

Индукцијом: $X_1, \dots, X_n$ тоб. $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ тоб.

Покажемо сада произволну фамилију $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ тобених простора.

$$(\forall \alpha \in A) X_\alpha \text{ тоб.} \not\Rightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{box}} \right) \text{ тоб.}$$

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ - тоб.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \{ a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \} = \text{реални низови}$$

Нека је $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп ограничених и $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп неотрицајних низова.

$$A \cap B = \emptyset, \quad A, B \neq \emptyset, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = A \sqcup B.$$

Да ли су A и B отворени?

За $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имамо

$$\mathcal{U}_x := \prod_{n \in \mathbb{N}} (x_n - 1, x_n + 1) \in \mathcal{T}_{\text{box}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \Rightarrow \mathcal{U}_x \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{T}_{\text{box}} \\ x \in B \Rightarrow \mathcal{U}_x \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{\text{box}} \end{array} \right\} \Rightarrow (A, B) \text{ је дисјункција од } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Теорема $(\forall \alpha \in A) X_\alpha \text{ тоб.} \Rightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T} \right) \text{ тоб.}$

($\mathcal{T}$ = топ. Тихонова)

Доказ: Ако је A коначан $\checkmark$

Нека је A бесконачан и Φ фамилија свих коначних

подекупова др A .

Фиксирајмо $a = (a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (тј. одберемо по једну тачку из сваког X_α)

За $\varphi \in \mathcal{F}$ нека је

$$Y_\varphi := \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha, \text{ где } Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha, & \alpha \in \varphi \\ \{a_\alpha\}, & \alpha \notin \varphi \end{cases}$$

$\swarrow$ коначно много

$$Y_\varphi \approx \prod_{\alpha \in \varphi} X_\alpha \Rightarrow Y_\varphi \text{ је повезан}$$

$\swarrow$ коначан

Нека је $Y = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}} Y_\varphi \xrightarrow[\alpha \in \bigcap Y_\varphi]{\pi, \otimes} Y$ је повезан.

Потпуно : $\overline{Y} = X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (за A кох. је $Y = X$)

Нека је $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$, $U_\alpha = X_\alpha$ за $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} =: \psi$

тј. $\psi \in \mathcal{F}$. Хоћемо да покажемо да је $B \cap Y \neq \emptyset$.

Нека је $y_\alpha = \begin{cases} y_\alpha \in U_\alpha \text{ произвољно}, & \alpha \in \psi \\ a_\alpha, & \alpha \notin \psi \end{cases}$

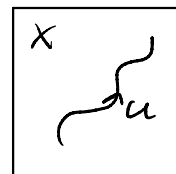
Пада $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y_\psi \cap B \Rightarrow Y \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow (\forall B \in \mathcal{B}) Y \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \overline{Y} = X \Rightarrow X$ је пов.

(јер је затворење повезаних повезано.)



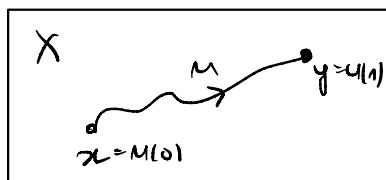
Путьно повезаност



деф. Путь γ у X је непр. прееп. $\mu: [0,1] \rightarrow X$.

деф. X је путьно повезан ако

$$(\forall x, y \in X) (\exists \mu: [0,1] \rightarrow X \text{ непр.}) \mu(0)=x, \mu(1)=y$$

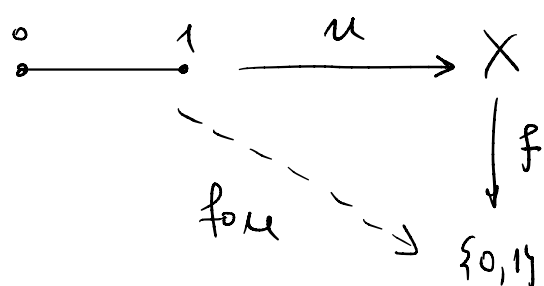


Лема Ако је X путьно пов., онда је μ повезан.

доказ. нека је $f: X \rightarrow \{0,1\}$ непр. прееп.

$$(\exists x, y \in X) f(x)=0, f(y)=1$$

Нека је $\mu: [0,1] \rightarrow X$ путь од x до y , прееп. $\mu(0)=x, \mu(1)=y$.



$f \circ \mu$ је непр. и „не“
 $[0,1]$ је пов. $\Rightarrow \{0,1\}$ је
 повезан $\Downarrow$ $\square$

Лема: Путьна пов. је непр. инваријантна.

доказ: $f: X \rightarrow Y$ непр. и „не“ и X путьно пов.

Нека су $y_1, y_2 \in Y$ и $x_1, x_2 \in X$ прееп. $f(x_i)=y_i$.

X путьно пов. $\Rightarrow \exists \mu: [0,1] \rightarrow X$ путь од x_1 до x_2

$\Rightarrow f \circ \mu: [0,1] \rightarrow Y$ је путь од y_1 до $y_2 \Rightarrow Y$ је путьно пов. $\square$

Снаб Путова пов. је пројективним својство.

доказ: Нека је $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и X_α путова пов. за свако $\alpha \in A$.

Нека су $(x_\alpha)_{\alpha \in A}, (y_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$.

За свако $\alpha \in A$, X_α је путова пов. па постоји некр.

$u_\alpha: [0,1] \rightarrow X_\alpha$ нпр. $u_\alpha(0) = x_\alpha, u_\alpha(1) = y_\alpha$.

Дефиницијом $u: [0,1] \rightarrow X$ са

$$(u(t))_\alpha := u_\alpha(t), \quad \alpha \in A$$

Снаб од раније: u некр. $\Leftrightarrow (\forall \alpha) p_\alpha \circ u = u_\alpha$ некр. $\checkmark$

$\Rightarrow u$ је пут од (x_α) до (y_α) , па је X путова пов. $\square$

Пример Ако је A путова повезан, $\bar{A}$ не мора бити путова пов.

Нпр. $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, +\infty)\}$ је путова пов.

$\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ није путова пов.

Теорема X је путова повезан ако је повезан и

$$(\forall x \in X) (\exists G \in \mathcal{O}(x)) \quad G \text{ је путова пов.} \quad (\star)$$

доказ: $\Rightarrow$: $G := X$ $\checkmark$

$\Leftarrow$: Нека је $x_0 \in X$ произвољна и A скуп свих тачака из X које се могу сјединити путем са x_0 , тј.

$$A = \{x \in X \mid (\exists u: [0,1] \rightarrow X) \text{ и некр.}, u(0) = x_0, u(1) = x\}$$

Хоћемо да покажемо да је $A = X$.

Очигледно $A \neq \emptyset$ јер $x_0 \in A$.

A је отворен: Неко је $x \in A$ произвољно.

Тада постоји пут μ од x_0 до x , тј.
 $\mu: [0,1] \rightarrow X$ нпр. и $\mu(0) = x_0, \mu(1) = x$.

$\mathcal{U}_x \textcircled{*}$: $(\exists G_x \in \mathcal{O}(x)) G_x$ путно пов.

Неко је $y \in G_x$ произвољно и

$v: [0,1] \rightarrow G_x$ пут од x до y , тј. $v(0) = x, v(1) = y$.

Надовештавањем путева μ и v добијемо пут $\mu \cdot v$ од x_0 до y :

$$\mu \cdot v(t) := \begin{cases} \mu(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

($\mu \cdot v$ је нпр. на основу пр. о лемми)

$\Rightarrow y \in A \Rightarrow G_x \subseteq A \Rightarrow A$ је отворен.

A је затворен: Неко је $x \in \bar{A}$ произвољно

$\mathcal{U}_x \textcircled{*}$: $(\exists G_x \in \mathcal{O}(x)) G_x$ путно пов.

$$x \in \bar{A} \Rightarrow G_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in G_x \cap A$$

$$y \in A \Rightarrow \exists \text{ пут } \mu \text{ од } x_0 \text{ до } y$$

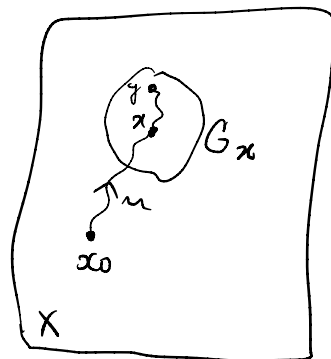
$$y \in G_x \Rightarrow \exists \text{ пут } v \text{ од } y \text{ до } x$$

$$\Rightarrow \mu \cdot v \text{ је пут од } x_0 \text{ до } x \Rightarrow x \in A$$

$$\Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A \text{ је затворен.}$$

Закључак: $A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}, A \neq \emptyset, X$ повезан

$$\Rightarrow A = X. \quad \blacksquare$$

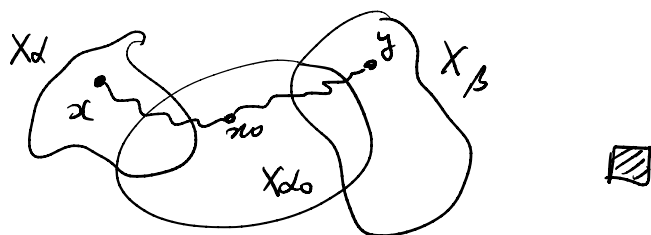


Лема ($\otimes$) Нека су $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ путно пов. мн.

$$(\exists \alpha_0 \in A) (\forall \alpha \in A) X_\alpha \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset.$$

Тогда је $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ путно пов.

" доказ "



Компоненте путне повезаности

На X дефинишемо релацију $\sim$ са

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists u: [0,1] \rightarrow X) \text{ монотон, } u(0)=x, u(1)=y$$

Лема $\sim$ је рел. еквиваленција.

деф. Класе екв. $\sim$ називамо компонентама путне повезаности. Означава: $P_x = [x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

Забелешка: (1) $(\forall x \in X) P_x \subseteq C_x$

(2) P_x је највећи путно пов. подрециј од X који садржи x .

(3) P_x не мора бити ни отворен ни затворен

$$\text{нпр. } A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, +\infty)\}, \bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

$$P_0 = \{0\} \times [-1, 1] \notin \mathcal{T}_A, P_1 = A \notin \mathcal{T}_{\bar{A}}$$

(4) Број компоненти путне пов. је топ. инв.

Локална путна повезаност

диф X је локално путно повезан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x)) \quad H \subseteq G \text{ и } H \text{ путно пов.}$$

Имамо следећу теорему:

X путно пов. $\Leftrightarrow X$ пов. и $(\forall x \in X)(\exists G \in \mathcal{O}(x)) \quad G \text{ п. пов.}$

Последња X повезан и лок. путно пов. $\Rightarrow X$ је путно пов.

Лема Нека је $(X, \mathcal{T})$ лок. путно пов. и $A \in \mathcal{T}$, онда је A лок. п. пов.

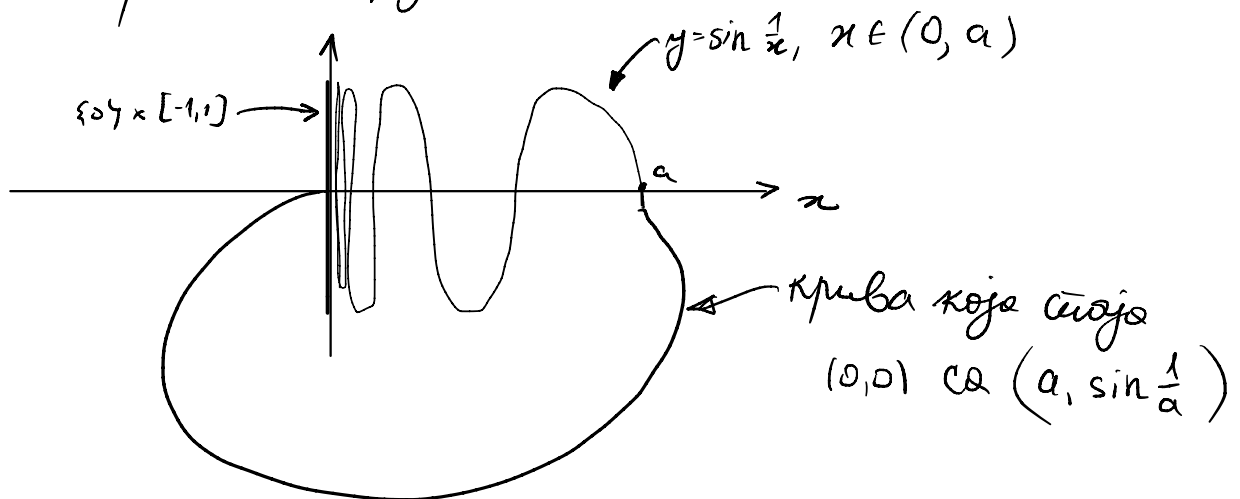
Последња у $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ за свако $A \in \mathcal{U}$ важи:

A је повезан $\Leftrightarrow A$ је путно повезан.

доказ: $\Leftarrow$: уник. важи

$\Rightarrow$: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ је лок. путно пов. по тврђење следи из претходне последице. $\square$

Пример Варшавски круг



- путно пов. и повезан

- није лок. повезан нити лок. путно пов.

Слов X је лок. путно пов. ако у композиције путне пов. сваког вибореног скупа виборене у X .
доказ: Слично као код лок. пов. $\square$

Последица Ако је X лок. путно пов. онда
 $(\forall x \in X) \quad P_x \in T_x \cap F_x$

Аксиоме пребројивости и сепарабилности

деф Нека је X топ. пр. и $x \in X$. $B_x \subseteq T_x$ је локална база у x ако
 $(\forall U \in T_x \cap \mathcal{O}(x)) (\exists B \in B_x) \quad x \in B \subseteq U$.

Пример (M, d) метрички пр., $x \in M$

$$B_x = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

деф Нека је X топ. пр. Кажемо да X задовољава I аксиому пребројивости ако за свако $x \in X$ постоји пребројива локална база B_x .

деф Нека је X топ. пр. Кажемо да X задовољава II аксиому пребројивости ако постоји пребројива база B у T_x .

деф Нека је X топ. пр. Кажемо да је X сепарабилан ако постоји пребројив скуп A који је густ у X (тј. $\bar{A} = X$).

Ситов $\text{II} \Rightarrow \text{I}$

доказ: $(\forall x \in X) B_x := B \quad \square$

Ситов $\text{II} \Rightarrow \text{сепарабилност}$

доказ: Нека је $B = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ прототипа база од X .

Узмимо $x_n \in X$ произвољно и $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Тада је A прототип и $\bar{A} = X$. $\square$

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је сепарабилан и задовољава I акс. али не задовољава II .

I : $x \in \mathbb{R}$, $B_x := \{[x, x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

сепарабилност: $\bar{Q} = \mathbb{R}$

II : Нека је $\mathcal{B}$ произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. Како је $[x, x+1) \in \mathcal{S}$, постоји $B_x \in \mathcal{B}$ так. $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$.

Нека је $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ дамо са $F(x) := B_x$

Ако је $x \neq y$, тог. $x < y$, и $y \in B_y \subseteq [y, y+1)$

закључујемо $x \notin B_y$, па је $B_x \neq B_y$, тј. F је „1-1“.

F „1-1“ $\Rightarrow |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{B}| \Rightarrow \mathcal{B}$ је непрототип $\square$