

Тополошки простор

деф. Нека је $X \neq \emptyset$ скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова т.д.

$$(1) \emptyset, X \in \mathcal{T},$$

$$(2) U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T},$$

$$(3) U_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X , а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе фамилије $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

• Место пишемо и само т. пр. X уместо $(X, \mathcal{T})$

• Индукција из (2): $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}.$

Пример (1) $X \neq \emptyset, \mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ антидискретна топологија

(2) $X \neq \emptyset, \mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топологија

(3) (M, d) метрички простор

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq M \mid U \text{ отворен у } (M, d)\}$$

топ. индукована метриком

(4) $(\mathbb{R}^n, d)$ d -стандардна метрика

уобичајена (стандардна) топологија

(5) $X = \{a, b\}, a \neq b, \mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

Питање: колико има различитих топ. на $\{a, b, c\}$?

(6) $X \neq \emptyset, \mathcal{T}_{cf} = \{U \subseteq X \mid U^c \text{ коначан}\} \cup \{\emptyset\}$

кофинитна топ. (X коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$)

(7) $X \neq \emptyset, \mathcal{T}_{cs} = \{U \subseteq X \mid U^c \text{ предоредив}\} \cup \{\emptyset\}$

копреоредива топ.

геп. Нека су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на $X \neq \emptyset$. Ако је $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ кажемо да је $\mathcal{T}_1$ груба (ужа), а $\mathcal{T}_2$ финија (шира).
($\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ могу бити и неупоредиве.)

геп. Кажемо да је скуп $F \subseteq X$ затворен у $(X, \mathcal{T})$ ако је $F^c \in \mathcal{T}$. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$, тј.
 $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}\}.$

Теорема Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. и $\mathcal{F}$ фамилија затворених скупова. Тада:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,
- (2) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$,
- (3) $F_\alpha \in \mathcal{F}, \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}.$

доказ: Де-Морганови закони + геп. $\mathcal{F}$. $\square$

База и предбаза топологије

геп. Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. простор. Подфамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ је база топологије $\mathcal{T}$ ако

$$(\forall U \in \mathcal{T})(\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}) \quad U = \bigcup \mathcal{B}'$$

еквивалентно: $(\forall U \in \mathcal{T})(\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B}) \quad x \in B \subseteq U.$

Пример (1) $\mathcal{B} = \mathcal{T}$

(2) (M, d) $\mathcal{B}$ = отворене лопте

(3) $(X, \mathcal{T}_d)$ $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Слика Нека је $\mathcal{B}$ база топологије $\mathcal{T}$ на X . Тада

$$(1) X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

$$(2) (\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}) (\forall x \in B_1 \cap B_2) (\exists B_x \in \mathcal{B}) x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2.$$

доказ: (1) $X \in \mathcal{T} \Rightarrow X = \bigcup \mathcal{B}$ по деф. базе.

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_x$ по деф. $\square$

Слика Ако је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија која задовољава (1) и (2), онда је $\mathcal{B}$ база неке топ. на X .

доказ: дефинишимо

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

$$= \left\{ U \subseteq X \mid \underbrace{(\forall x \in U) (\exists B_x \in \mathcal{B}) x \in B_x \subseteq U}_{U = \bigcup_{x \in U} B_x} \right\}$$

$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ је топ. на X :

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$,
- $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
 $x \in U \Rightarrow (\exists B_1 \in \mathcal{B}) x \in B_1 \subseteq U$
 $x \in V \Rightarrow (\exists B_2 \in \mathcal{B}) x \in B_2 \subseteq V$

$$\Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} (\exists B_x \in \mathcal{B}) x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$$

$$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}.$$

$$\bullet \quad U_\alpha \in \mathcal{T}_B, \alpha \in A \stackrel{?}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_B$$

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha \in A) \quad x \in U_\alpha$$

$$\Rightarrow (\exists B_\alpha \in \mathcal{B}) \quad x \in B_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_B. \quad \square$$

деф. $\mathcal{T}_B$ називамо топологијом индукованом базом $\mathcal{B}$.

Особине: (1) $(X, \mathcal{T})$ т.о.р. и $\mathcal{B}$ база за $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}_B$

(2) $(X, \mathcal{T})$ топ. о.р., $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ задовољава (1) и (2)

$$\Rightarrow \mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{T} \quad (\mathcal{T}_B \text{ је најмања топ. са базом } \mathcal{B})$$

деф. За базе $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ на X кажемо да су еквивалентне ако индукују исту топологију.

деф. Нека је $(X, \mathcal{T})$ т.о.р. и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$. фамилија $\mathcal{F}$ је предбаза топологије $\mathcal{T}$ ако је фамилија свих коначних пресека елемената из $\mathcal{F}$ једна база топ. $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n U_i \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{F}, i=1, \dots, n \right\}$$

Лема Нека је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ т.о.р. $\bigcup \mathcal{F} = X$. Тада постоји топологија чија је $\mathcal{F}$ предбаза.

$$\text{доказ:} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n U_i \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{F}, i=1, \dots, n \right\}$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}} := \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}$$

Докажи́мо да је $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ база.

(1) очигледно је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, па је

$$X = \bigcup \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \Rightarrow \bigcup \mathcal{B}_{\mathcal{F}} = X$$

$$(2) B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \Rightarrow B_1 = \bigcap_{i=1}^m U_i, B_2 = \bigcap_{j=1}^m V_j$$

$$B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i=1}^m U_i \cap \bigcap_{j=1}^m V_j \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}. \quad \square$$

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$: $\mathcal{F}_1 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$
 $\mathcal{F}_2 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\} \cup \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{Q}\}$

Основни појмови у топ. пр.

$(X, \mathcal{T})$ - топ. пр.

деф. Скуп G је околина тачке $x \in X$ ако
 $(\exists U \in \mathcal{T}) \quad x \in U \subseteq G$

Околinski мaтeм: $\mathcal{O}(x) := \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T}) \quad x \in U \subseteq G\}$

Ако $G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}$, G је отворена околина.

$$\mathcal{O}(A) := \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T}) \quad A \subseteq U \subseteq G\}$$

својине: (1) $(\forall x \in X) \quad \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$

$$(2) \quad G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in G$$

$$(3) \quad G \in \mathcal{O}(x) \wedge G \subseteq H \Rightarrow H \in \mathcal{O}(x)$$

$$(4) \quad G, H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{O}(x)$$

$$(5) \quad (\forall G \in \mathcal{O}(x)) (\exists H \in \mathcal{O}(x)) (\forall y \in H) \quad G \in \mathcal{O}(y)$$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in A$ унутрашња тачка од A ако је $A \in \mathcal{O}(x)$. Унутрашњост (интерјор) скупа A је скуп свих унутрашњих тачака:

$$\text{int } A = \{x \in A \mid A \in \mathcal{O}(x)\}$$

(користи се и ознака $\overset{\circ}{A}$)

онобајте: (1) $\text{int } A \subseteq A$

$$(2) \text{ int } A \subseteq \mathcal{T}$$

$$(3) \text{ int } A = A \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$$

$$(4) B \subseteq A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow B \subseteq \text{int } A$$

$$(5) \text{ int } (A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$$

$$(6) \text{ int } (A \cup B) \supseteq \text{int } A \cup \text{int } B \quad \leftarrow \text{нпр. } A=[0,1], B=[1,2]$$

$$(7) \text{ int } A = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$$

Пример $\text{int } [0, +\infty) = \emptyset$ у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cf}})$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ адхерентна тачка скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x)) \quad G \cap A \neq \emptyset$. Затворење (адхеренција) скупа A је скуп свих адх. тачака:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x)) \quad G \cap A \neq \emptyset\}$$

(користи се и ознака $\text{cl } A$)

онобајте: (1) $A \subseteq \bar{A} \in \mathcal{F}$

$$(2) A = \bar{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$$

$$(3) A \subseteq F \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$$

$$(4) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(5) \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(6) \bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \in \mathcal{F}}} F$$

$$(7) x \in \bar{A} \text{ ако } (\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}) \quad G \cap A \neq \emptyset.$$

$$(8) (\text{int } A)^c = \overline{A^c}$$

нпр.
 $A=(0,1),$

$B=(1,2)$