значи, ако је X нормалан, $C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$, $f : C \rightarrow (-1, 1) \hookrightarrow [-1, 1] \xRightarrow{\text{тј.}} \exists F : X \rightarrow [-1, 1] \text{ неур.}, F|_C = f$

1° $F^{-1}(\{-1, 1\}) = \emptyset \Rightarrow$ састојило се из нула $F: X \rightarrow (-1, 1)$ и

2° $\underbrace{F^{-1}(\{-1, 1\})}_{\substack{\parallel \\ \ddot{A}}} \neq \emptyset \Rightarrow A, C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}, A \cap C = \emptyset$

узимај $\Rightarrow (\exists \varphi: X \xrightarrow{\text{непр.}} [0, 1]) \quad \varphi(A) = \{0\}, \varphi(C) = \{1\}.$

Нека је $\tilde{F}(x) := F(x) \cdot \varphi(x)$. Тада $\tilde{F}: X \xrightarrow{\text{непр.}} (-1, 1)$ и $\tilde{F}|_C = f$.

(узимај $(-1, 1)$ пошто смо узели само који интервал (a, b))

Компактност

деф. Топ. пр. X је компакт ако сваки отворен покривач од X има коначан потпокривач.

нп. $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{A}) \quad X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

(сви U_α су отворени)

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ није компакт: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није компакт

(3) X коначан $\Rightarrow X$ је компакт

(4) $(X, \mathcal{T}_{cf})$ је компакт

(5) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ није компакт

деф. Фамилија скупова $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ је центрирана ако
($\forall I \subseteq \mathcal{A}$) I коначан $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$

(свака коначна подфамилија има непразан пресек)

Лема X је компактна ако свака центрирана фамилија затворених скупова има непразан пресек.

доказ: Нека је X компактна, $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ центрирана фамилија, $F_\alpha \in \mathcal{T}_X$, $\alpha \in A$.

$$\text{тј.с. } \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset \stackrel{c}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c = X \xrightarrow{X \text{ компактна}} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n) X = \bigcup_{i=1}^n F_{\alpha_i}^c \quad /^c$$

$\uparrow$
отворени

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}^c = \emptyset \quad \downarrow \quad (\text{јер је фамилија центрирана})$$

$\Leftarrow$: слично (за отворе). $\square$

деф Нека је X т.п.р. и $A \subseteq X$. A је компактна у X ако сваки отворени покривач од A има конечан потпокривач,

$$\text{тј. } A \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A) A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad (\text{где је } U_\alpha \in \mathcal{T}_X, \alpha \in A).$$

Лема A је компактна у X ако је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактна.

доказ за лему. $\square$

Лема Компактност је непрекидна инваријанса.

доказ $f: X \rightarrow Y$ неп. и "на" и X компактна.

Нека је $Y = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathcal{T}_Y$, $\alpha \in A$.

$$\text{Тј.с. } X = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \xrightarrow{X \text{ комп.}} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A) X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$$

$$\Rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i} \Rightarrow Y \text{ је компактна. } \square$$

деф $\mathcal{K}_X$ је фамилија свих компактних скупова у X .

Ситав X компактнат $\Rightarrow F_X \subseteq K_X$.

гoкac: Неко је $A \in F_X$ и $A \subseteq \bigcup_{d \in A} U_d$, $U_d \in \mathcal{T}_X$

$$X = A \cup A^c = \bigcup_{d \in A} U_d \cup \underbrace{A^c}_{\substack{\cap \\ \mathcal{T}_X}} \Rightarrow (\exists d_1, \dots, d_n \in A) X = \bigcup_{i=1}^n U_{d_i} \cup A^c$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{d_i} \Rightarrow A \in K_X. \quad \square$$

Ситав X хаусдорфов $\Rightarrow K_X \subseteq F_X$.

гoкac Неко је $A \in K_X \setminus \{\emptyset\}$. Показујемо $A^c \in \mathcal{T}_X$.

Неко је $x \in A^c$.

$$(\forall a \in A) \quad x \neq a \xrightarrow{X T_2} (\exists U_a, V_a \in \mathcal{T}_X) \quad x \in U_a, a \in V_a, U_a \cap V_a = \emptyset.$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a \xrightarrow{A \text{ комп.}} (\exists a_1, \dots, a_n \in A) \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

$$\text{Неко је } U := \bigcap_{i=1}^n U_{a_i} \in \mathcal{T}_X. \text{ Тада } x \in U \text{ и } U \subseteq A^c.$$

Замети, пошто $\exists y \in U \cap A$

$$y \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i} \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n\}) \quad y \in V_{a_j} \Rightarrow y \in U_{a_j} \cap V_{a_j} = \emptyset$$

$$y \in U \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad y \in U_{a_i}$$

$$\text{Закле, } x \in U \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}_X \Rightarrow A \in F_X. \quad \square$$

Последње X компактнат и $T_2 \Rightarrow K_X = F_X$.

Лема: Ако је X T_2 , онда

$$(\forall K, L \in K_X) \quad K \cap L = \emptyset \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X) \quad K \subseteq U, L \subseteq V, U \cap V = \emptyset.$$

гoкac за лемију. $\square$

Теорема X компактан и $T_2 \Rightarrow X$ је T_4 .

доказ X је T_1 и

нормалност: $A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B \neq \emptyset$

X комп. и $T_2 \Rightarrow \mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X \Rightarrow A, B \in \mathcal{K}_X$

лемма $\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{F}_X) A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ је нормална. $\square$

Лема $f: X \rightarrow Y$ непр., X компактан, Y $T_2 \Rightarrow f$ је затворено.

доказ $F \in \mathcal{F}_X \xrightarrow{X \text{ комп.}} F \in \mathcal{K}_X \Rightarrow f(F) \in \mathcal{K}_Y \xrightarrow{Y T_2} f(F) \in \mathcal{F}_Y. \square$

Теорема: $f: X \rightarrow Y$ непр., X компактан, Y T_2 .

(1) f биекција $\Rightarrow f$ је хомеоморфизам

(2) f инјекција $\Rightarrow f$ је утабање

Лема $X \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан ако је затворен и ограничен.

деф X је секвенцијално компактан ако сваки скуп има или конвергентан подскуп.

Коментар: секв. комп. $\not\Rightarrow$ комп.

Лема (M, d) метрички простор $\Rightarrow X$ је секв. комп. ако је комп.

Пример Компактност није наследно својство:

$$[0, 1] \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}, \quad (0, 1) \notin \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$$

Локална компактност

деф X је локално компактан ако

$$(\forall x \in X) (\forall G \in \mathcal{O}(x)) (\exists H \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{K}_x) \quad H \subseteq G$$

Смав Нека је X хаузердорфов.

$$(1) \quad X \text{ је лок. комп. } \Leftrightarrow (\forall x \in X) (\exists G \in \mathcal{O}(x)) \quad G \in \mathcal{K}_x.$$

$$(2) \quad X \text{ компактан } \Rightarrow X \text{ лок. компактан}$$

доказ (1) $\Rightarrow$: $\forall$

$\Leftarrow$: Нека је $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ произвољно. Нека је још $H \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{K}_x$.

$$\Rightarrow H \cap G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T}_x) \quad x \in V \subseteq H \cap G$$

H је T_2 и компактан $\Rightarrow H$ је нормалан $\Rightarrow H$ је регуларан

$$\Rightarrow (\exists W \in \mathcal{T}_x) \quad x \in W \subseteq \bar{W} \subseteq V$$

$$\bar{W} \in \mathcal{F}_H \Rightarrow \bar{W} \in \mathcal{K}_H \Rightarrow \bar{W} \in \mathcal{K}_x.$$

$$(2) \quad \text{у (1) узмемо } G := X \in \mathcal{K}_x \Rightarrow X \text{ је лок. комп. } \quad \square$$