Топологија А

-Предавања-

2025/2026

Садржај

1 Тополошки простор
2 База и предбаза топологије
5 Основни појмови у топ. пр.
8 Тополошки потпростор
9 Непрекидност
12 Хомеоморфизми
15 Тополошки производ
20 Тополошка својства
21 Повезаност
25 Компоненте повезаности
27 Локална повезаност
28 Повезаност производа
31 Путна повезаност
34 Компоненте путне повезаности
35 Локална путна повезаност
36 Аксиоме пребројивости и сепарабилности
40 Конвергенција низова
42 Аксиоме сепарације
50 Џонсова лема
52 Урисонова лема
53 Тицеова теорема о екстензији
56 Компактност
60 Локална компактност
61 Компактификација
65 Теорема Тихонова
67 Хилбертов куб
68 Урисонова теорема о метризабилности
71 Количничка пресликавања
72 Количнички простори
76 Конструкције нових топ. пр.
81 Симплицијални комплекси

Садржај по питањима

1. Тополошки простори, примери, база, предбаза. [1 - 5]
2. Основни појмови у тополошком простору (унутрашњост, затворење, руб, потпростор). [5 - 8]
3. Непрекидност, хомеоморфизми. [8 - 15]
4. Тополошки производ (Тихоновљева и *box* топологија). [15 - 20]
5. Повезаност, компоненте повезаности, локална повезаност. [21 - 28]
6. Повезаност производа. [28 - 30]
7. Путна и локална путна повезаност. [31 - 36]
8. Аксиоме пребројивости, сепарабилност. [36 - 40]
9. Аксиоме сепарације T_0, T_1 и T_2. Продуктибилност. [42 - 46]
10. Аксиоме сепарације T_3, $T_{3½}$ и T_4. Продуктибилност. Џонсова лема. [46 - 51]
11. Урисонова лема. [52 - 53]
12. Тицеова теорема о екстензији. [53 - 56]
13. Компактност [56 - 59]
14. Локална компактност, Александровљева компактификација. [60 - 64]
15. Тихоновљева теорема. [65 - 67]
16. Хилбертов куб, Урисонова теорема о метризабилности. [67 - 70]
17. Количничка пресликавања, количнички простори, неке конструкције количничких простора. [71 - 80]
18. Симплицијални комплекси. [81 - 89]

Тополошки простор

деф. Нека је $X \neq \emptyset$ скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова т.д.

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,

(3) $U_\alpha \in \mathcal{T}$, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе фамилије $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

- Често пишемо и само т. пр. X уместо $(X, \mathcal{T})$
- Индукцијом из (2): $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Пример (1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ антидискретна топологија

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топологија

(3) (M, d) метрички простор

$\mathcal{T} = \{U \subseteq M \mid U$ отворен у $(M, d)\}$

топ. индукована метриком

(4) $(\mathbb{R}^n, d)$ d - стандардна метрика

уобичајена (стандардна) топологија

(5) $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

Питање: колико има различитих топ. на $\{a, b, c\}$?

(6) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{cf} = \{U \subseteq X \mid U^c$ коначан$\} \cup \{\emptyset\}$

коконечна топ. (X коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$)

(7) $X \neq \emptyset$ $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subseteq X \mid U^c$ пребројив$\} \cup \{\emptyset\}$

копребројива топ.

дефиниција. Нека су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на $X \neq \emptyset$. Ако је $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ кажемо да је $\mathcal{T}_1$ грубља (уža), а $\mathcal{T}_2$ финија (шира).
($\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ могу бити и неупоредиве.)

дефиниција. Кажемо да је скуп $F \subseteq X$ затворен у $(X, \mathcal{T})$ ако је $F^c \in \mathcal{T}$. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$, тј. $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}\}$.

Теорема Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. и $\mathcal{F}$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(2) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$,

(3) $F_\alpha \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

доказ: Де-Морганови закони + деф. $\mathcal{F}$. ☒

База и предбаза топологије

дефиниција. Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. простор. Подфамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ је база топологије $\mathcal{T}$ ако

$$(\forall U \in \mathcal{T})(\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}) \quad U = \bigcup \mathcal{B}'$$

еквивалентно: $(\forall U \in \mathcal{T})(\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B}) \quad x \in B \subseteq U$.

Пример (1) $\mathcal{B} = \mathcal{T}$

(2) (M, d) $\mathcal{B}$ = отворене лопте

(3) $(X, \mathcal{T}_d)$ $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Став Нека је $\mathcal{B}$ база топологије $\mathcal{T}$ на X. Тада

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists B_x \in \mathcal{B})\ x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$.

доказ: (1) $X \in \mathcal{T} \Rightarrow X = \cup \mathcal{B}$ по деф. базе.

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists B_x$ по деф. ▨

Став Ако је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија која задовољава (1) и (2), онда је $\mathcal{B}$ база неке топ. на X.

доказ: Дефинишимо

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \;\middle|\; \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

$$= \{ U \subseteq X \mid \underbrace{(\forall x \in U)(\exists B_x \in \mathcal{B})\ x \in B_x \subseteq U}_{U = \bigcup_{x \in U} B_x} \}$$

$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ је топ. на X:

- $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
- $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \overset{?}{\Rightarrow} U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

  $x \in U \Rightarrow (\exists B_1 \in \mathcal{B})\ x \in B_1 \subseteq U$

  $x \in V \Rightarrow (\exists B_2 \in \mathcal{B})\ x \in B_2 \subseteq V$

  $\Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$

  $\overset{(2)}{\Rightarrow} (\exists B_x \in \mathcal{B})\ x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$

  $\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

- $U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}},\ \alpha \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

$x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathcal{A})\ x \in U_\alpha$

$\Rightarrow (\exists B_x \in \mathcal{B})\ x \in B_x \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. ☒

def. $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ називамо топологијом индукованом базом $\mathcal{B}$.

Особине: (1) $(X, \mathcal{T})$ т.пр. и $\mathcal{B}$ база за $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

(2) $(X, \mathcal{T})$ топ. пр., $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ задовољава (1) и (2)

$\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ је подскупа топ. са базом $\mathcal{B}$)

def. За базе $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ на X кажемо да су еквивалентне ако индукују исту топологију.

def. Нека је $(X, \mathcal{T})$ т.пр. и $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Фамилија $\mathcal{S}$ је предбаза топологије $\mathcal{T}$ ако је фамилија свих коначних пресека елемената из $\mathcal{S}$ једна база топ. $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \mid n \in \mathbb{N},\ U_i \in \mathcal{S},\ i = \overline{1,n} \right\}$$

Став Нека је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ тј. $\bigcup \mathcal{S} = X$. Тада постоји топологија чија је $\mathcal{S}$ предбаза.

доказ: $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \mid n \in \mathbb{N},\ U_i \in \mathcal{S},\ i = \overline{1,n} \right\}$

$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$

Докажимо да је $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ база.

(1) очигледно је $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{S}$, па је

$$X = \bigcup \mathcal{S} \subseteq \bigcup \mathcal{B}_\mathcal{S} \Rightarrow \bigcup \mathcal{B}_\mathcal{S} = X$$

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\mathcal{S} \Rightarrow B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \; B_2 = \bigcap_{j=1}^{m} V_j$

$$B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} V_j \in \mathcal{B}_\mathcal{S}. \; \square$$

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$: $\mathcal{S}_1 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{S}_2 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\} \cup \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{Q}\}$

Основни појмови у топ. пр.

$(X, \mathcal{T})$ – топ. пр.

деф. Скуп G је околина тачке $x \in X$ ако

$$(\exists U \in \mathcal{T}) \; x \in U \subseteq G$$

Околински систем: $\mathcal{O}(x) := \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T}) \; x \in U \subseteq G\}$

Ако $G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}$, G је отворена околина.

$$\mathcal{O}(A) := \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T}) \; A \subseteq U \subseteq G\}$$

особине: (1) $(\forall x \in X) \; \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$

(2) $G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in G$

(3) $G \in \mathcal{O}(x) \wedge G \subseteq H \Rightarrow H \in \mathcal{O}(x)$

(4) $G, H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{O}(x)$

(5) $(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))(\forall y \in H) \; G \in \mathcal{O}(y)$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in A$ **унутрашња тачка** од A ако је $A \in \mathcal{O}(x)$. **Унутрашњост** (интериор) скупа A је скуп свих унутрашњих тачака:

$$\operatorname{int} A = \{x \in A \mid A \in \mathcal{O}(x)\}$$

(користи се и ознака $\mathring{A}$)

особине: (1) $\operatorname{int} A \subseteq A$

(2) $\operatorname{int} A \subseteq \mathcal{T}$

(3) $\operatorname{int} A = A \iff A \in \mathcal{T}$

(4) $B \subseteq A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow B \subseteq \operatorname{int} A$

(5) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

(6) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ ← нпр. $A = [0,1]$, $B = [1,2]$

(7) $\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$

Пример $\operatorname{int}[0, +\infty) = \emptyset$ у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ **адхерентна тачка** скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset$. **Затворење** (адхеренција) скупа A је скуп свих адх. тачака:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset\}$$

(користи се и ознака $\mathrm{cl}\, A$)

особине: (1) $A \subseteq \bar{A} \in \mathcal{F}$

(2) $A = \bar{A} \iff A \in \mathcal{F}$

(3) $A \subseteq F \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ ← нпр. $A = (0,1)$, $B = (1,2)$

(6) $\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \in \mathcal{F}}} F$

(7) $x \in \bar{A}$ ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T})$ $G \cap A \neq \emptyset$.

(8) $(\operatorname{int} A)^c = \overline{A^c}$

Пример $\overline{(0,1)} = \mathbb{R}$ у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ граничне тачке скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset \wedge G \cap A^c \neq \emptyset$.

Скуп свих граничних тачака је граница (∂S) тог скупа

$$\partial A = \{ x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset,\ G \cap A^c \neq \emptyset \}$$

особине: (1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ $\quad$ ($\overline{A^c} = \text{int}(A^c)$)

(2) $(\forall A \subseteq X)\quad X = \text{int}A \sqcup \partial A \sqcup \text{ext}A$

(3) $\bar{A} = \text{int}A \sqcup \partial A$

Пример у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ $\quad \partial(0,1) = \mathbb{R}$ $\quad \left(\overline{(0,1)} = \text{int}(0,1) \sqcup \partial(0,1) \right)$

$\overline{(0,1)} = \mathbb{R}$, $\text{int}(0,1) = \emptyset$

деф $x \in X$ је тачка нагомилавања скупа A ако

$$(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Скуп свих тачака нагомилавања означавамо са A'.

деф. $x \in A$ је изолована тачка скупа A ако $x \in A \setminus A'$.

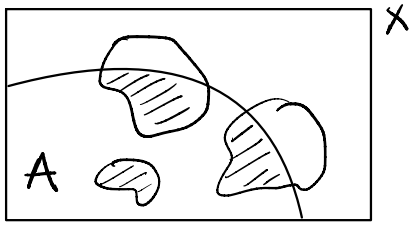
деф. $A \subseteq X$ је свуда густ у X ако је $\bar{A} = X$.

деф. $A \subseteq X$ је нигде густ ако је $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

Тополошки потпростор

Нека је $(X,\mathcal{T})$ т. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$



Став $(A, \mathcal{T}_A)$ је тополошки простор.
($\mathcal{T}_A$ је топологија на A наслеђена од X.)

доказ: по деф. ▨

$$F \in \mathcal{F}_A \iff (\exists U \in \mathcal{T})\ F = A \setminus U$$

$$\iff (\exists U \in \mathcal{T})\ F = A \setminus (U \cap A) = A \cap (U \cap A)^c = A \cap (U^c \cup A^c)$$
$$= (A \cap U^c) \cup (A \cap A^c) = A \cap U^c$$

$$\iff (\exists V \in \mathcal{F})\ F = A \cap V$$

дакле, $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$

Став: (1) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$
(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_X$

доказ: за вежбу. ▨

За вежбу: $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow cl_B A \subseteq cl_X A$ и
$cl_B A = cl_X A \cap B$

Непрекидност

деф. Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y,\mathcal{T}_Y)$ топ. пр. Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Пример (1) $f: X \to Y$, $f = const \Rightarrow f$ је непр.

(2) $f: X \to (Y, \mathcal{T}_a)$ је непр.

(3) $f: (X, \mathcal{T}_d) \to Y$ је непр

(4) $f(x) = 1_X(x) = x$, $f: (X,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T}_2)$

f је непр. $\iff \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

деф. Пресликавање $f: (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ је непр. у $x_0 \in X$ ако $(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x_0)$.

Теорема Нека је $f: (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$. Следећи искази су еквивалентни:

(1) f је непр.

(2) $(\forall x \in X)$ f је непр. у x.

(3) Ако је $\mathcal{B}_Y$ база за Y, онда $(\forall B \in \mathcal{B}_Y)\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

(4) Ако је $\mathcal{S}_Y$ предбаза за Y, онда $(\forall S \in \mathcal{B}_Y)\ f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$.

(5) $(\forall F \in \mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$.

(6) $(\forall A \subseteq X)\ f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(7) $(\forall B \subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$

доказ: (1) $\iff$ (2) по деф.

(1) $\iff$ (3): $\Rightarrow$ ✓ јер $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{T}_Y$

$\Leftarrow$: $U \in \mathcal{T}_Y$, $U = \bigcup_{d \in \Gamma} B_d$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} \underbrace{f^{-1}(B_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$$

(1) $\Leftrightarrow$ (5): $F \in \mathcal{F}_Y$

$$\big(f^{-1}(F)\big)^c = f^{-1}(\underbrace{F^c}_{\in \mathcal{T}_Y}) \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$$

(1) $\Leftrightarrow$ (4): $\Rightarrow$: очеп $\mathcal{S}_Y \subseteq \mathcal{T}_Y$

$\Leftarrow$: покажујемо (4) $\Rightarrow$ (3) ($\Leftrightarrow$ (1))

$$B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}_Y} \Rightarrow B = A_1 \cap \cdots \cap A_k,\ A_i \in \mathcal{S}_Y$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \underbrace{f^{-1}(A_1)}_{\in \mathcal{T}_X} \cap \cdots \cap \underbrace{f^{-1}(A_k)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$$

(1) $\Rightarrow$ (6): $f(\bar{A}) \overset{?}{\subseteq} \overline{f(A)}$

Нека је $y \in f(\bar{A})$, тј. постоји $x \in \bar{A}$ тиј. $y = f(x)$

Нека је $G \in \mathcal{O}(y)$. Треба: $G \cap f(A) \neq \emptyset$.

f непр. у $x \overset{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(x)$

Како $x \in \bar{A} \Rightarrow A \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \cap f^{-1}(G)$

$$\left.\begin{array}{l} a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A) \\ a \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(G)) \subseteq G \end{array}\right\} \Rightarrow f(a) \in f(A) \cap G$$

$\Rightarrow f(A) \cap G \neq \emptyset \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$.

(6) $\Rightarrow$ (7): Нека је $B \subseteq Y$. Тада $f^{-1}(B) \subseteq X$

$\overset{(6)}{\Rightarrow} f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \underbrace{\overline{f(f^{-1}(B))}}_{\subseteq B} \subseteq \bar{B} \quad / f^{-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\bar{B})$

$\cup /$

$\overline{f^{-1}(B)}$

(7) $\Rightarrow$ (5): $F \in \mathcal{F}_Y \overset{(7)}{\Rightarrow} \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$

$\Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \Leftrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$. ▨

Став Композиција непр. фја је непр.

доказ: по деф.

Став: Нека је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$. Тада је и $f|_A$ непр.

доказ: $f|_A : A \to Y$

Нека је $V \in \mathcal{T}_Y$. $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_A$. ▨

деф. $x = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_0 \Rightarrow x_n \in G$

Став Нека је $f: X \to Y$ непр. и (x_n) низ у X. Ако је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, онда $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Теорема [о лепљењу] Нека су X, Y топ., $A_\alpha \subseteq X$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$.
Нека је $f: X \to Y$ таф. $f_\alpha := f|_{A_\alpha} : A_\alpha \to Y$ непр. $\alpha \in \mathcal{A}$.

(1) $(\forall \alpha \in \mathcal{A})\ A_\alpha \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f$ је непр.

(2) $\mathcal{A}$ коначан и $(\forall \alpha \in \mathcal{A})\ A_\alpha \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f$ је непр.

доказ: (1) Нека је $V \in \mathcal{T}_Y$.

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \left(f^{-1}(V) \cap A_\alpha\right)$$

$$= \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \underbrace{f_\alpha^{-1}(V)}_{\in \mathcal{T}_{A_\alpha} \subseteq \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f \text{ је непр.}$$

(2) $F \in \mathcal{F}_Y \Rightarrow \quad f^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap X = f^{-1}(F) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right) =$

$$= \bigcup_{\alpha \in A} \left(f^{-1}(F) \cap A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f_\alpha^{-1}(F)}_{\in \mathcal{F}_{A_\alpha} \subseteq \mathcal{F}_X} \in \mathcal{F}_X$$ ▨

Хомеоморфизми

деф. Кажемо да је $h: X \to Y$ хомеоморфизам ако је h бијекција и h и h^{-1} су непр.
Ако постоји хомео. између X и Y пишемо $X \approx Y$.

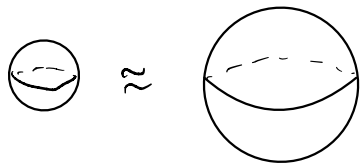
Став $\approx$ је рел. еквиваленције.

доказ вежба. ▨

деф. Својства која се чувају при хомеоморфизму називају се тополошким инваријантама.

Пример (1) $[a, b] \approx [0, 1]$

(2)



(3)

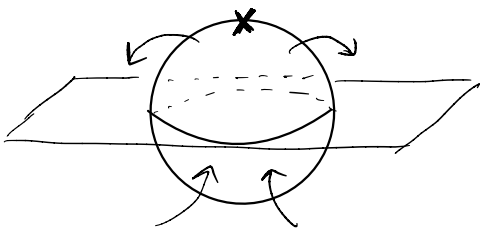


S^n_+ $\quad$ D^n

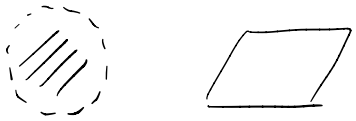
(4) $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$\Gamma_f \approx X$

(5) $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$

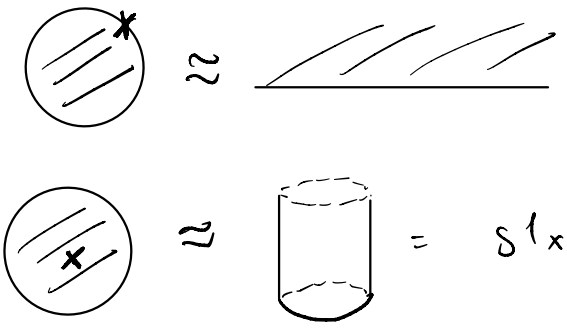


(6) $\operatorname{int} D^n \approx \mathbb{R}^n$



(7) $\mathbb{R}^2 \setminus * \approx C = S^1 \times \mathbb{R}$

(8)



деф Нека је $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$.

(1) f је **отворено** ако $(\forall U \in \mathcal{T}_X)\ f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

(2) f је **затворено** ако $(\forall F \in \mathcal{F}_X)\ f(F) \in \mathcal{F}_Y$.

Став Нека је $f: X \to Y$. Следећа тврђења су еквивалентна.

(1) f је хомео.

(2) f је непр., бијекција и отворено.

(3) f је непр., бијекција и затворено.

(4) f је бијекција и $(\forall A \subseteq X)\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

доказ: (1) $\Rightarrow$ (2): непр, биј. ✓ Нека $U \in \mathcal{T}_X$.

$f(U) = \underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{\text{непр. јер хомео}}(U) \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow$ отворено

(2) $\Rightarrow$ (3): нехр. обј. W $\quad F \in \mathcal{F}_X$

$$f(F) = \left(f\left(\underbrace{F^c}_{\text{отв.}}\right)\right)^c \in \mathcal{F}_Y \Rightarrow f \text{ је затворено.}$$

(f обј. $\in \mathcal{F}_Y$)

(3) $\Rightarrow$ (4): обј. W

f нехр. $\Rightarrow (\forall A \subseteq X) \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

обрнуто: $f(A) \subseteq f(\bar{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$

($f(\bar{A})$: затв. $\cap$ $\mathcal{F}_X$ $\in \mathcal{F}_Y$)

(4) $\Rightarrow$ (1): обј. W

$(\forall A \subseteq X)\ f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f$ је нехр.

f^{-1} нехр: Нека је $F \in \mathcal{F}_X$

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) \underset{\text{обј.}}{=} f(F) = f(\bar{F}) \overset{(4)}{\subseteq} \overline{f(F)} \in \mathcal{F}_Y. \quad \blacksquare$$

деф. $f: X \to Y$ је утапање ако је $f: X \to f(X)$ хомео.
(сиц. утапање је „1-1" и нехр.) Пишемо $f: X \hookrightarrow Y$.

Пример M^n глатка многострукост.
За које k важи: $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^k$

Витни: $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

нехр. $\mathbb{RP}^{2^k} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2 \cdot 2^k - 1}$

Конструкција топологије пресликавањима:

(1) $f: X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$

↑ скуп

Индуцирана топ. $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) := \{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y \}$

(2) $f: (X, \mathcal{T}_X) \to Y$

финална топологија $\mathcal{T}_f := \{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}$

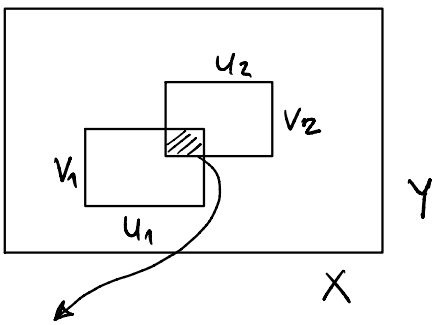
- индуцирана топ. је најмања тр. је f непр., а финална је најмућа тр. је f непр.

Пример $i : A \hookrightarrow X \Rightarrow \mathcal{T}_A = i^{-1}(\mathcal{T}_X)$

Тополошки производ

Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр. дефинишемо топ. на $X \times Y$.

База: $\mathcal{B}_{X\times Y} = \{ U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \}$



1) $X \times Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{X\times Y}} B$

2) $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}_{X\times Y}$

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}_{X\times Y}$$

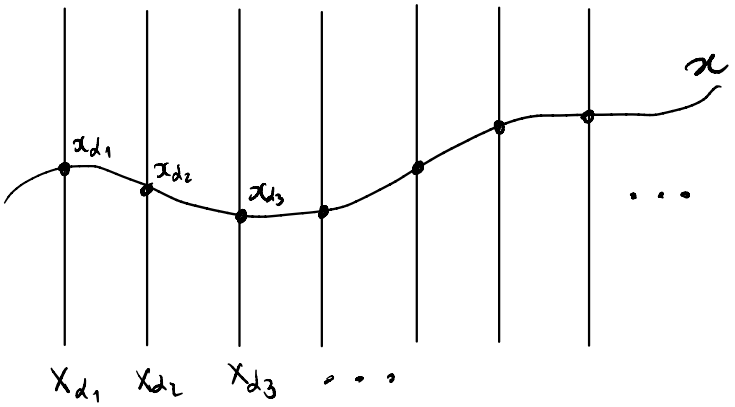
1) + 2) $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_{X\times Y}$ јесте база

Ова база нам задаје топ. $\mathcal{T}_{X\times Y}$ на $X\times Y$.

Слично добијамо $(X_1\times\cdots\times X_n,\ \mathcal{T}_{X_1\times\cdots\times X_n})$

Посматрајмо сада произвољан производ простора $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$

$$X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x: A\to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha \mid (\forall \alpha\in A)\ \underset{\| \\ x_\alpha}{x(\alpha)}\in X_\alpha\}$$



Имамо пројекцију за $\alpha_0\in A$:

$$p_{\alpha_0}: \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_{\alpha_0}$$

$$x \longmapsto x_{\alpha_0}$$

На $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ дефинишемо два топологије:

1) box топ.

2) топ. Тихонова

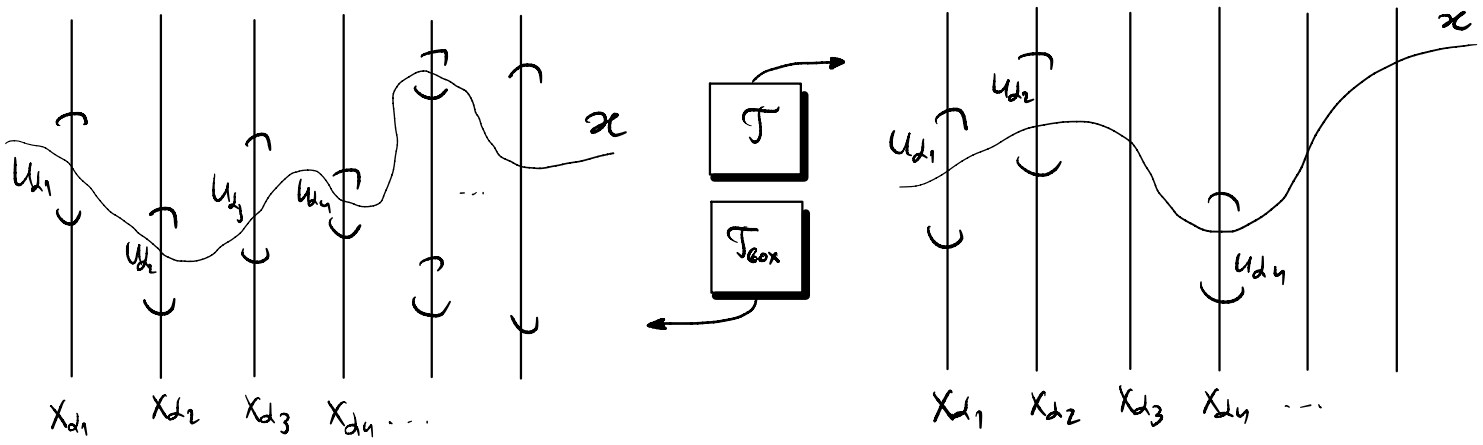
<u>box топ.</u>: задата базом $\mathcal{B}_{box} = \left\{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \mid (\forall\alpha\in A)\ U_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha\right\}$

<u>Тихоновљева топ.</u>: задата предбазом

$$\mathcal{Y} = \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha\in A, U_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha\} \rightsquigarrow \mathcal{T}$$

<u>деф</u> Тополошки производ фамилије $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ је простор $X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ са топологијом Тихонова $\mathcal{T}$.

Илустрација базних скупова у $\mathcal{T}_{box}$ и $\mathcal{T}$:



$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$$V = \bigcap p_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$$

↑ коначан пресек

$x \in U \iff x_\alpha \in U_\alpha, \forall \alpha$

↑ за свако α имамо „граничник" куда x може да пређе

$x \in V \iff x_\alpha \in U_\alpha$, коначно много α

↑ имамо само неколико „граничника"

Како изгледа $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{S}$?

$$p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha, \qquad V_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_0}, & \alpha = \alpha_0 \\ X_\alpha, & \alpha \neq \alpha_0 \end{cases}$$

Очигледно је $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}_{box}$, па и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{box}$. Тврдимо:

Став (1) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{box}$

(2) Ако је A коначан, онда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{box}$.

Став $\mathcal{T}$ је најјача топологија на X тј. су све пројекције p_α непрекидне.

Став: $(\forall \alpha \in A)$ p_α је отворено.

доказ: Довољно је да покажемо да је слика базних отворена.

$$p_\alpha\left(p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})\right) = \begin{cases} U_{\alpha_i}, & \alpha = \alpha_i \\ X_{\alpha_i}, & \alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n \end{cases} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$$ ▨

Став Нека је X топ. пр. и $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фамилија топ. пр. Пресликавање $f: X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ је непрекидно акко

$$(\forall \alpha \in A) \quad p_\alpha \circ f : X \to Y_\alpha \text{ је непр.}$$

(на $\prod Y_\alpha$ подразумевамо топ. Тихонова.)

доказ: $\Rightarrow$: композиција непр. је непр.

$\Leftarrow$: На основу става од раније (са 7 тврђења) довољно је да се уверимо да је инверзна слика ел. из $\mathcal{S}$ отворена.

Нека је $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \in \mathcal{S}$.

$$f^{-1}\left(p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})\right) = \underbrace{\left(p_{\alpha_0} \circ f\right)^{-1}}_{\text{непр.}}\left(\underbrace{U_{\alpha_0}}_{\in \mathcal{T}_{\alpha_0}}\right) \in \mathcal{T}_X.$$ ▨

Став (1) $\prod_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha \in A} A_\alpha}$ $\quad (A_\alpha \subseteq X_\alpha)$

(2) $\operatorname{int}\left(\prod_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \subseteq \prod_{\alpha \in A} \operatorname{int} A_\alpha$

Пример $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ = простор реалних низова

Посматрајмо дијагонално уграђење $d: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$d(x) := (x, x, x, x, \dots)$ = константан низ.

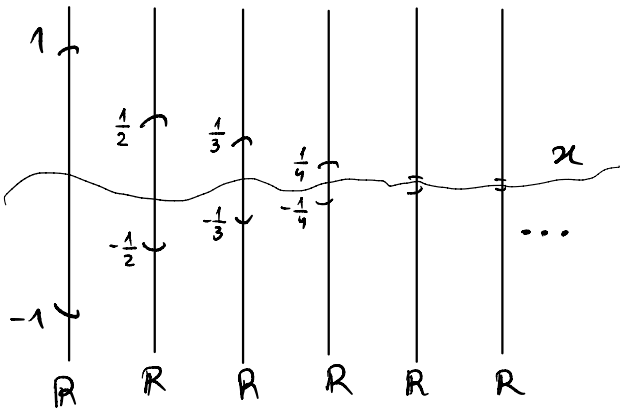
d је непр. у $\mathcal{T}$:

$$(p_\alpha \circ d)(x) = p_\alpha(x, x, x, \dots, \overset{\alpha}{\downarrow} x, \dots) = x = 1_{\mathbb{R}}(x)$$

$1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је непр. $\Rightarrow$ d је непр.

d није непр. у $\mathcal{T}_{cox}$:

тј. d је непр. и уочимо $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{T}_{cox}$



$$d^{-1}(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \{0\} \notin U$$

↯

Деф. Нека су $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фамилије т. пр. и $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Производ пресл. $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ је

$$f : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$$

дато са $(f(x))_\alpha = f_\alpha(x_\alpha)$.

Дакле, комутира дијаграм:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in A} X_\alpha & \xrightarrow{f} & \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \\ \downarrow p_\beta & \hookrightarrow & \downarrow p_\beta \\ X_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & Y_\beta \end{array}$$

Став Производ пресл. је непр. акко је f_α непр. $\forall \alpha \in A$.

доказ: директно из става о непрекидности $f: X \to \prod Y_\alpha$. ▨

Став Ако је f_α хомео. за свако $\alpha \in A$, онда је и производ свих пресл. хомео.

Тополошка својства

$\mathcal{P}$ - неко својство (нпр. компактност, повезаност, ...)

- $\mathcal{P}$ је непрекидно инваријантно ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X, Y)(\forall \text{непр. и „на“ } f: X \to Y)\ \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

- $\mathcal{P}$ је тополошко инваријантно ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X, Y)\ X \approx Y \Rightarrow \left(\mathcal{P}(X) \Leftrightarrow \mathcal{P}(Y)\right)$$

- $\mathcal{P}$ је наследно ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X)(\forall A \subseteq X)\ \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{P}(A)$$

- $\mathcal{P}$ је слабо наследно ако

$$(\forall \text{ т. пр. } X)(\forall A \in \mathcal{F}_X)\ \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{P}(A)$$

- $\mathcal{P}$ је продуктибилно ако

$$(\forall A)(\forall \text{ фам. т. пр. } \{X_\alpha\}_{\alpha \in A})\left((\forall \alpha \in A)\ \mathcal{P}(X_\alpha)\right) \Rightarrow \mathcal{P}\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$$

Повезаност

деф. Топ. пр. $(X, \mathcal{T}_X)$ је повезан ако не постоји пар скупова $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ тј. $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$.
Ако постоје овакви скупови, кажемо да је X неповезан, а пар (U, V) називамо дисконексијом од X.

Став Следећа тврђења су еквиваленитна:

(1) X је повезан;
(2) не постоји непр. и „на" $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_d)$;
(3) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.

доказ **(1) => (3)**: тис. $(\exists U \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{F}) \setminus \{\emptyset, X\})$

$\Rightarrow (U, U^c)$ је дисконексија од X ↯

(3) => (1): тис. X није повезан и (U, V) нека дисконексија, тј. $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.

$\Rightarrow U = V^c \in \mathcal{F}_X \Rightarrow U \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{F}_X$ ↯

(1) => (2): тис. $\exists f: X \to \{0,1\}$ непр. и „на"

$U := f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$
$V := f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$
$\Rightarrow (U, V)$ је дисконексија од X ↯

(2) => (1): тис. (U, V) дисконексија од X.

дефинишемо $f|_U = 0$, $f|_V = 1$.

f је непр. на основу леме о лепљењу. ↯ ☒

деф. $A \subseteq X$ је повезан ако је $(A, \mathcal{T}_A)$ повезан.

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ $A \subseteq \mathbb{R}$ је повезан акко је интервал (отворен, затворен, коначан, беск, ...)

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ зарисенфрајова права

$A \subseteq \mathbb{R}$ је пов. $\Leftrightarrow$ $|A| = 1$

$|A| \geq 2 \Rightarrow \exists a, b \in A,\ a \neq b$

$$A = \left(A \cap (-\infty, \tfrac{a+b}{2})\right) \sqcup \left(A \cap [\tfrac{a+b}{2}, +\infty)\right)$$

↖ дисконекција ↗

Став Повезаност је непр. инваријанта, тј. $f : X \xrightarrow{НА} Y$ непр., X пов. $\Rightarrow$ Y пов.

доказ тј. Y није пов.

$\Rightarrow$ $\exists$ непр. и „на" $g : Y \to \{0,1\}$

$\Rightarrow$ $g \circ f : X \to \{0,1\}$ непр. и „на". ↯ ☒

Лема Нека је X неповезан и (U,V) дисконексија. Ако је $A \subseteq X$ повезан, онда $A \subseteq U$ или $A \subseteq V$.

доказ Имамо $X = U \sqcup V$, $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$

тј. $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $A = (A \cap U) \sqcup (A \cap V)$ - дисконексија од A ↯ ▨

($A \cap U \in \mathcal{T}_A \setminus \{\emptyset\}$)

Теорема* Нека је $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ фамилија повезаних потпростора од X тј.

(1) $(\exists \alpha_0 \in \Lambda)(\forall \alpha \in \Lambda)\ X_{\alpha_0} \cap X_\alpha \neq \emptyset$

(2) $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$

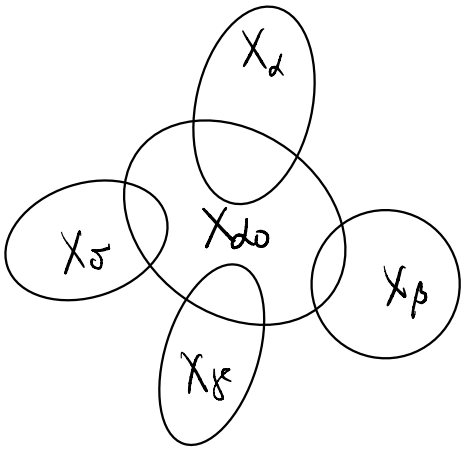
Тада је X повезан.

доказ тј. X није повезан и $X = U \sqcup V$ дисконексија

$\overset{\text{лема}}{\Rightarrow}$ Бар $X_{\alpha_0} \subseteq U$.

Такође из леме $(\forall \alpha \in \Lambda)\ X_\alpha \subseteq U \veebar X_\alpha \subseteq V$, али пошто је $X_\alpha \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset$, X_{α_0} и X_α морају бити у истом скупу, тј. $X_\alpha \subseteq U$, за свако $\alpha \in \Lambda$.

$\Rightarrow$ $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \subseteq U \Rightarrow V = \emptyset$ ↯ ▨



Уопштење: услов (1) можемо заменити са:

(1') $(\exists \alpha_0 \in \Lambda)(\forall \alpha \in \Lambda)\ X_{\alpha_0} \cap \overline{X}_\alpha \neq \emptyset$

Став Нека је X топ. $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Ако је A повезан, онда је и B повезан.

(Следећи: A пов. $\Rightarrow \bar{A}$ пов.)

доказ тј. $B = B_1 \sqcup B_2$ дисконекција

лема $\Rightarrow$ Бчо $A \subseteq B_1$

$B_1 \in \mathcal{F}_B \Rightarrow (\exists F \in \mathcal{F}_X)\ B_1 = B \cap F$

$\Rightarrow A \subseteq F \in \mathcal{F}_X \Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow B \subseteq F \Rightarrow B_1 = B \cap F = B \Rightarrow B_2 = \emptyset$ ↯ □

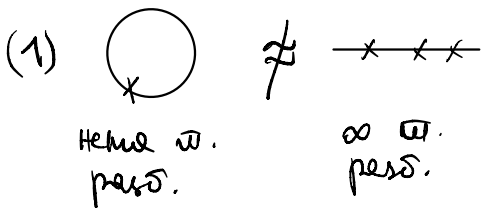
деф Нека је X повезан и $x_0 \in X$ тд. $X \setminus \{x_0\}$ је неповезан. Тада x_0 називамо тачком дисконекције (разбијања).

Став Број тачака разбијања простора X је тополошка инваријанта.

доказ $h : X \approx Y$ и $x_0 \in X$

$X \setminus \{x_0\}$ неповезан $\Leftrightarrow$ $Y \setminus \{h(x_0)\}$ неповезан □

Пример

(1) 

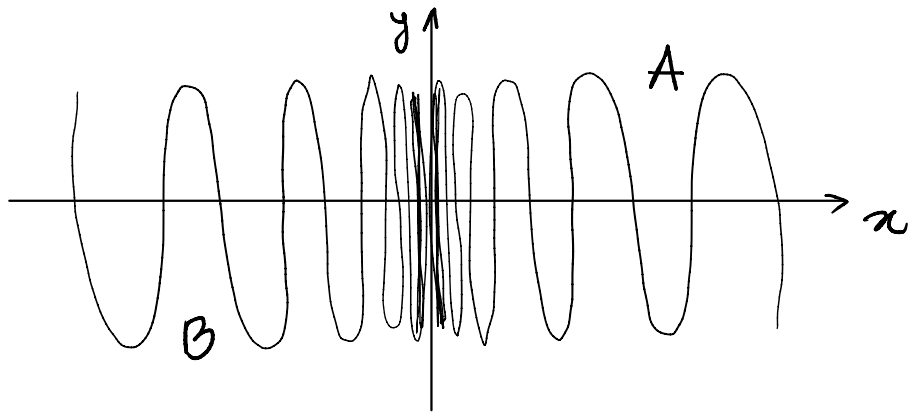
(2) 

(3) $\mathbb{R}^n_0 \approx \mathbb{R}_\infty$

Пример тополошког синуса $X = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$A = \left\{ \left(x, \sin \tfrac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \left(x, \sin \tfrac{1}{x}\right) \mid x < 0 \right\}$$



$A \approx (0, +\infty)$, $B \approx (-\infty, 0) \Rightarrow A$ и B су повезани

$\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$, $\bar{B} = B \cup (\{0\} \times [-1,1])$ – повезани (из става A пов $\Rightarrow \bar{A}$ пов)

$\overset{\text{❀}}{\Rightarrow} X = \bar{A} \cup \bar{B}$ пов.

Компоненте повезаности

Дефинишемо релацију $\sim$ на т. пр. X. За $x, y \in X$:

$$x \sim y \iff (\exists C \subseteq X)\ C \text{ повезан и } x, y \in C$$

Став $\sim$ је рел. екв.

доказ P и C очигледно, T из теореме ❀. ▨

деф Класе рел. екв. $\sim$ називамо компонентама повезаности:

$$C_x = [x],\ x \in X$$

деф X је потпуно неповезан ако $(\forall x \in X)\ C_x = \{x\}$.

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ и $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$ су потпуно неповезани.

Став C_x је највећи повезан скуп који садржи $x \in X$.

доказ C_x је повезан:

Нека је $y \in C_x$, тј. $x \sim y$

$\Rightarrow$ $\exists K_y$ повезан тд. $x, y \in K_y$

$\Rightarrow$ $K_y \subseteq C_x$

$\Rightarrow$ $C_x = \bigcup_{y \in C_x} K_y \xRightarrow{\text{Т.}\circledast} C_x$ је повезан

C_x је највећи: Нека је K повезан тд. $x \in K$. Онда $K \subseteq C_x$ ▨

Став C_x је затворен за свако $x \in X$.

доказ C_x је повезан $\Rightarrow$ $\overline{C_x}$ повезан, али C_x је највећи пов. који садржи x, па $C_x = \overline{C_x}$ $\Rightarrow$ $C_x \in \mathcal{F}_X$. ▨

Пример C_x не мора бити отворен, нпр. $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$.

X, Y т.пр. $f: X \to Y$ непр. $\mathcal{C}_X = \{C_x \mid x \in X\}$, $\mathcal{C}_Y = \{C_y \mid y \in Y\}$, онда имамо и $\overline{f}: \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$

$$\overline{f}(C_x) = C_{f(x)}.$$

Став Број компоненти повезаности је топ. инваријанта.

Пример $T \not\cong K$ (слова)



пис. $h: T \xrightarrow{\cong} K$

$T \setminus \{x_0\} = 3$ компоненте

1° $K_{h(x_0)}$ $\Rightarrow$ $K \setminus \{h(x_0)\} = 2$ комп.

2° $h(x_0)K$ $\Rightarrow$ $K \setminus \{h(x_0)\} = 4$ комп. ↯

Локална повезаност

деф $(X,\mathcal{T})$ је лок. пов. ако

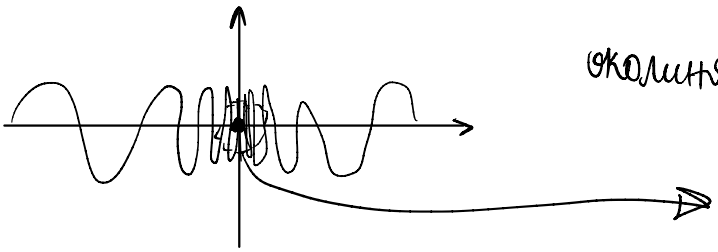
$$(\forall x\in X)(\forall G\in\mathcal{O}(x))(\exists H\in\mathcal{O}(x))\ H\subseteq G \wedge H \text{ повезан.}$$

(тј. свака околина има повезану подоколину)

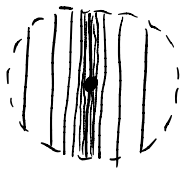
Пример (1) $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ је лок. пов.

(2) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_d)$ није пов., а јесте лок. пов ($\{x\}$ - пов. окол. од x)

(3) тополошка синусоида је пов., а није лок. пов.



околина тачке $(0,0)$:



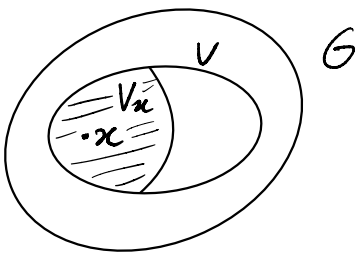
Теорема X је лок. пов. акко су компоненте повезаности сваког отвореног скупа $A\subseteq X$ отворене у X.

доказ $\Rightarrow$: Нека је $A\in\mathcal{T}_X$, $x\in A$. Хоћемо да покажемо да је $C_x^A\in\mathcal{T}_X$.

$$(\forall y\in C_x^A)\ A\in\mathcal{O}(y) \overset{X\text{ лок.пов.}}{\Longrightarrow} (\exists H\in\mathcal{O}(y))\ H \text{ пов. и } H\subseteq A$$

$$\Rightarrow H\subseteq C_x^A \Rightarrow C_x^A\in\mathcal{T}_X$$

$\Leftarrow$: Нека је $x\in X$ и $G\in\mathcal{O}(x)$.



$\Rightarrow (\exists V\in\mathcal{T}_X)\ x\in V$ и $V\subseteq G$

Нека је V_x комп. пов. од V тј. $x\in V_x$

Из услова теореме имамо да је V_x отворен, па је $V_x \in \mathcal{O}(x)$, тј. $V_x \subseteq G$ је повезана подоколина. ▨

Последица X лок. пов. $\Rightarrow (\forall x \in X)\ C_x \in \mathcal{T}_x \cap \mathcal{F}_x$.

Особине: (1) лок. пов. није непр. инваријанта

$$1_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{Q}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$$

↑ лок. пов. Није лок. пов.

(2) лок. пов. није продуктибилно својство

Производ лок. пов. простора је лок. пов. Акко су сви сем коначно много њих лок. пов.

(3) $f : X \to Y$ отв. непр. и „на" и X лок. пов. $\Rightarrow$ Y лок. пов.

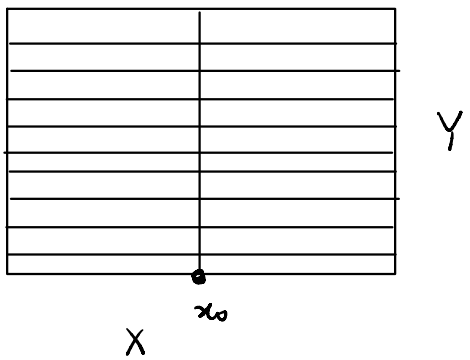
(4) лок. пов. није наследно: $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\mathbb{R}})$ лок. пов, $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$ није.

Повезаност производа

Став Ако су X и Y пов, онда је и $X \times Y$ пов.

доказ $x_0 \in X$ произвољно

$$X \times Y = \left(\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} \right) \cup \{x_0\} \times Y$$



Сви $X \times \{y\}$ и $\{x_0\} \times Y$ су пов. и

$$(\forall y \in Y)\ (X \times \{y\}) \cap (\{x_0\} \times Y) \neq \phi$$

$\overset{\text{Т.}}{\Longrightarrow}$ $X \times Y$ је пов. ▨

Индукцијом: $X_1, \dots, X_n$ пов. $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ пов.

Посматрајмо сада произвољну фамилију $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ повезаних простора.

$$(\forall \alpha \in A)\, X_\alpha \text{ пов.} \not\Rightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T}_{box}\right) \text{ пов.}$$

<u>Пример</u> $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ - пов.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \{ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \} = \text{реални низови}$$

Нека је $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп ограничених и $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп неограничених низова.

$A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = A \sqcup B$.

Да ли су A и B отворени?

За $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имамо

$$U_x := \prod_{n \in \mathbb{N}} (x_n - 1, x_n + 1) \in \mathcal{T}_{box}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \Rightarrow U_x \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{T}_{box} \\ x \in B \Rightarrow U_x \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{box} \end{array}\right\} \Rightarrow (A, B) \text{ је дисконексија од } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Индукцијом: $X_1, \dots, X_n$ топ. $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ топ.

Посматрајмо сада произвољну фамилију $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ тополошких простора.

$(\forall \alpha \in A) X_\alpha$ топ. $\not\Rightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T}_{box}\right)$ топ.

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ - топ.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \{ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \} = \text{реални низови}$$

Нека је $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп ограничених и $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп неограничених низова.

$A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = A \sqcup B$.

да ли су A и B отворени?

За $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имамо

$$U_x := \prod_{n \in \mathbb{N}} (x_n - 1, x_n + 1) \in \mathcal{T}_{box}$$

$x \in A \Rightarrow U_x \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{T}_{box}$

$x \in B \Rightarrow U_x \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{box}$

$\Rightarrow (A, B)$ је дисконексија од $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Теорема $(\forall \alpha \in A) X_\alpha$ топ. $\Rightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{T}\right)$ топ.

($\mathcal{T}$ = тзв. Тихонова)

Доказ: Ако је A коначан ✓

Нека је A бесконачан и Φ фамилија свих коначних

подскупова од A.

Фиксирајмо $a = (a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (тј. одаберемо по једну тачку из сваког X_α)

За $\varphi \in \Phi$ нека је

$$Y_\varphi := \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha, \text{ где } Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha, & \alpha \in \varphi \\ \{a_\alpha\}, & \alpha \notin \varphi \end{cases}$$

коначно много

$$Y_\varphi \approx \prod_{\alpha \in \varphi} X_\alpha \Rightarrow Y_\varphi \text{ је повезан}$$

коначан

Нека је $Y = \bigcup_{\varphi \in \Phi} Y_\varphi \xRightarrow[a \in \bigcap Y_\varphi]{\text{Т. ❀}} Y$ је повезан.

Тврдимо: $\overline{Y} = X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (за A кон. је $Y = X$)

Нека је $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$, $U_\alpha = X_\alpha$ за $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} =: \psi$

тј. $\psi \in \Phi$. Хоћемо да покажемо да је $B \cap Y \neq \emptyset$.

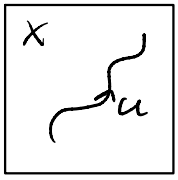
Нека је $y_\alpha = \begin{cases} y_\alpha \in U_\alpha \text{ произвољан}, & \alpha \in \psi \\ a_\alpha, & \alpha \notin \psi \end{cases}$

Тада $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y_\psi \cap B \Rightarrow Y \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow (\forall B \in \mathcal{B})\ Y \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \overline{Y} = X \Rightarrow X$ је пов.

(јер је затворење повезаног повезано.) ▨

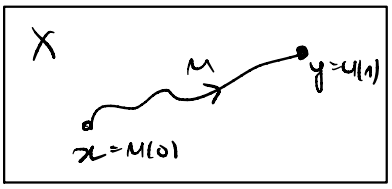
Путна повезаност



деф Пут у X је непр. пресл. $u: [0,1] \to X$.

деф. X је путно повезан ако

$$(\forall x,y \in X)(\exists u: [0,1] \to X \text{ непр.})\ u(0)=x,\ u(1)=y$$

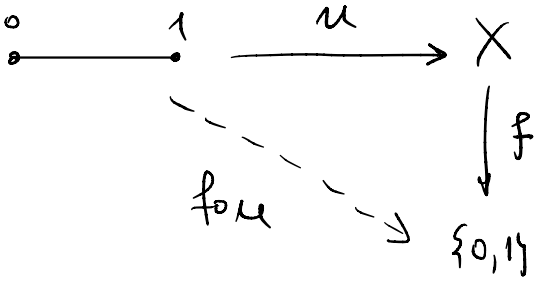


Став Ако је X путно пов, онда је и повезан.

доказ тис. Нека је $f: X \to \{0,1\}$ непр. сур.

$$(\exists x,y \in X)\ f(x)=0,\ f(y)=1$$

Нека је $u: [0,1] \to X$ пут од x до y, тј. $u(0)=x,\ u(1)=y$.



$f \circ u$ је непр. и „на"

$[0,1]$ је пов. $\Rightarrow$ $\{0,1\}$ је повезан ↯ ▨

Став: Путна пов. је непр. инваријанта.

доказ: $f: X \to Y$ непр. и „на" и X путно пов.

Нека су $y_1, y_2 \in Y$ и $x_1, x_2 \in X$ тј. $f(x_i)=y_i$.

X путно пов. $\Rightarrow$ $\exists u: [0,1] \to X$ пут од x_1 до x_2

$\Rightarrow$ $f \circ u: [0,1] \to Y$ је пут од y_1 до y_2 $\Rightarrow$ Y је путно пов. ▨

Став Путна пов. је продуктибилно својство.

доказ: Нека је $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и X_α путно пов. за свако $\alpha \in A$.
Нека су $(x_\alpha)_{\alpha \in A}, (y_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$.
За свако $\alpha \in A$, X_α је путно пов. па постоји непр.
$u_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$ тј. $u_\alpha(0) = x_\alpha$, $u_\alpha(1) = y_\alpha$.
Дефинишимо $u : [0,1] \to X$ са

$$(u(t))_\alpha := u_\alpha(t), \quad \alpha \in A$$

Став од раније: u непр. $\iff (\forall \alpha)\ p_\alpha \circ u = u_\alpha$ непр. $\checkmark$
$\Rightarrow u$ је пут од (x_α) до (y_α), па је X путно пов. ▨

Пример Ако је A путно повезан, $\bar{A}$ не мора бити путно пов.
Нпр. $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0, +\infty)\}$ је путно пов.

$\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ није путно пов.

Теорема X је путно повезан акко је повезан и

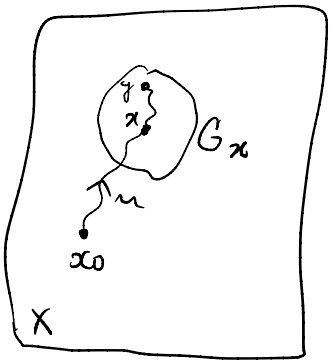
$$(\forall x \in X)(\exists G \in \mathcal{O}(x))\ G \text{ је путно пов.} \quad (*)$$

доказ: $\Rightarrow$: $G := X$ $\checkmark$
$\Leftarrow$: Нека је $x_0 \in X$ произвољна и A скуп свих тачака из X које се могу спојити путем са x_0, тј.

$$A = \{x \in X \mid (\exists u : [0,1] \to X)\ u \text{ непр.}, u(0) = x_0, u(1) = x\}$$

Хоћемо да покажемо да је $A = X$.
Очигледно $A \neq \emptyset$ јер $x_0 \in A$.

<u>A је отворен</u>: Нека је $x \in A$ произвољно.



Тада постоји пут u од x_0 до x, тј.
$u: [0,1] \to X$ непр. и $u(0) = x_0$, $u(1) = x$.
Из (*): $(\exists G_x \in \mathcal{O}(x))$ G_x путно тов.
Нека је $y \in G_x$ произвољно и
$v: [0,1] \to G_x$ пут од x до y, тј. $v(0) = x$, $v(1) = y$.
Надовезивањем путева u и v добијамо пут $u \cdot v$ од x_0 до y:

$$u \cdot v(t) := \begin{cases} u(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

($u \cdot v$ је непр. на основу т. о лепљењу)

$\Rightarrow y \in A \Rightarrow G_x \subseteq A \Rightarrow A$ је отворен.

<u>A је затворен</u>: Нека је $x \in \overline{A}$ произвољно
Из (*): $(\exists G_x \in \mathcal{O}(x))$ G_x путно тов.

$x \in \overline{A} \Rightarrow G_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in G_x \cap A$

$y \in A \Rightarrow \exists$ пут u од x_0 до y
$y \in G_x \Rightarrow \exists$ пут v од y до x

$\Rightarrow u \cdot v$ је пут од x_0 до $x \Rightarrow x \in A$
$\Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow A$ је затворен.

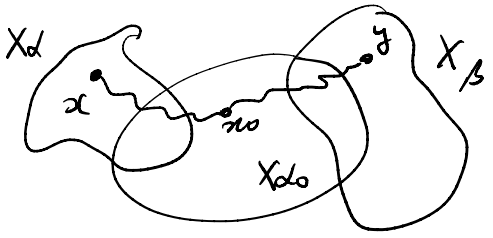
Закључак: $A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$, $A \neq \emptyset$, X повезан
$\Rightarrow A = X$. ▨

Став (☆) Нека су $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ путно пов. пр.

$$(\exists \alpha_0\in A)(\forall \alpha\in A)\ X_\alpha \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset.$$

Тада је $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ путно пов.

„доказ":



Компонените путне повезаности

На X дефинишемо релацију $\sim$ са

$$x\sim y \iff (\exists u:[0,1]\to X)\ u \text{ непр.}, u(0)=x, u(1)=y$$

Став $\sim$ је рел. еквиваленције.

деф. Класе екв. $\sim$ називамо компонентама путне повезаности. Ознака: $P_x = [x] = \{y\in X \mid x\sim y\}$.

Особине: (1) $(\forall x\in X)\ P_x \subseteq C_x$

(2) P_x је највећи путно пов. подскуп од X који садржи x.

(3) P_x не мора бити ни отворен ни затворен

нпр. $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x\in(0,+\infty)\}$, $\bar{A} = A \cup (\{0\}\times[-1,1])$

$P_0 = \{0\}\times[-1,1] \notin \mathcal{T}_{\bar{A}}$, $P_1 = A \notin \mathcal{T}_{\bar{A}}$

(4) Број компонената путне пов. је топ. инв.

Локално путно повезаност

деф X је локално путно повезан ако

$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G$ и H путно пов.

Имамо сл. теорему:

X путно пов. $\Leftrightarrow$ X пов. и $(\forall x \in X)(\exists G_x \in \mathcal{O}(x))$ G_x п.пов.

Последица X повезан и лок. путно пов. $\Rightarrow$ X је пут. пов.

Лема Нека је $(X, \mathcal{T})$ лок. путно пов. и $A \in \mathcal{T}$, онда је A лок. п.пов.

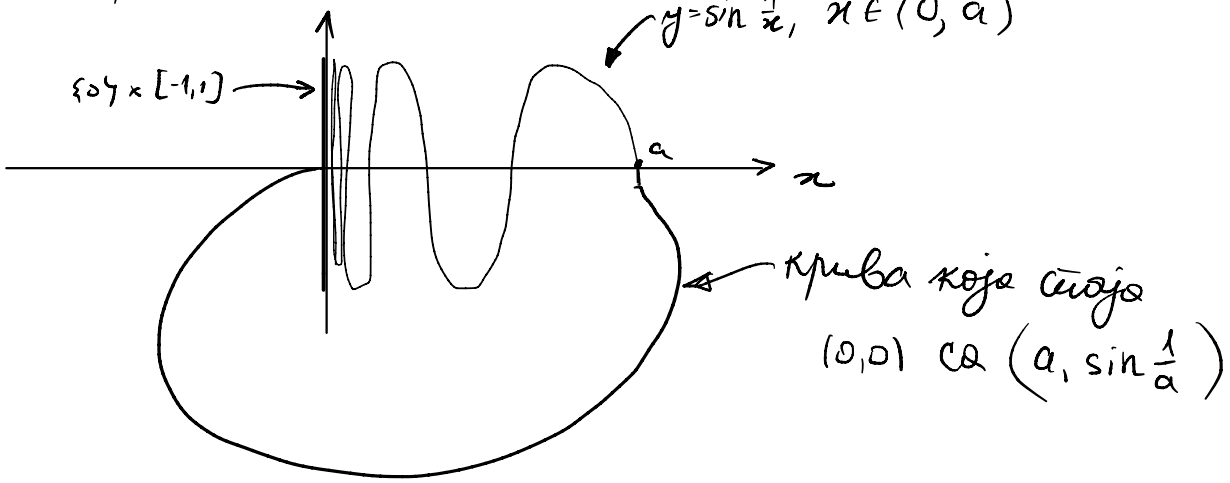
Последица У $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ за свако $A \in \mathcal{U}$ важи:

A је повезан $\Leftrightarrow$ A је путно повезан.

доказ: $\Leftarrow$: увек важи

$\Rightarrow$: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ је лок. путно пов. па претходна следи из претходне последице. ▨

Пример Варшавски круг



- путно пов. и повезан
- није лок. повезан нити лок. путно пов.

Став X је лок. тешко тов. акко су компоненте тешке тов. сваког отвореног скупа отворене у X.

доказ: Слично као код лок. тов. ▨

Последица Ако је X лок. тешко тов. онда
$$(\forall x \in X)\ P_x \in \mathcal{T}_x \cap \mathcal{F}_x$$

Аксиоме пребројивости и сепарабилност

деф Нека је X топ. пр. и $x \in X$. $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_X$ је локална база у x ако
$$(\forall U \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{O}(x))(\exists B \in \mathcal{B}_x)\quad x \in B \subseteq U.$$

Пример (M, d) метрички пр., $x \in M$
$$\mathcal{B}_x = \left\{ B\left(x, \tfrac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

деф Нека је X топ. пр. Кажемо да X задовољава I аксиому пребројивости ако за свако $x \in X$ постоји пребројива локална база $\mathcal{B}_x$.

деф Нека је X топ. пр. Кажемо да X задовољава II аксиому пребројивости ако постоји пребројива база $\mathcal{B}$ од $\mathcal{T}_X$.

деф Нека је X топ. пр. Кажемо да је X сепарабилан ако постоји пребројив скуп A који је свуда густ у X (тј. $\overline{A} = X$).

Став II $\Rightarrow$ I

доказ: $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}_x := \mathcal{B}$ ▨

Став II $\Rightarrow$ сепарабилност

доказ: Нека је $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ пребројива база од X.

Узмимо $x_n \in X_n$ произвољно и $A := \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Тада је A пребројив и $\bar{A} = X$. ▨

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је сепарабилан и задовољава I акс. али не задовољава II.

I: $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x := \{[x, x+\frac{1}{n}) \mid n\in\mathbb{N}\}$

сепарабилност: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

II: Нека је $\mathcal{B}$ произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. Како је $[x, x+1) \in \mathcal{S}$, постоји $B_x \in \mathcal{B}$ тј. $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$.

Нека је $F: \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ дато са $F(x) := B_x$

Ако је $x \neq y$, бр. $x < y$, тј $y \in B_y \subseteq [y, y+1)$

закључујемо $x \in B_y$, тј је $B_x \neq B_y$, тј. F је „1-1".

F „1-1" $\Rightarrow$ $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{B}|$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ је непребројив ▨

Теорема Нека је (M, d) метрички простор.

M је сепарабилан $\Leftrightarrow$ задовољава II акс. пр.

доказ $\Leftarrow$: увек важи.

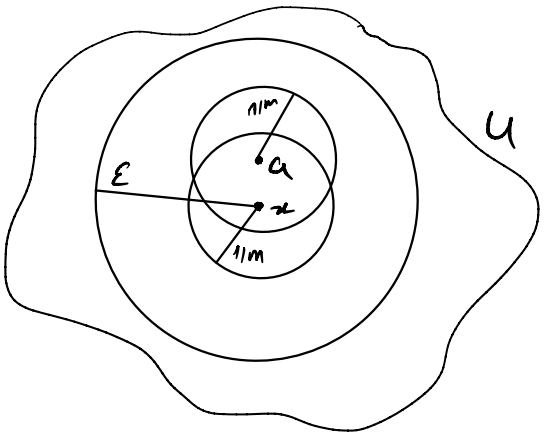
$\Rightarrow$: M сепарабилан $\Rightarrow (\exists A \subseteq M)\ \bar{A} = M$ и A пребројив

Нека је $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A, n\in\mathbb{N}\}$

$\mathcal{B}$ је очигледно пребројив. Још да покажемо да је база.

Нека је $U \in \mathcal{T}_M$ и $x \in U \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \subseteq U$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ тј. $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$



$\bar{A} = M \Rightarrow \exists a \in A \cap B(x, \frac{1}{m})$

$\Rightarrow x \in B(a, \frac{1}{m}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$

Дакле, $\mathcal{B}$ је пребројива база за M, па M задовољава II акс. пр. ▨

Дефиниција $(X, \mathcal{T})$ је метризабилан ако постоји метрика d на X тј. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$

Последица $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није метризабилан

Ако је $f: X \to Y$ непр., „на" и отворено, онда

(1) I акс. пр: $\mathcal{B}(x)$ - лок. база $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(f(x))$ лок. база

(2) II акс. пр: $\mathcal{B}_X$ база $\Rightarrow$ $f(\mathcal{B}_X)$ база

Пример I и II нису непр. инваријанте.

$$I: (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \xrightarrow{\mathbb{1}} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf}) \quad \text{непр.}$$

$\uparrow$ зад. I и II — $\uparrow$ не зад. I и II

Став: Сепарабилност је непр. инваријанта.

доказ Нека је $f: X \to Y$ непр. и „на"

Нека је $A \subseteq X$ пребројив и $\bar{A} = X$.

$$Y \underset{f \text{ „на"}}{=} f(X) = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq Y \Rightarrow \overline{f(A)} = Y$$

и $f(A)$ је пребројив $\Rightarrow$ Y је сеп. ▨

<u>Став</u> I и II акс. пр. су наследна својства.

<u>доказ</u> за вежбу. ▨

<u>Пример</u> Сепарабилност није наследна.

Нека је X непребројив и $x_0 \in X$.

$\mathcal{T}_{x_0} = \{ \{x_0\} \cup U \mid U \subseteq X \} \cup \{\emptyset\}$ - топ. уочене тачке

$(\forall V \in \mathcal{T}_{x_0})$ $V \cap \{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\{x_0\}} = X \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ је сеп.

Узмимо подскуп $A := X \setminus \{x_0\}$. Тада $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_d$, па A није сеп.

<u>Пример</u> I и II нису предуктибилна својства.

$$X := \prod_{R} (\mathbb{N}, \mathcal{T}_d) \qquad (\text{за вежбу})$$

R непребројив производ

<u>Теорема</u> Нека је $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ фамилија топ. пр. и $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Тада

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ X_n \begin{cases} \text{зад. I акс.} \\ \text{зад. II акс.} \\ \text{сеп.} \end{cases} \Rightarrow X \begin{cases} \text{зад. I акс.} \\ \text{зад. II акс.} \\ \text{сеп.} \end{cases}$$

доказ: сепарабилност:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists A_n \subseteq X_n)$ $A_n = \overline{X_n}$ и $|A_n| \leq \aleph_0$

(ΠA_n не мора бити пребројив па ово није добар избор)

фиксирамо по једну тачку у сваком A_n: $a_n \in A_n$

$\Phi := \{\varphi \subseteq \mathbb{N} \mid \varphi \text{ коначан}\} \Rightarrow \Phi$ је пребројив

За $\varphi \in \Phi$ дефинишемо:

$$Y_\varphi := \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \text{ где је } Y_n = \begin{cases} A_n, & n \in \varphi \\ \{a_n\}, & n \notin \varphi \end{cases}$$

Узмимо $A := \bigcup_{\varphi \in \Phi} Y_\varphi$.

A је пребројив и $\overline{A} = X \Rightarrow X$ је сеп.

- I и II акс. за вежбу ☒

Конвергенција низова

деф Нека је X т. пр., (x_n) низ у X и $x \in X$.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff (\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in G$$

$$\iff (\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}) \quad -\text{''}-$$

$$\iff (\forall G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{B}) \quad -\text{''}-$$

Пример (1) $(X, \mathcal{T}_a)$ $(\forall x, (x_n))$ $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

(2) $(X, \mathcal{T}_d)$ $x = \lim_{n \to \infty} x_n \iff (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n = x$

(3) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ $\quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n = x$

$$U = \left(\mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_{cc}$$

(4) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, $\qquad \mathcal{D} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\lim\limits_{n\to a} \frac{1}{n} = a$, за свако $a \leq 0$

(5) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ не постоји

<u>Став</u> $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ две топологије на X

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ у } \mathcal{T}_2 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ у } \mathcal{T}_1$$

<u>Став</u> X т. пр. и $A \subseteq X$.

(1) (x_n) низ у A и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in \overline{A}$

(2) X зад. I акс. пр. $\implies \overline{A} = \overbrace{\{x \in X \mid (\exists (x_n) \text{ у } A)\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\}}^{D}$

<u>доказ</u> (1) ✓

(2) $D \subseteq \overline{A}$: следи из (1)

$\overline{A} \subseteq D$: Нека је $x \in \overline{A}$ и $\mathcal{B}_x = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ пребројива локална база у x.

$\implies B_n \cap A \neq \emptyset$ (јер $x \in \overline{A}$)

буд. $(\forall n)\ B_n \supseteq B_{n+1}$ (можемо узети $\tilde{B}_n := \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_n$)

Нека је $x_n \in B_n$ произвољно. Тада $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$\implies x \in D$. ☒

Став Нека је $f: X \to Y$.

(1) f непр. у $x \in X \Rightarrow \left[(\forall (x_n)) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \right]$

(2) Ако X зад. I акс. пр. онда у (1) имамо еквиваленцију:

f непр. у $x \in X \iff [\dots]$

доказ вежба ▨

Аксиоме сепарације

X - т. пр.

деф X је T_0 (Колмогоровљев) простор ако

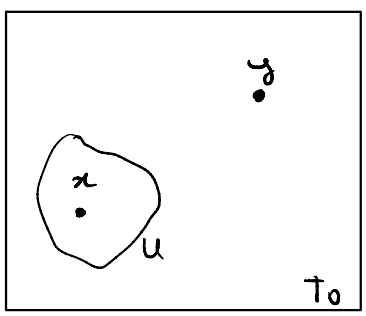
$$(\forall x,y \in X)\ x \neq y \Rightarrow \left[(\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \wedge y \notin U \right] \vee \left[(\exists U \in \mathcal{T})\ x \notin U \wedge y \in U \right]$$

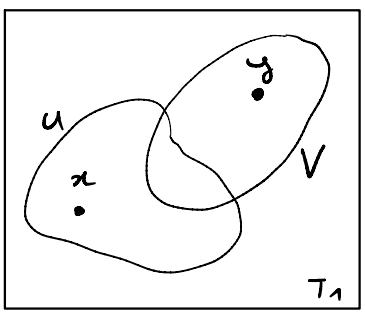
деф X је T_1 (Фрешеов) простор ако

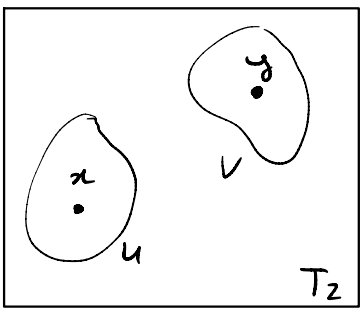
$$(\forall x,y \in X)\ x \neq y \Rightarrow (\exists U,V \in \mathcal{T})\ x \in U \setminus V \wedge y \in V \setminus U$$

деф X је T_2 (Хаусдорфов) простор ако

$$(\forall x,y \in X)\ x \neq y \Rightarrow (\exists U,V \in \mathcal{T})\ x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$$





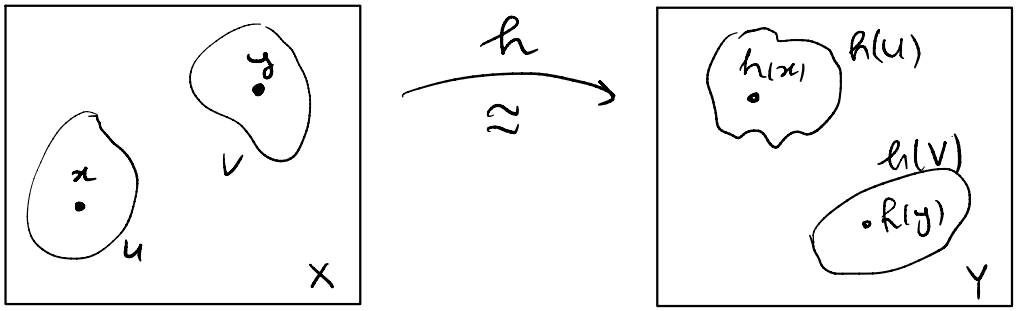


Очигледно: $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$
$\not\Leftarrow \quad \not\Leftarrow$

Пример (1) (M,d) је T_2
(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ је T_0, није T_1
(3) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\infty})$ је T_0, није T_1
(4) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ је T_1, није T_2 $\quad (U = \mathbb{R}\setminus\{y\},\ V = \mathbb{R}\setminus\{x\})$

Пример T_0, T_1, T_2 нису нетр. инв.
нпр. $(X, \mathcal{T}_d) \xrightarrow{1} (X, \mathcal{T}_a)$
T_2 ↗ ↑ није T_0

Свако T_0, T_1 и T_2 су наследна својства
Свако T_0, T_1 и T_2 су тополошке инваријанте.



Теорема: T_0, T_1 и T_2 су продуктибилна својства, али и више од тога:

$(\forall \alpha \in A)\ X_\alpha$ је $T_0/T_1/T_2 \iff X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ је $T_0/T_1/T_2$

(продуктибилност је смер $\Rightarrow$)

доказ: $\Leftarrow$: Нека X има својство $\mathcal{P}$ $(\mathcal{P} \in \{T_0, T_1, T_2\})$

Нека је $x_\alpha \in X_\alpha$ произвољно, $\forall \alpha$.

$\alpha_0 \in A$ - фикс. $\Rightarrow X_{\alpha_0} \approx \left(\prod_{\alpha \neq \alpha_0} \{x_\alpha\}\right) \times X_{\alpha_0}$ - има $\mathcal{P}$ јер је наследно

$\subseteq X$

$\Rightarrow X_{\alpha_0}$ има $\mathcal{P}$

$\Rightarrow$: Радимо само T_2 (T_0, T_1 слично.)

$(\forall \alpha \in A)$ X_α је T_2

Нека су $x, y \in X$ и $x \neq y \Rightarrow (\exists \alpha_0 \in A)$ $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$

X_{α_0} је $T_2 \Rightarrow (\exists U_{\alpha_0}, V_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\alpha_0})$ $x_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$, $y_{\alpha_0} \in V_{\alpha_0}$, $U_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_0} = \emptyset$.

Узмимо $U := p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ и $V := p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$.

Тада $x \in U$, $y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$. $\Rightarrow X$ је T_2. ▨

Став X т. пр. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) X је T_1

(2) $(\forall x \in X)$ $\{x\} \in \mathcal{F}_X$

(3) $\mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{T}_X$

доказ: (1) $\Rightarrow$ (2): $x \in X$. Доказујемо $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_X$.

Нека је $y \in X \setminus \{x\}$

(1) $\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T}_X)$ $y \in U \wedge x \notin U \Rightarrow U \subseteq X \setminus \{x\}$

$\Rightarrow X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_X \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{F}_X$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\{x\} \in \mathcal{F} \Rightarrow$ сви коначни су затворени $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{T}_X$

(3) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{T}_x$

$(\forall x \in X)$ $\{x\}^c \in \mathcal{T}_x$

Za $x \neq y$ uzmimo $U := \{y\}^c$, $V := \{x\}^c$

$\Rightarrow$ $x \in U \setminus V$, $y \in V \setminus U$ $\Rightarrow$ X je T_1. ▨

Sada X je T_2 $\Leftrightarrow$ $\Delta \in \mathcal{T}_{X \times X}$

dokaz: $\Rightarrow$: pokazujemo da je Δ^c otvoren

Neka je $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ tj. $x \neq y$

$\overset{T_2}{\Rightarrow}$ $(\exists U, V \in \mathcal{T}_x)$ $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow$ $(x,y) \in U \times V \in \mathcal{T}_{X \times X}$ i $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$

$\Rightarrow$ $(x,y) \in U \times V \subseteq \Delta^c$ $\Rightarrow$ $\Delta^c \in \mathcal{T}_{X \times X}$ $\Rightarrow$ $\Delta \in \mathcal{F}_{X \times X}$

$\Leftarrow$: $x \neq y$ $\Rightarrow$ $(x,y) \in \Delta^c \in \mathcal{T}_{X \times X}$

$\Rightarrow$ $(\exists U \times V \in \mathcal{B})$ $(x,y) \in U \times V \subseteq \Delta^c$

$\Rightarrow$ $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ $\Rightarrow$ X je T_2. ▨

Sada Ako je X T_2 $\Rightarrow$ ako postoji $\lim_{n \to \infty} x_n$, onda je jedinstven

dokaz tm. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ i $\lim_{n \to \infty} x_n = y$, $x \neq y$

$(\exists U, V \in \mathcal{T})$ $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)$ $x_n \in U$

$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)$ $x_n \in V$

$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ $\Rightarrow$ $(\forall n \geq n_0)$ $x_n \in U \cap V$ ↯ ▨

Став $f, g: X \to Y$ непр. и Y је T_2. Тада

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X.$$

доказ $f \times g: X \to Y \times Y$ је непр.

$$Y \text{ је } T_2 \iff \Delta_Y \in \mathcal{F}_{Y\times Y} \Rightarrow \underbrace{(f\times g)^{-1}(\Delta_Y)}_{A} \in \mathcal{F}_X$$ ▨

Последица $f, g: X \to Y$ непр. Y T_2 и $f|_D = g|_D$ где је $\overline{D} = X$. Тада $f \equiv g$.

доказ $D \subseteq A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X$

$\Rightarrow \overline{D} \subseteq \overline{A} \iff X \subseteq A \iff X = A$ ▨

деф X је регуларан ако

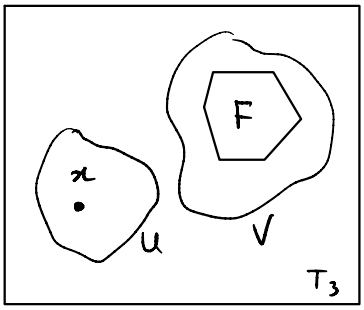
$$(\forall x \in X)(\forall F \in \mathcal{F})\ x \notin F \Rightarrow \left[(\exists U, V \in \mathcal{T})\ x \in U \wedge F \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset\right]$$

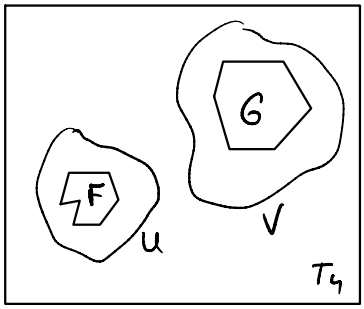
деф X је T_3 ако је регуларан и T_1.

деф X је нормалан ако

$$(\forall F, G \in \mathcal{F})\ F \cap G = \emptyset \Rightarrow \left[(\exists U, V \in \mathcal{T})\ F \subseteq U \wedge G \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset\right]$$

деф X је T_4 ако је нормалан и T_1.





Теорема $M \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ (M = метрички)

доказ $T_i \Rightarrow T_{i-1}$ по деф. Само још да покажемо $M \Rightarrow T_4$.
Сваки метрички пр. M је очигледно T_1, па још да покажемо да је нормалан.
Нека су $F, G \in \mathcal{F}_M$ и $F \cap G \neq \emptyset$. Дефинишемо пресликавање $f: M \to [0,1]$ на следећи начин:

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

f је добро дефинисано: • $f(x) \in [0,1]$ ✓
• $F \cap G = \emptyset \Rightarrow d(x,F) + d(x,G) \neq 0$

f је и непр. као композиција непр.
Приметимо: $x \in F \Rightarrow f(x) = 0$
$x \in G \Rightarrow f(x) = 1$
Нека је $U := f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ и $V := f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$.
Тада $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset \Rightarrow M$ је нормалан. ▨

Пример (1) $T_4 \not\Rightarrow M$ (Зорденфрејова права)
(2) $T_3 \not\Rightarrow T_4$ (Зорденфрејова раван $(\mathbb{R}, \mathcal{S}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{S})$)
(3) $T_2 \not\Rightarrow T_3$ (topology.pi-base.org ← контрапримери)

Став $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4.

доказ T_1: $x, y \in \mathbb{R}$, бпо. $x < y \Rightarrow x \in [x, \frac{x+y}{2})$, $y \in [y, y+1)$

нормалност: Нека су $F, G \in \mathcal{F}$ и $F \cap G = \emptyset$.

$(\forall x \in F)\ x \in G^c \in \mathcal{S} \Rightarrow (\exists [x, x') \in \mathcal{B})\ [x, x') \subseteq G^c$

$(\forall y \in G)\ y \in F^c \in \mathcal{S} \Rightarrow (\exists [y, y') \in \mathcal{B})\ [y, y') \subseteq F^c$

Нека је $U = \bigcup_{x \in F} [a, x')$ и $V = \bigcup_{y \in G} [y, y')$.

Очигледно је $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ и $U, V \in \mathcal{S}$.

Да ли је $U \cap V = \emptyset$? Тј. постоји $a \in U \cap V$

$\Rightarrow (\exists x \in F, y \in G)\ a \in [a, x') \cap [y, y')$

Због $x < y \Rightarrow y \in [x, x') \subseteq G^c$ ↯

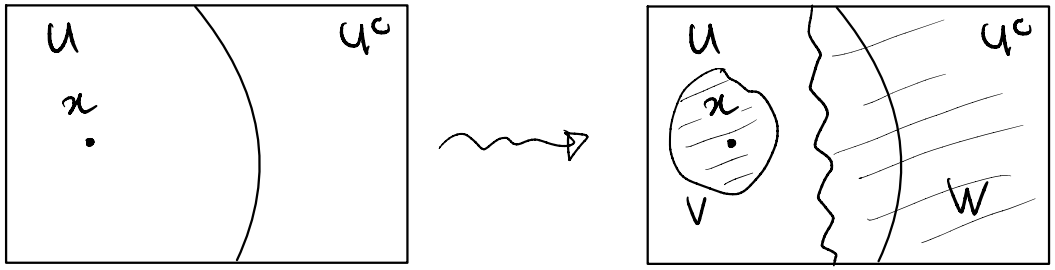
$\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4. ▨

Став X је регуларан акко

$$(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{T})\ x \in U \Rightarrow [(\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U]$$

доказ: $\Rightarrow$: Нека је $x \in X$ и $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$

$\Rightarrow x \notin U^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (\exists V, W \in \mathcal{T})\ x \in V,\ U^c \subseteq W,\ V \cap W = \emptyset$



$V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subseteq W^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{V} \subseteq W^c$

$\Rightarrow x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W^c \subseteq U$

$\Leftarrow$: Нека је $x \in X$, $F \in \mathcal{F}$, $x \notin F$. Тада $x \in F^c \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$

Узмимо $U := \overline{V}^c \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow x \in V,\ F \subseteq U,\ U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ је регуларан. ▨

Став X је нормалан акко

$$(\forall F \in \mathcal{F})(\forall U \in \mathcal{T})\ F \subseteq U \Rightarrow [(\exists V \in \mathcal{T})\ F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U]$$

доказ: за вежбу. ▨

Став Нормалност, регуларност, T_3 и T_4 су топ. инваријанте.

доказ: за вежбу. ☐

Пример Нормалност, регуларност, T_3 и T_4 нису непр. инв.

$$1\!\!1 : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_a)$$

$\mathcal{T}_d$: T_3, T_4 — $\mathcal{T}_a$: није ни T_0

Став Регуларност и T_3 су наследна својства.

доказ X регуларан, $A \subseteq X$

$$x \in A,\ F \in \mathcal{T}_A,\ x \notin F \Rightarrow (\exists G \in \mathcal{T}_X)\ F = G \cap A$$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ x \in U,\ G \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset$$

Узмимо: $U_A := U \cap A,\ V_A := V \cap A \in \mathcal{T}_A$

$$\Rightarrow x \in U_A,\ F \subseteq V_A,\ U_A \cap V_A = \emptyset.$$ ☐

Пример Нормалност није наследна.

$X = \{a, b, c, d\}$ $\quad \mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$

$A = \{b, c, d\}$ $\quad \mathcal{T}_A = \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$

X је нормалан (нема дисјунктних затворених скупова)

A није ($\{b\}, \{c\} \in \mathcal{T}_A$ и не можемо их раздвојити)

Став Нормалност је слабо наследна.

доказ за вежбу. ☐

Теорема Регуларност и T_3 су продуктибилна својства, али и више од тога:

$$(\forall \alpha \in A)\ X_\alpha \text{ рег./}T_3 \iff X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ рег./}T_3$$

доказ T_1 ✓

регуларност: $\Rightarrow$: X_α регуларан, $\alpha \in A$

Нека је $x \in X$ и $x \in U \in \mathcal{T}$. Тражимо $V \in \mathcal{T}$ тј. $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B})\ x \in B \subseteq U$,

$B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha = X_\alpha$ за $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

За $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i} \Rightarrow (\exists V_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i})\ x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i} \subseteq \overline{V}_{\alpha_i} \subseteq U_{\alpha_i}$

Нека је $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha = \begin{cases} V_{\alpha_i}, & \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha, & \alpha \notin \{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \end{cases}$

Тада $x \in V \subseteq \overline{V} = \overline{\prod_{\alpha \in A} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in A} U_\alpha = B \subseteq U \Rightarrow X$ је рег.

$\Leftarrow$: Нека је $\alpha_0 \in A$ произвољно. X_{α_0} је потпростор од X и регуларност је наследна $\Rightarrow X_{\alpha_0}$ је регуларан. ▨

Теорема [Јонсонова лема] Нека је X беск. пр. тј. Ако постоји скуп $D \subseteq X$ и дискретан $S \in \mathcal{F}_X$ тј.

$$|\mathcal{P}(D)| \leq |S|$$

онда X није нормалан.

доказ вежба ▨

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан

$$S := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\},\quad D := \mathbb{Q}^2$$

Тада: $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$, $S \in \mathcal{F}$,

$$|S| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(D)|$$

Уоне $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}, S)^2$ није нормалан.

Наследна Нормалност и T_4 нису продуктибилна својства.

деф X је потпуно регуларан ако

$$(\forall x \in X)(\forall F \in \mathcal{F}_x \setminus \{\phi\})\ x \notin F \Rightarrow \left[(\exists f : X \to [0,1] \text{ непр.})\ f(x) = 0,\ f(F) = \{1\}\right]$$

деф X је $T_{3\frac{1}{2}}$ (Тихоновљев) ако је потпуно регуларан и T_1.

Став $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$

доказ Нека је $x \in X$, $F \in \mathcal{F}_x$, $x \notin F$.

$\Rightarrow \exists f : X \to [0,1]$ непр., $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$.

Узмимо $U := f^{-1}\left([0, \frac{1}{3})\right)$, $V := f^{-1}\left((\frac{2}{3}, 1]\right) \in \mathcal{T}_X$

Тада $x \in U$, $F \subseteq V$, $U \cap V = \phi \Rightarrow X$ је T_3. ▨

Став Потпуно рег. и $T_{3\frac{1}{2}}$ су продуктибилна и наследна својства

доказ Вежба ▨

Пример Потпуно рег. и $T_{3\frac{1}{2}}$ нису непр. инваријанте

$$\mathbb{1} : (X, \mathcal{T}_d) \to (X, \mathcal{T}_a)$$

$T_{3\frac{1}{2}}$ — није $T_{3\frac{1}{2}}$

Пример $(\mathbb{R}, S)^2$ је $T_{3\frac{1}{2}}$, није T_4.

Урисонова лема

Теорема [Урисонова лема] Тополошки простор X је нормалан акко

$$(\forall A,B\in\mathcal{F}_X)\ A\cap B=\phi \Rightarrow \left[(\exists f: X\to[0,1] \text{ непр.})\ f(A)=\{0\},\ f(B)=\{1\}\right]$$

доказ: $\Leftarrow$: Узмемо $U:=f^{-1}([0,\frac{1}{3}))$, $V:=f^{-1}((\frac{2}{3},1])$ и имамо

$A\subseteq U$, $B\subseteq V$, $U\cap V=\phi \Rightarrow X$ је нормалан.

$\Rightarrow$: Нека су $A,B\in\mathcal{F}_X$, $A\cap B=\phi$

(1) $A\subseteq B^c\in\mathcal{T} \Rightarrow (\exists U_0\in\mathcal{T})\quad A\subseteq U_0\subseteq \overline{U_0}\subseteq B^c$

(2) $\overline{U_0}\in B^c\in\mathcal{T} \Rightarrow (\exists U_{1/2}\in\mathcal{T})\quad \overline{U_0}\subseteq U_{\frac{1}{2}}\subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}}\subseteq B^c$

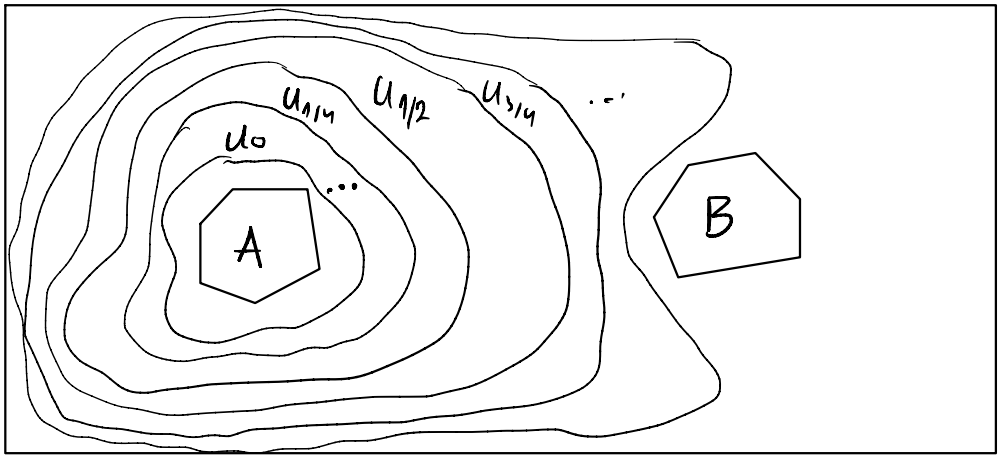
(3) $(\exists U_{1/4}, U_{3/4}\in\mathcal{T})\quad \overline{U_0}\subseteq U_{1/4}\subseteq \overline{U_{1/4}}\subseteq U_{1/2}$

$\overline{U_{1/2}}\subseteq U_{3/4}\subseteq \overline{U_{3/4}}\subseteq B^c$

$\vdots$

Добијамо растућу фамилију отворених скупова

$$\{U_{k/2^i} \mid i\in\mathbb{N},\ 1\le k<2^i\}$$



Уочимо пресликавање $f: X\to[0,1]$ дато са

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{r \mid x\in U_r\}, & x\in B^c\\ 1, & x\in B\end{cases}$$

Очигледно је $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$.

f непр: Нека је $x \in X$ произвољно.

- Нека је $f(x) \in (0,1)$ и $\varepsilon > 0$ тј. $f(x) - \varepsilon > 0$ и $f(x) + \varepsilon < 1$.

Нека су $r_1, r_2 \in [0,1]$ (облика $\frac{k}{2^i}$) тј.

$$f(x) - \varepsilon < r_1 < f(x) < r_2 < f(x) + \varepsilon$$

$\Rightarrow V = U_{r_2} \setminus \overline{U}_{r_1}$ је отворена околина од x тј.

$$(\forall v \in V) \quad r_1 \leq f(v) \leq r_2$$

$\Rightarrow f$ је непр. у x.

Слично се доказује непр. и у x тј. $f(x) \in \{0,1\}$. ▨

Тицеова теорема о екстензији

Ако је $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ непр. да ли постоји непрекидно проширење $F: X \to Y$ тј. $F|_A = f$?

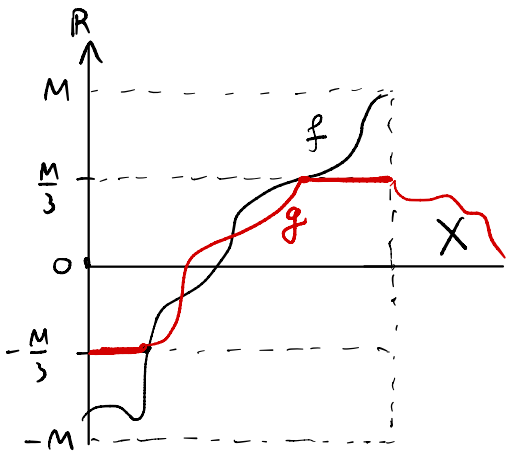
Лема Нека је X нормалан, $C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\phi\}$, $M > 0$ и $f: C \to [-M, M]$ непр. Тада постоји $g: X \to [-\frac{M}{3}, \frac{M}{3}]$ непр. тј.

$$(\forall x \in C) \quad |f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3} M$$

доказ: Уочимо скупове

$$A = f^{-1}([-M, -\tfrac{M}{3}]) \in \mathcal{F}_X$$

$$B = f^{-1}([\tfrac{M}{3}, M]) \in \mathcal{F}_X$$



1° $A, B \neq \phi$: Очигледно $A \cap B = \phi$

Урисон $\Rightarrow \exists g: X \to [-\frac{M}{3}, \frac{M}{3}]$ непр. тј. $f(A) = \{-\frac{M}{3}\}$, $f(B) = \{\frac{M}{3}\}$

$x \in A \Rightarrow \quad f(x) - g(x) = f(x) + \frac{M}{3} \in \left[-\frac{2}{3}M, 0\right] \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$

$x \in B \Rightarrow \quad f(x) - g(x) = f(x) - \frac{M}{3} \in \left[0, \frac{2}{3}M\right] \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}M$

$x \in C \setminus (A \cup B) \Rightarrow \quad |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \frac{2}{3}M$

2° $A = \emptyset, \ B \neq \emptyset$: $g(x) = \frac{M}{3}$

3° $A \neq \emptyset, \ B = \emptyset$: $g(x) = -\frac{M}{3}$

4° $A, B = \emptyset$, $g(x) = 0$ (може било шта) ▨

Теорема [Тицеова т. о екстензији] X је нормалан акко

$(\forall C \in \mathcal{F}x \setminus \{\emptyset\})(\forall f : C \to [-1,1]$ непр. $)(\exists F : X \to [-1,1]$ непр. $) \ F|_C = f.$

доказ $\Leftarrow$: Нека су $A, B \in \mathcal{F}x$, $A \cap B = \emptyset$ и нека је $f : A \cup B \to [-1,1]$

$$f(A) = \{-1\}, \quad f(B) = \{1\}$$

f је непр. по леми о продужењу $\Rightarrow \exists F : X \to [-1,1]$ непр.

$F|_{A \cup B} = f$, тј. $F(A) = \{-1\}, \ F(B) = \{1\}$

$\xRightarrow{\text{услови}}$ X је нормалан.

$\Rightarrow$: Нека је X нормалан, $C \in \mathcal{F}x \setminus \{\emptyset\}$, $f : C \to [-1,1]$ непр.

$\xRightarrow{\text{лема}} \exists g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ непр. тј. $(\forall x \in C) \ |f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow f - g_1 : C \to \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ непр.

$\xRightarrow{\text{лема}} \exists g_2 : X \to \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$ непр. тј. $(\forall x \in C) \ \left|(f - g_1)(x) - g_2(x)\right| \leq \frac{4}{9}$

$\Rightarrow f - g_1 - g_2 : C \to \left[-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right]$ непр.

$\vdots$

$(\forall n \in \mathbb{N})\ \exists g_n : X \to \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$ непр.

тј. $\left|\left(f - \sum_{i=1}^{n} g_i\right)(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ за $x \in C$.

Дефинишимо $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$.

Како је $|g_i(x)| \leq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \overset{(*)}{=} 1 < \infty$,

то $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ равномерно конвергира на основу Вајерштрасовог критеријума.

$\Rightarrow$ F је добро деф. и непр.

$|F(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |g_i(x)| \overset{(*)}{\leq} 1 \Rightarrow F : X \to [-1,1]$

Коначно, за $x \in C$:

$|F(x) - f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x) - f(x)\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\Rightarrow F|_C = f$. ☒

Напомена: У претходној теореми уместо $[-1,1]$ коначан је могао да буде било који интервал (отворен или затворен). Заиста, ако је X нормалан, $C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$, $f : C \to (-1,1) \hookrightarrow [-1,1] \overset{\text{Тиц}}{\Rightarrow} \exists F : X \to [-1,1]$ непр., $F|_C = f$

1° $F^{-1}(\{-1,1\}) = \emptyset \Rightarrow$ смањимо кодомен $F: X \to (-1,1)$ и

2° $\underbrace{F^{-1}(\{-1,1\})}_{\| \; A} \neq \emptyset \Rightarrow A, C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}, \; A \cap C = \emptyset$

услови $\Rightarrow (\exists \varphi: X \xrightarrow{\text{непр.}} [0,1]) \quad \varphi(A) = \{0\}, \; \varphi(C) = \{1\}.$

Нека је $\tilde{F}(x) := F(x) \cdot \varphi(x)$. Тада $\tilde{F}: X \xrightarrow{\text{непр}} (-1,1)$ и $\tilde{F}|_C = f$.

(уместо $(-1,1)$ могли смо узети било који интервал (a,b))

Компактност

деф Топ. пр. X је компактан ако сваки отворен покривач од X има коначан потпокривач.

тј. $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A) \; X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

(сви U_α су отворени)

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ није компактан: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није компактан

(3) X коначан $\Rightarrow X$ је компактан

(4) $(X, \mathcal{T}_{cf})$ је компактан

(5) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ није компактан

деф Фамилија скупова $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ је центрирана ако

$(\forall I \subseteq A)$ I коначан $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$

(свака коначна подфамилија има непразан пресек)

Став X је компактан ако свака центрирана фамилија затворених скупова има непразан пресек.

доказ: Нека је X компактан, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ центрирана фамилија, $F_\alpha \in \mathcal{F}X$, $\alpha\in\mathcal{A}$.

тј. $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha = \phi \;/^c \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha^c = X \xrightarrow{X \text{ компактан}} (\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n)\ X = \bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \;/^c$

(F_α^c отворен)

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}^c = \phi$ ↯ (јер је фамилија центрирана)

$\Leftarrow$: слично (за вежбу). ▨

деф Нека је X топ. п. и $A\subseteq X$. A је компактан у X ако сваки отворен покривач од A има коначан подпокривач, тј. $A\subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathcal{A})\ A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ (где је $U_\alpha\in\mathcal{T}X$, $\alpha\in\mathcal{A}$).

Став A је компактан у X акко је $(A,\mathcal{T}_A)$ компактан.

доказ за вежбу. ▨

Став Компактност је непрекидна инваријанта.

доказ $f: X\to Y$ непр. и „на" и X компактан.

Нека је $Y = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$, $V_\alpha\in\mathcal{T}_Y$, $\alpha\in\mathcal{A}$.

Тада $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\in\mathcal{T}X} \xrightarrow{X \text{ комп.}} (\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathcal{A})\ X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$

$\Rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \Rightarrow Y$ је компактан. ▨

деф $\mathcal{K}X$ је фамилија свих компактних скупова у X.

Став X компактан $\Rightarrow \mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

доказ: Нека је $A \in \mathcal{F}_X$ и $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$

$$X = A \cup A^c \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \cup \underbrace{A^c}_{\in \mathcal{T}_X} \Rightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{A})\ X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cup A^c$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow A \in \mathcal{K}_X. \quad \blacksquare$$

Став X хаусдорфов $\Rightarrow \mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$.

доказ Нека је $A \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$. Показујемо $A^c \in \mathcal{T}_X$.

Нека је $x \in A^c$.

$$(\forall a \in A)\ x \neq a \overset{X\ T_2}{\Longrightarrow} (\exists U_a, V_a \in \mathcal{T}_X)\ x \in U_a,\ a \in V_a,\ U_a \cap V_a = \emptyset.$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a \overset{A \text{ комп.}}{\Longrightarrow} (\exists a_1, \dots, a_n \in A)\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

Нека је $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i} \in \mathcal{T}_X$. Тада $x \in U$ и $U \subseteq A^c$.

Заиста, нпр. $\exists y \in U \cap A$

$$y \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n\})\ y \in V_{a_j} \Rightarrow y \in U_{a_j} \cap V_{a_j} = \emptyset \lightning$$

$$y \in U \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\})\ y \in U_{a_i}$$

Дакле, $x \in U \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}_X \Rightarrow A \in \mathcal{F}_X$. $\blacksquare$

Последица X компактан и $T_2 \Rightarrow \mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

Лема: Ако је X T_2, онда

$$(\forall K, L \in \mathcal{K}_X)\ K \cap L = \emptyset \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ K \subseteq U,\ L \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset.$$

доказ за вежбу. $\blacksquare$

Теорема X компактан и $T_2 \Rightarrow X$ је T_4.

доказ X је T_1 ✓

нормалност: $A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B \neq \emptyset$

X комп. и $T_2 \Rightarrow \mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X \Rightarrow A, B \in \mathcal{K}_X$

$\overset{\text{лема}}{\Rightarrow} (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ A \subseteq U,\ B \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset \Rightarrow X$ је нормалан. ☒

Став $f: X \to Y$ непр., X компактан, Y $T_2 \Rightarrow f$ је затворено.

доказ $F \in \mathcal{F}_X \overset{X \text{ комп.}}{\Longrightarrow} F \in \mathcal{K}_X \Rightarrow f(F) \in \mathcal{K}_Y \overset{YT_2}{\Longrightarrow} f(F) \in \mathcal{F}_Y$. ☒

Последица: $f: X \to Y$ непр., X компактан, Y T_2.

(1) f бијекција $\Rightarrow f$ је хомеоморфизам

(2) f инјекција $\Rightarrow f$ је утапање

Став $X \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан акко је затворен и ограничен.

деф X је секвенцијално компактан ако сваки отворени низ има конвергентан подниз.

Коментар: секв. комп. $\not\Longleftrightarrow \not\Longrightarrow$ комп.

Став (M, d) метрички простор $\Rightarrow X$ је секв. комп. акко је комп.

Пример Компактност није наследна својство:

$[0,1] \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, $(0,1) \notin \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$

Локално компактност

деф X је локално компактан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{K}_x) \quad H \subseteq G$$

Став Нека је X Хаусдорфов.

(1) X је лок. комп. $\iff$ $(\forall x \in X)(\exists G \in \mathcal{O}(x))\ G \in \mathcal{K}_x$.

(2) X компактан $\Rightarrow$ X лок. компактан

доказ (1) $\Rightarrow$: $\checkmark$

$\Leftarrow$: Нека је $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ произвољно. Нека је још $H \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{K}_x$.

$\Rightarrow H \cap G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T}_X)\ x \in V \subseteq H \cap G$

H је T_2 и компактан $\Rightarrow$ H је нормалан $\Rightarrow$ H је регуларан

$\Rightarrow (\exists W \in \mathcal{T}_X)\quad x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$

$\overline{W} \in \mathcal{F}_H \Rightarrow \overline{W} \in \mathcal{K}_H \Rightarrow \overline{W} \in \mathcal{K}_X$.

(2) у (1) узмемо $G := X \in \mathcal{K}_X \Rightarrow X$ је лок. комп. ▨

Пример лок. комп. $\not\Rightarrow$ комп.

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ је лок. комп., а није комп.

Пример $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ нису лок. комп.

Пример Лок. комп. није непр. инвар.

$$1\!\!1 : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \quad \text{непр.}$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ лок. комп. ; $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није лок. комп.

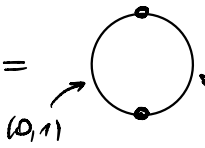
Компактификација

X т.пр., желимо да конструишемо компактан Y тј. тако да постоји $i: X \hookrightarrow Y$ и $\overline{i(X)} = Y$

Пример

$X = (0,1) \cup (2,3)$

$Y_1 = [0,1] \cup [2,3]$

$Y_2 = S^1 =$ 

(додали смо 2 тачке)

$Y_3 =$ 

(додали смо 1 тачку)

Y_1, Y_2, Y_3 су компактни.

деф За т.пр. X дефинишемо $X^* = X \cup \{w\}$, $w \notin X$ (додајемо нову тачку w у X) и

$$\mathcal{T}_{X^*} = \mathcal{T}_X \cup \{ U \cup \{w\} \mid \underbrace{U \in \mathcal{T}_X \wedge X \setminus U \in \mathcal{K}_X}_{\text{(*)}} \}$$

Став $(X^*, \mathcal{T}_{X^*})$ је топ. пр.

доказ (1) $\emptyset \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*}$

$X^* = X \cup \{w\} \in \mathcal{T}_{X^*}$ јер $\underbrace{X \in \mathcal{T}_X}_{\text{(*)}}$ и $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{K}_X$

(2) $U, V \in \mathcal{T}_{X^*}$

1° $U, V \in \mathcal{T}_X \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*}$

2° $U \in \mathcal{T}_X$, $V \in \mathcal{T}_{X^*} \setminus \mathcal{T}_X$ тј. $V = V' \cup \{w\}$, $V' \in \mathcal{T}_X$, $X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$

$U \cap V = U \cap (V' \cup \{w\}) = U \cap V' \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*}$

3° $U, V \in \mathcal{T}_{X^*} \setminus \mathcal{T}_X$ тј. $U = U' \cup \{w\}$, $V = V' \cup \{w\}$, $U', V' \in \mathcal{T}_X$, $X \setminus U', X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$

$U \cap V = (U' \cup \{w\}) \cap (V' \cup \{w\}) = (U' \cap V') \cup \{w\}$

$U' \cap V' \in \mathcal{T}_X$ ✓

$X \setminus (U' \cap V') = X \cap (U' \cap V')^c = X \cap ((U')^c \cup (V')^c) = (X \setminus U') \cup (X \setminus V')$

$X \setminus U',\ X \setminus V' \in \mathcal{K}_X \Rightarrow X \setminus (U' \cap V') \in \mathcal{K}_X \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{X^*}$

(3) $U_\alpha \in \mathcal{T}_{X^*},\ \alpha \in \mathcal{A}$

1° $(\forall \alpha \in \mathcal{A})\ U_\alpha \in \mathcal{T}_X \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*}$

2° $\mathcal{A} = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C},\ \mathcal{C} \neq \emptyset$

$(\forall \beta \in \mathcal{B})\ U_\beta \in \mathcal{T}_X,\quad (\forall \gamma \in \mathcal{C})(\exists U'_\gamma \in \mathcal{T}_X)\ U_\gamma = U'_\gamma \cup \{w\},\ X \setminus U'_\gamma \in \mathcal{K}_X$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} U_\beta \cup \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}} U'_\gamma}_{\| \; U} \cup \{w\}$$

$U \in \mathcal{T}_X$ ✓, $\quad X \setminus U = X \cap U^c = \underbrace{\underbrace{\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} (X \setminus U_\beta)}_{\in \mathcal{F}_X} \cap \underbrace{\bigcap_{\gamma \in \mathcal{C}} (X \setminus U'_\gamma)}_{\text{конч.}}}_{\text{затворен подскуп компактног} \Rightarrow \text{комп.}} \in \mathcal{K}_X$

∎

<u>Став</u> $(X^*, \mathcal{T}_{X^*})$ је компактан.

<u>доказ</u> Нека је $\mathcal{U}$ отворен покривач од X^*, тј. $X^* = \bigcup \mathcal{U}$. Тада постоји $U \in \mathcal{U}$ тј. $w \in U$, тј. $U = U' \cup \{w\},\ U' \in \mathcal{T}_X,\ X \setminus U' \in \mathcal{K}_X$.

фамилија $\mathcal{U}$ покрива и $X \setminus U' \in \mathcal{K}_X$, па постоји коначна потфамилија $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ тј. $X \setminus U' \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

Тада $X^* = U' \cup (X \setminus U') = U' \cup (\bigcup \mathcal{V})$ – коначан потпокривач.

$\Rightarrow X^*$ је компактан. ∎

Став (1) X је отворен потпростор у X^*.

(2) $\overline{X} = X^* \iff X$ није компактан.

доказ (1) $X \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*}$. Још да покажемо да је потпростор, тј. да је $\mathcal{T}_X = (\mathcal{T}_{X^*})_X$

$\subseteq$: $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*} \Rightarrow \mathcal{T}_X = (\mathcal{T}_X)_X \subseteq (\mathcal{T}_{X^*})_X$

$\supseteq$: $\underbrace{(V \cup \{\omega\}) \cap X}_{\| \; V} \in (\mathcal{T}_{X^*})_X \Rightarrow (V \cup \{\omega\}) \cap X \in \mathcal{T}_X$

(2) $\overline{X} = X^* \iff X \notin \mathcal{F}_{X^*} \iff \underbrace{\{\omega\}}_{\emptyset \cup \{\omega\}} \notin \mathcal{T}_{X^*} \iff X \setminus \emptyset = X \notin \mathcal{K}_X$ ☒

деф. $(X^*, \mathcal{T}_{X^*})$ је Александровљева компактификација простора X (или компактификација једном тачком).

Став X^* је $T_2 \iff X$ је T_2 и локално компактан.

доказ: $\Rightarrow$: T_2 је наследно па је X T_2

лок. комп.: Нека је $x \in X$ произвољно. Довољно је да покажемо да постоји комп. околина од x.

$x \neq \omega$ и X^* је $T_2 \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ x \in U,\ \omega \in V \cup \{\omega\},\ U \cap V = \emptyset,$
$X \setminus V \in \mathcal{K}_X$

$x \in U \subseteq X \setminus V \Rightarrow X \setminus V \in \mathcal{K}_X \cap \mathcal{O}(x)$.

$\Leftarrow$: Нека су $x, y \in X^*$, $x \neq y$

1° $x, y \in X \overset{XT_2}{\Rightarrow} (\exists U, V \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{X^*})\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$

2° $x \in X$, $y = \omega$ и нека је $K \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{K}_X$.

$K \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T}_X)\ x \in U \subseteq K$

X T_2, $K \in \mathcal{K}_X \Rightarrow K \in \mathcal{F}_X \Rightarrow V := (X \setminus K) \cup \{\omega\} \in \mathcal{T}_{X^*}$

$\Rightarrow x \in U,\ w \in V,\ U \cap V = \emptyset,\ U, V \in \mathcal{T}_{X^*}$.

$\Rightarrow X^*$ је T_2. ▨

Став X T_2 и лок. комп. $\Rightarrow X$ је $T_{3\frac{1}{2}}$

доказ X T_2 и лок. комп. $\Rightarrow X^*$ је T_2

X^* је T_2 и компактан $\Rightarrow X^*$ је $T_4 \Rightarrow X^*$ је $T_{3\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow X$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ (јер је $T_{3\frac{1}{2}}$ наследно својство) ▨

Став $X \approx Y \Rightarrow X^* \approx Y^*$

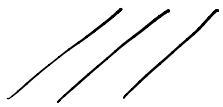
доказ (скица): $h: X \approx Y$, $h^*(x) = \begin{cases} h(x), & x \in X \\ w_Y, & x = w_X \end{cases}$ ▨

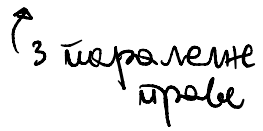
Став X компактан и $T_2 \Rightarrow (\forall x_0 \in X)\ (X \setminus \{x_0\})^* \approx X$

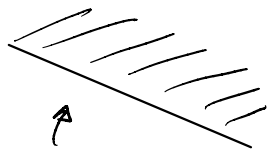
доказ за вежбу. ▨

Пример (1) $(\mathbb{R}^n)^* \approx S^n$

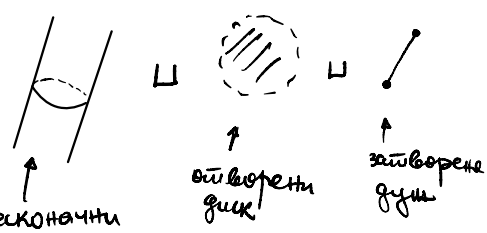
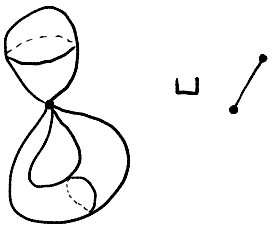
$\mathbb{R}^n \approx S^n \setminus *$ $\Rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \approx (S^n \setminus *)^* \approx S^n$

(2) $X =$  $\Rightarrow X^* =$ 



(3) $X =$  $\Rightarrow X^* =$  $= D^2$



(4) $X =$  $\Rightarrow X^* =$ 

Теорема Тихонова

<u>логика</u>: X скуп, ρ релација поретка на X (P, AC, T)
$\Rightarrow (X, \rho)$ је парцијално уређен скуп.
L је ланац у X ако је линеарно уређен, тј. $(\forall x, y \in L)\, x\rho y \vee y\rho x$

<u>Цорнова лема</u>: Ако сваки ланац у (X, ρ) има горње ограничење, онда у X постоји максимални елемент.
($x \in X$ је макс. ако $(\forall y \in X)\, y\rho x$)

<u>Лема</u> Нека је X топ. пр. Ако постоји предбаза $\mathcal{S}$ од X тј. сваки покривач $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ од X има коначан поппокривач, онда је X компактан.

<u>доказ</u> ппс. да X није компактан и нека је $\mathcal{P}_X$ фамилија свих отворених покривача од X који немају коначан поппокривач. $\{X\} \in \mathcal{P}_X \Rightarrow \mathcal{P}_X \neq \emptyset$. На $\mathcal{P}_X$ дефинишемо релацију $\leq$:

$$(\forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{P}_X)\left(\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{U})\, U \in \mathcal{V}\right)$$

$(\mathcal{P}_X, \leq)$ је парцијално уређен скуп на који желимо да применимо Цорнову лему.
Нека је L ланац у $\mathcal{P}_X$, тј. $L = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{P}_X$.
Тада је $\mathcal{U} := \bigcup L = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{P}_X$ и $\mathcal{U}$ је горње ограничење за L, тј. $(\forall \alpha \in A)\, \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$.
$\overset{\text{Цорн}}{\Longrightarrow}$ постоји максимални ел. $\mathcal{V}$ у $\mathcal{P}_X$.

Другим речима, $(\forall U \in \mathcal{T}_X \setminus \mathcal{V})\ \{U\} \cup \mathcal{V} \notin \mathcal{P}_X$, тј. $\{U\} \cup \mathcal{V}$ нема коначан потпокривач.

Нека је $\mathcal{W} = \mathcal{T}_X \setminus \mathcal{V}$. Тада $\mathcal{W} \neq \emptyset$ јер $X \in \mathcal{W}$.

Приметимо да важи:

$$U_1, U_2 \in \mathcal{W} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{W} \quad (\bigstar)$$

Заиста, $U_i \in \mathcal{W} \Rightarrow \{U_i\} \cup \mathcal{V}$ нема коначан потпокривач $U_i \Rightarrow \{U_1 \cap U_2\} \cup U_1 \cup U_2$ је кон. потпокривач од $\{U_1 \cap U_2\} \cup \mathcal{V}$ $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{W}$.

Такође, $U \in \mathcal{W}$, $U \subseteq U' \in \mathcal{T}_X \Rightarrow U' \in \mathcal{W}$. $(\bigstar\bigstar)$

Нека је сада $\mathcal{S}$ произвољна предбаза од X и $\mathcal{U}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$. Приметимо да је $\mathcal{U}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{P}_X$. Заиста, ако је $x \in X$ произвољно $(\exists V_x \in \mathcal{V})(\exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S})\ x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq V_x$.

Ако $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{W} \overset{(\bigstar)}{\Rightarrow} S_1 \cap \dots \cap S_n \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{V}$ нема кон. потп. што је немогуће, па $(\exists i)\ S_i \notin \mathcal{W} \Rightarrow S_i \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{P}_X$.

$\Rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ нема коначан потпокривач и пошто је $\mathcal{S}$ била произвољна база, добијамо контрадикцију са претпоставком.

$\Rightarrow X$ је компактан. ▨

<u>Теорема</u> [Тихонов] Нека је $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ фамилија топ. пр. $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ је компактан $\Leftrightarrow (\forall \alpha \in A)\ X_\alpha$ је компактан (тј. компактност је пропуктибилно својство).

<u>доказ</u> $\Rightarrow$: p_α је непр., $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ компактан

$$\Rightarrow p_\alpha\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right) = X_\alpha \text{ је компактан}$$

$\Leftarrow$: Нека је X_α комп. за свако $\alpha \in A$. Имамо предбазу $\mathcal{S} = \{ p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A, U_\alpha \in X_\alpha \}$ и нека је $\mathcal{U}$ произвољан покривач од X елементима из $\mathcal{S}$, тј.

$$\mathcal{U} = \{ p_\alpha^{-1}(U_{\alpha,\beta}) \mid \alpha \in A_0 \subseteq A, \beta \in J_\alpha \}$$

и $X = \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A_0} \bigcup_{\beta \in J_\alpha} p_\alpha^{-1}(U_{\alpha,\beta})$.

Тврдимо да постоји $\alpha \in A_0$ тј. $\bigcup_{\beta \in J_\alpha} U_{\alpha,\beta} = X_\alpha$.

тј. $(\forall \alpha \in A_0)\ \exists x_\alpha \in X_\alpha \setminus \left(\bigcup_{\beta \in J_\alpha} U_{\alpha,\beta} \right)$

и нека је $x_\alpha \in X_\alpha$ произвољно за $\alpha \in A \setminus A_0$.

Тада $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \notin \bigcup \mathcal{U} = X$ ↯

Нека је $\alpha_0 \in A_0$ тј. $\bigcup_{\beta \in J_{\alpha_0}} U_{\alpha_0,\beta} = X_{\alpha_0}$.

X_{α_0} је компактан $\Rightarrow \left(\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in J_{\alpha_0} \right) X_{\alpha_0} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_0,\beta_i}$

$\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} p_{\alpha_0}^{-1}\left(U_{\alpha_0,\beta_i} \right) \Rightarrow \mathcal{U}$ има коначан потпокр.

$\overset{\text{лема}}{\Longrightarrow} X$ је компактан. ▨

Хилбертов куб

деф Куб (коцка) Тихонова је $I^{\mathbb{N}}$ са тих. Тихонова ($I = [0,1]$)

деф. $\ell^2 = \{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 < \infty \}$

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}, \quad d(x,y) := \|x - y\|$$

$\Rightarrow (\ell^2, d)$ је метрички простор.

деф $Q = \{x \in l^2 \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ је Хилбертов куб (Кауко)

Став $I^{\mathbb{N}} \approx Q$

Последица 1: $I^{\mathbb{N}}$ је метризабилан.

Последица 2: Q је компактан.

Урисонова теорема о метризабилности

Лема Нека је X Хаусдорфов и $f_i : X \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$, низ непр. функција тд.

$$\left[(\forall x \in X)(\forall C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\})\ x \notin C \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ f_i(x) = 0,\ f_i(C) = \{1\}\right] \quad (*)$$

Тада је $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ деф. са $f(x) = (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ утапање.

доказ: **f је „1-1"**: Нека је $x, y \in X$, $x \neq y$

$x \notin \{y\} \in \mathcal{F}_X \overset{(*)}{\Rightarrow} (\exists i \in \mathbb{N})\ f_i(x) = 0,\ f_i(y) = 1 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

f непр. W деф је свако f_i непр.

f затворено: Нека је $C \in \mathcal{F}_X$ и $f(x) \in \overline{f(C)}$.

$\Rightarrow$ постоји низ (C_n) у C тд. $\lim_{n\to\infty} f(C_n) = f(x)$.

Тврдимо $x \in C$. Прс. $x \notin C \overset{(*)}{\Rightarrow} (\exists i \in \mathbb{N})\ f_i(x) = 0,\ f_i(C) = \{1\}$

$\Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} f_i(C_n) = f_i(x) = 0$ ↯

$\Rightarrow x \in C \Rightarrow f(x) \in f(C) \Rightarrow f(C) = \overline{f(C)} \Rightarrow f(C) \in \mathcal{F}$.

Дакле, $f : X \to f(X)$ је непр., бијк. и затворено

$\Rightarrow f$ је хомео. $\Rightarrow f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ је утапање. ▨

дефиниција X је Линделефов ако сваки његов отворен покривач има пребројив потпокривач.

Став X задовољава II аксиому пребр. $\Rightarrow$ X је Линделефов.

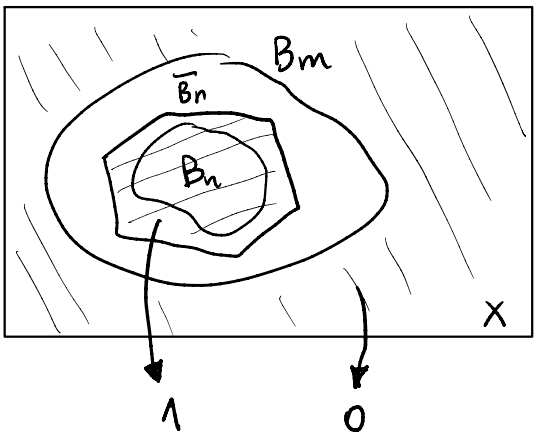
Став X регуларан и Линделефов $\Rightarrow$ X је нормалан.

Теорема [Урисон о метризабилности]
Ако је X T_3 и задовољава II акс. пр., онда је он метризабилан.

доказ: II $\Rightarrow$ X је Линделефов и рег. $\Rightarrow$ X је T_4

Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X, тј. $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

За $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ тј. $\overline{B_n} \subseteq B_m$ можемо применити Урисонову лему на $\overline{B_n}$, $X \setminus B_m \in \mathcal{F}_X$, тј. $\exists g_{n,m} : X \to [0,1]$



Нетр. тј. $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{0\}$,
$g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{1\}$.

Хоћемо да покажемо да фамилија функција $\{g_{n,m}\}$ задовољава услов (*)

Нека је $x \in X$ и $C \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$, $x \notin C$.

$x \in X \setminus C \in \mathcal{T}_X \Rightarrow (\exists B_m \in \mathcal{B})$ $x \in B_m \subseteq X \setminus C$

X $T_3 \Rightarrow (\exists B_n \in \mathcal{B})$ $x \in B_n \subseteq \overline{B_n} \subseteq B_m$

$\Rightarrow$ имамо $g_{n,m}$ тј. $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{0\}$, $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{1\}$.

$B_m \subseteq X \setminus C \Rightarrow C \subseteq X \setminus B_m \Rightarrow g_{n,m}(C) = \{1\}$

$x \in \overline{B_n} \Rightarrow g_{n,m}(x) = 0$

$\Rightarrow \{g_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ испуњава услове (*), притом

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ је пребројив па можемо $\{g_{n,m}\}$ индексирати са $\mathbb{N}$, тј. имамо фамилију $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ тд. важи ⊛.

$\overset{\text{лема}}{\Longrightarrow}$ $f: X \to I^{\mathbb{N}}$ дато са $f(x) = (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ је утапање и $I^{\mathbb{N}}$ је метризабилан, па је и X метризабилан. ▨

<u>Пример</u> Метризабилност није непрекидна инваријанта

$$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \xrightarrow{\mathbb{1}} (\mathbb{R}, \mathcal{S})$$

овде имамо дискретну метрику

није метр.

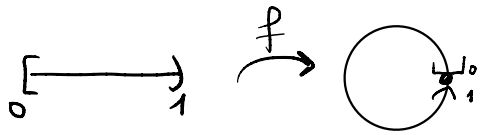
Количничка пресликавања

деф. Пресликавање $f: X \to Y$ је количничко ако је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(Приметимо: смер „$\Rightarrow$" је непрекидност.)

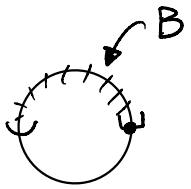
Пример $f: [0,1) \to S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



f је непр. и „на", али не важи услов „$\Leftarrow$" па није количничко

За $B := f([0, \frac{1}{2}))$ имамо:

$$f^{-1}(B) = [0, \tfrac{1}{2}) \in \mathcal{T}_{[0,1)} \not\Rightarrow B \in \mathcal{T}_{S^1}$$



Став Пресликавање $f: X \to Y$ је количничко акко је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

доказ вежба. ▨

Став Ако је f непр., „на" и отворено/затворено, онда је f количничко.

доказ f отворено:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \overset{f \text{ отв.}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\substack{\| \ f \text{ „на"} \\ B}} \in \mathcal{T}_Y$$

f затворено: слично. ▨

Последица $f: X \to Y$ непр. и „на", X компактан, Y T_2
$\Rightarrow$ f је количничко.

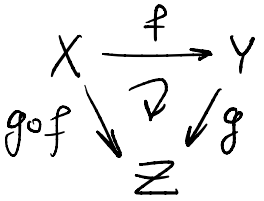
доказ Имали смо раније тврђење: f: комп. $\to T_2$ је затворено. ▨

Став Нека су $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ количничка. Тада је и $g \circ f$ количничко.

доказ: $g \circ f$ је непр. и „на" W
Нека је $B \subseteq Z$ и $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{T}_X \overset{f \text{ кол.}}{\Longrightarrow} g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_Y \overset{g \text{ кол.}}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{T}_Z \quad ▨$$

Теорема Нека је $f: X \to Y$ количничко и $g: Y \to Z$. Тада g је непрекидно акко је $g \circ f$ непр.



доказ: $\Rightarrow$: W
$\Leftarrow$: Нека је $g \circ f$ непр. и $V \in \mathcal{T}_Z$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$$g \circ f \text{ непр.} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_Z \overset{f \text{ кол.}}{\Longleftrightarrow} g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Z \Rightarrow g \text{ непр.} \quad ▨$$

Количнички простори

Нека је X т. пр. и Y скуп и $f: X \to Y$ „на".
На Y дефинишемо финалну топологију помоћу f:

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_f = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}$$

Став $\mathcal{T}_f$ јесте топологија на Y.

доказ вежба. ▨

Став $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_f)$ је количнички.

доказ директно из деф. ☐

Став $\mathcal{T}_f$ је најјача топ. тд. је f непр.

Количнички простор задајемо на 3 начина.

① Помоћу релације екв.

Нека је X топ. пр. и $\sim$ рел. екв. на X. Природна пројекција $\pi: X\to X/_\sim$, $x\mapsto [x]$ нам даје топ. на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} := \mathcal{T}_\pi = \{ V\subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X\}.$$

Пар $(X/_\sim, \mathcal{T}_{X/_\sim})$ је количнички простор.

② Помоћу подскупа.

Нека је X топ. пр. и $A\subseteq X$. Дефинишемо рел. $\sim$ на X:

$$x\sim y \overset{\text{def}}{\iff} x=y \ \vee\ x,y\in A$$

$\sim$ је рел. екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{\text{def}}{=} X/_\sim \quad\text{и}\quad \mathcal{T}_{X/A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}$$

Пар $(X/A, \mathcal{T}_{X/A})$ је количнички простор.

③ Помоћу пресликавања.

Нека су X,Y топ. пр. и $f:X\to Y$ непр. Дефинишемо $\sim$ на X:

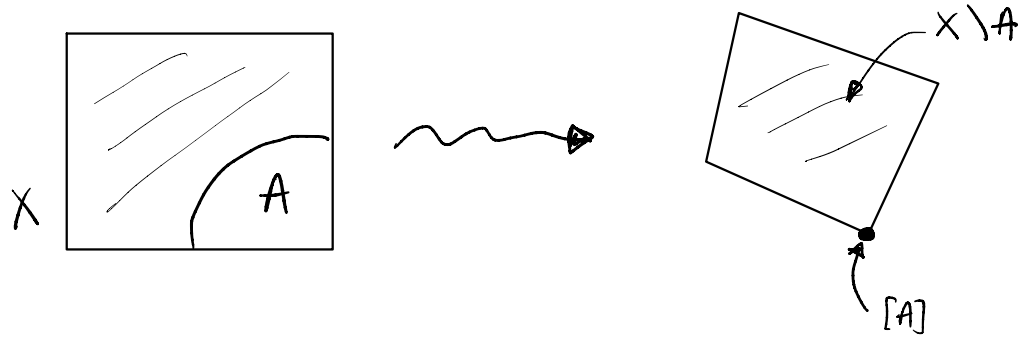
$$x\sim y \iff f(x)=f(y).$$

$\sim$ је рел. екв. и

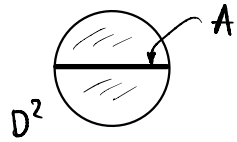
$$X/f \overset{\text{def}}{=} X/_\sim,\quad \mathcal{T}_{X/f} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}.$$

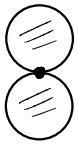
Пар $(X/f, \mathcal{T}_{X/f})$ је количнички простор.

<u>Пример</u> $A \subseteq X$, $X/A =$ „скупимо A у тачку"

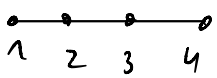


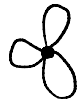
(1) $X/X \approx *$

(2) 

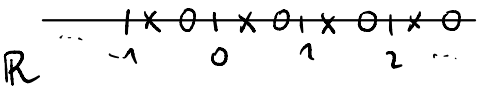
$D^2/A =$ 

(3) $D^n/\partial D^n = S^n$

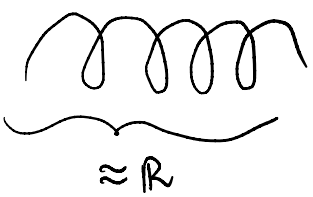
(4) $[1,4]/\{1,2,3,4\} =$ 

$/\{1,2,3,4\} \approx$ 

<u>Пример</u> (1) $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x-y \in \mathbb{Z}$

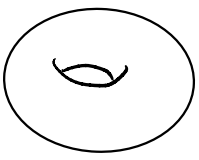


$/\sim \;\approx S^1$

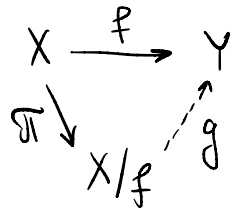
илустрација 

$\to$  S^1 („намотамо" $\mathbb{R}$ на S^1)

(2) $\sim$ на $\mathbb{R}^2$: $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}^2/\sim \;\approx T^2 =$  $=$ торус

Теорема Ако је $f: X \to Y$ количничко, онда је $X/f \approx Y$.

доказ: 

Нека је $g: X/f \to Y$ дато са

$$g([x]) := f(x)$$

g је добро деф.: $x, y \in X$

$[x] = [y] \iff x \sim y \iff f(x) = f(y) \iff g([x]) = g([y])$

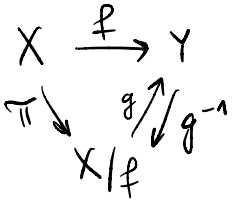
g је непр.: $g \circ \pi = f$ је непр. и π кол. $\Rightarrow$ g је непр.

g је „1-1": $g([x]) = g([y]) \iff f(x) = f(y) \iff x \sim y \iff [x] = [y]$

g је „на": $y \in Y \overset{f\text{ „на"}}{\Longrightarrow} (\exists x \in X)\, f(x) = y \iff y = g([x])$.

g је бијекција $\Rightarrow$ постоји g^{-1}

g^{-1} је непр.: $g^{-1} \circ f = \pi$ је непр. и f количничко $\Rightarrow$ g^{-1} је непр.



$\Rightarrow$ g је хомеоморфизам $\Rightarrow$ $X/f \approx Y$. ☒

Пример $f: [0,1] \to S^1 \qquad f(t) = e^{2\pi i t}$

f је непр. и слика компакта $[0,1]$ у T_2 простору S^1, па је затворен.

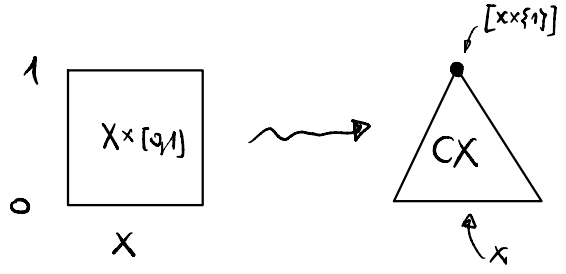
Дакле, f је непр., „на" и затворено $\Rightarrow$ f је количничко.

$\Rightarrow$ $[0,1]/f \approx S^1$.

Конструкции новых пр.

① Конус пространства X („cone of X")

$$CX \overset{\text{def}}{=} X \times [0,1] \Big/ X \times \{1\} = X \times [0,1] \Big/ \substack{(x,1)\sim(y,1) \\ (\forall x,y \in X)}$$

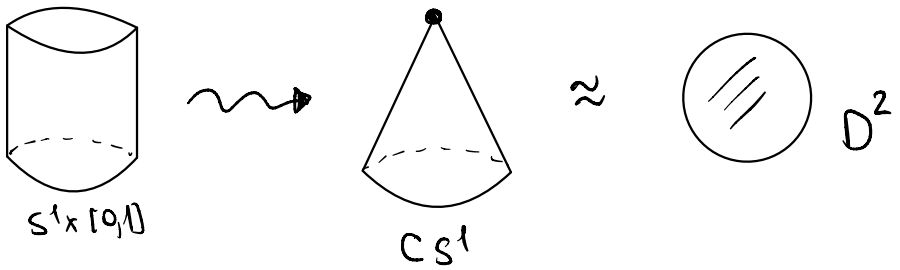


Имеем вложение $i : X \hookrightarrow CX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а может и $i(x) = [(x,t)]$, $t \in [0,1)$)

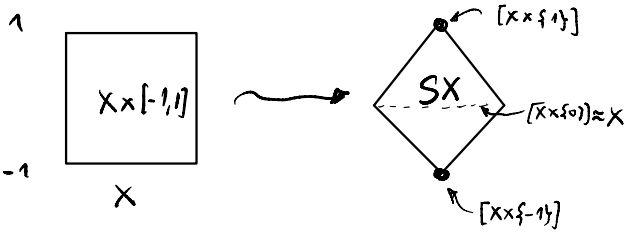
Пример $CS^1 = S^1 \times [0,1] / S^1 \times \{1\} = D^2$



Генерально: $CS^n = D^{n+1}$.

② Суспензия пространства X („suspension of X")

$$SX = X \times [-1,1] \Big/ \substack{(x,1)\sim(y,1), \\ (x,-1)\sim(y,-1), \\ (\forall x,y \in X)}$$

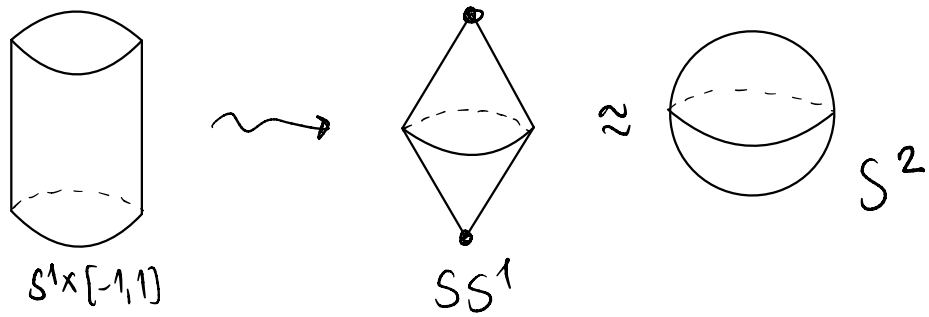


Имеем вложение $i : X \hookrightarrow SX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а может и $i(x) = [(x,t)]$, $t \in (-1,1)$)

Пример $SS^1 = S^1 \times [-1,1]/_{\sim} \approx S^2$



Генерално $SS^n \approx S^{n+1}$

③ Дисјунктна унија X и Y: $(X \sqcup Y, \mathcal{T}_{X \sqcup Y})$

$$\mathcal{B}_{X \sqcup Y} \overset{def}{=} \mathcal{T}_X \sqcup \mathcal{T}_Y$$

④ Простор са базном тачком (X, x_0)

$x_0 \in X$ – произвољна тачка из X

(овде ништа не конструишемо, само увадимо појам базне тачке)

⑤ Букет простора X и Y („wedge of X and Y")

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ базне тачке

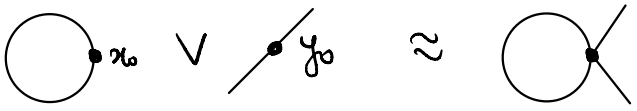
$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) \overset{def}{=} X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$$

Пример (1)



$\not\approx$

(2)



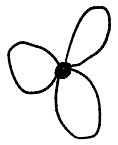
Букет зависи од избора базне тачке!

У неким просторима је свеједно шта је базна т. и тада пишемо само $X \vee Y$. Тј.

$$(\forall x_0, x_1 \in X)(\forall y_0, y_1 \in Y)\ (X, x_0) \vee (Y, y_0) \approx (X, x_1) \vee (Y, y_1)$$

$\Rightarrow$ $X \vee Y \overset{def}{=} (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, за $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ произвољно.

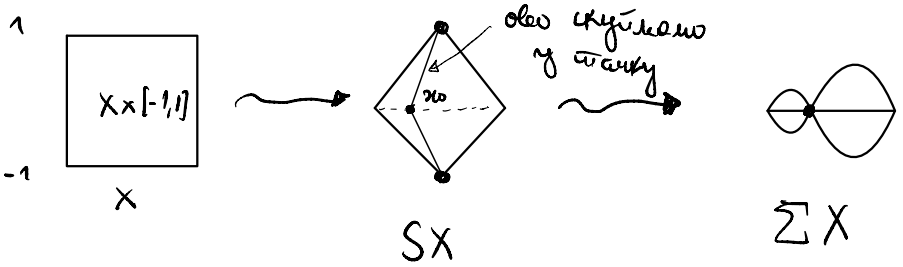
(Углавном се и срећемо баш са овом ситуацијом.)

Пример $[1,4]/_{\{1,2,3,4\}} \approx$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

⑥ Редукована суспензија од X („reduced suspension of X")

$x_0 \in X$ базна тачка

$$\Sigma X \overset{def}{=} SX/_{[(x_0,t)] \sim [(x_0,s)]\ (\forall s,t \in [-1,1])}$$

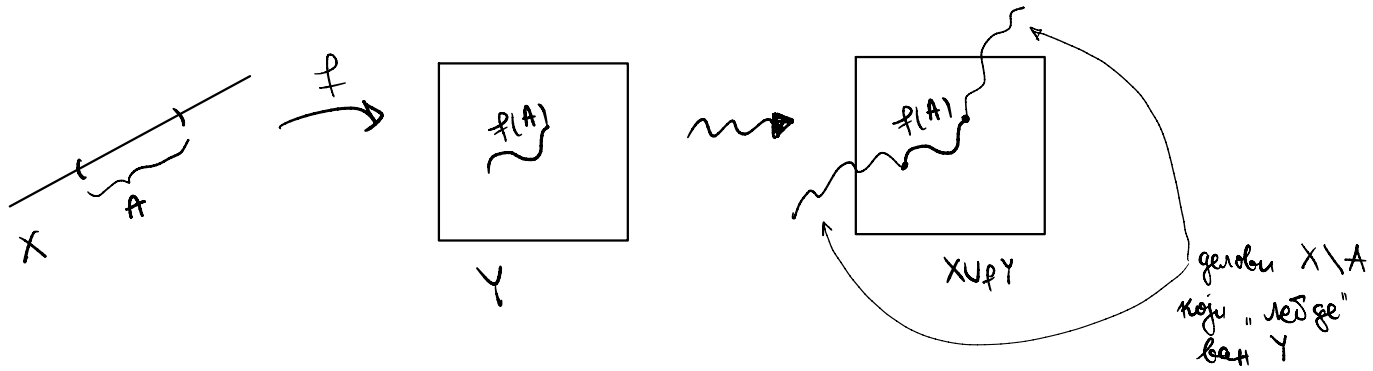


SX и ΣX ће имати сличне особине, али разлика је у томе што у ΣX имамо природан избор базне тачке ($[\{x_0\} \times [-1,1]]$) док у SX то немамо.

⑦ Лепљење пресликавањем („adjunction space")

X, Y топ. пр., $A \subseteq X$, $f: A \to Y$

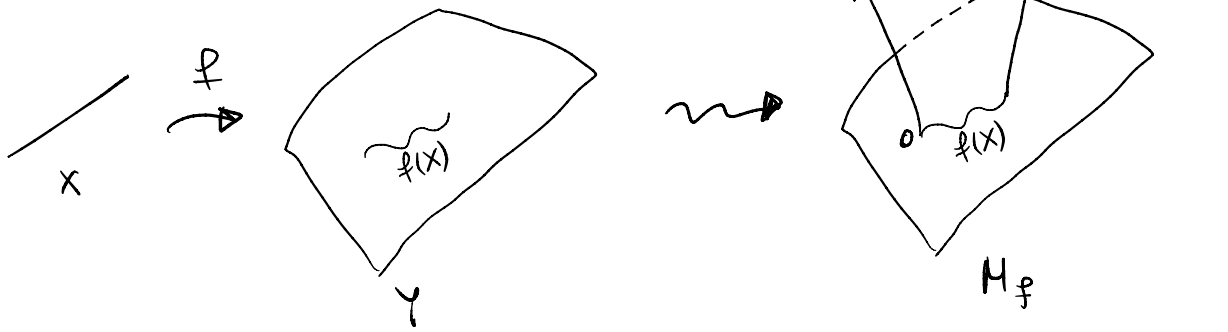
$$X \cup_f Y \overset{def}{=} X \sqcup Y/_{a \sim f(a)\ (\forall a \in A)}$$



Пример $X \cup_{\text{конст}} Y \approx X/A \vee Y$

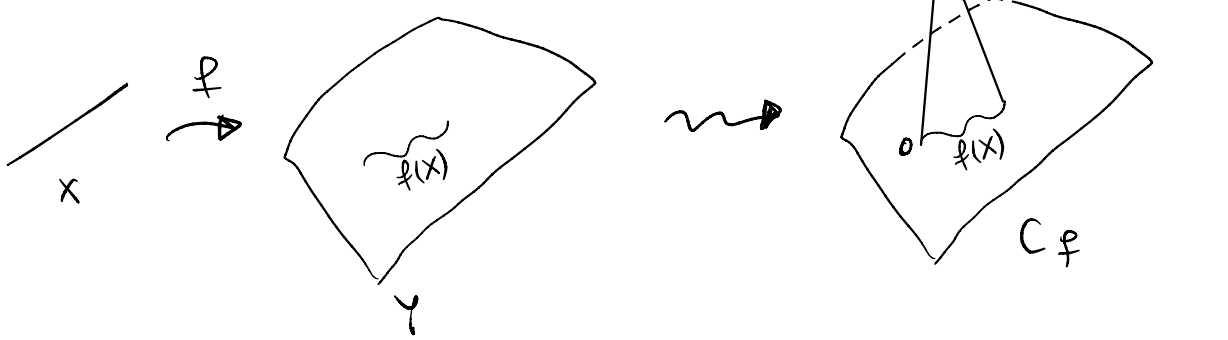
⑧ Цилиндар пресликавања („mapping cylinder")
$f: X \to Y$ непр.

$$M_f \overset{\text{def}}{=} \left(X \times [0,1]\right) \sqcup Y \Big/ (x,0) \sim f(x)$$



⑨ Конус пресликавања („mapping cone")
$f: X \to Y$ непр.

$$C_f \overset{\text{def}}{=} \left(X \times [0,1]\right) \sqcup Y \Big/ \begin{array}{l} (x,0) \sim f(x) \\ (x_1,1) \sim (x_2,1) \\ (\forall x, x_1, x_2 \in X) \end{array}$$



⑩ Свързване произведение X и Y („join of X and Y")

$$X * Y \overset{\text{def}}{=} (X \times Y \times [0,1]) / \sim$$

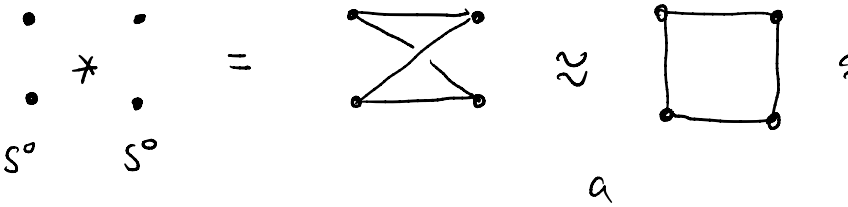
$\sim$ дадена с:

$(x_1, y_1, 0) \sim (x_1, y_2, 0)$, $\quad x \in X,\ y_1, y_2 \in Y$

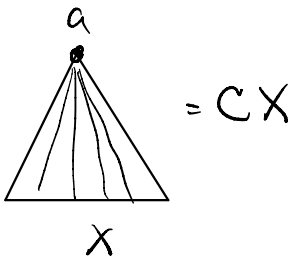
$(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$, $\quad x_1, x_2 \in X,\ y \in Y$

$X * Y$ = „всяка точка от X свързваме с всяка точка от Y"

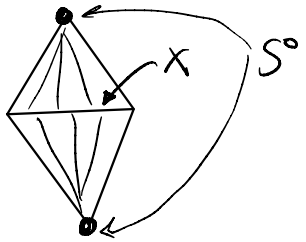
Пример (1) $S^0 * S^0 \simeq S^1$ (S^0 = • • (две точки))



(2) $\underbrace{\{a\}}_{\text{т.пр. от 1 точка}} * X \simeq CX$



(3) $S^0 * X \simeq SX =$



(4) $S^m * S^n \simeq S^{m+n+1}$

$S^0 * S^0 = S(S^0) = S^1$

$S^0 * S^0 * S^0 = S^0(S^1) = S^2$

...

$\underbrace{S^0 * \cdots * S^0}_{k} \simeq S^{k-1}$

$\Rightarrow$

$$S^m * S^n \simeq \underbrace{S^0 * \cdots * S^0}_{m+1} * \underbrace{S^0 * \cdots * S^0}_{n+1} \simeq S^{m+n+1}$$

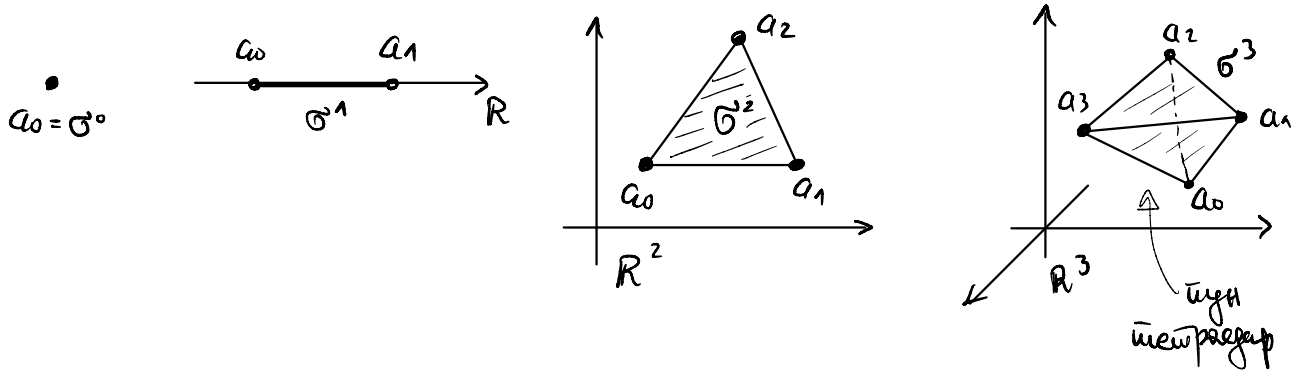
Симплицијални комплекси

деф Нека су $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ тачке у општем положају. Геометријски n-симплекс одређен тачкама $a_0, \dots, a_n$ је скуп

$$\sigma^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ (\forall i)\ \lambda_i \geq 0 \}$$

Тачке $a_0, \dots, a_n$ су чворови симплекса, а n његова димензија.
(Другим речима, σ^n је конвексни омотач тачака $a_0, \dots, a_n$.)

Пример $n = 0$ $n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



деф Унутрашњост (интериор) симплекса σ^n је

$$\mathring{\sigma}^n = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \sigma^n \mid (\forall i)\ \lambda_i > 0 \}$$

Пример $\operatorname{int} \sigma^0 = \emptyset$, $\operatorname{int} \sigma^1 =$ ⟷, $\operatorname{int} \sigma^2 =$ 

деф Руб симплекса σ^n је $|\dot{\sigma}^n| \stackrel{def}{=} \sigma^n \setminus \mathring{\sigma}^n$.

Коментар $\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^m$ па имамо наслеђену топ. на σ^n од $\mathbb{R}^m$.
Унутрашњост/руб у наслеђеној топ. и код симплекса исто.

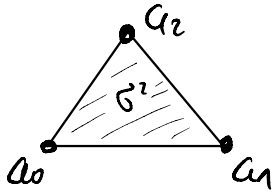
Нпр. $a_0 = (0,0)$, $a_1 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$\mathring{\sigma}^1 = (0,1)$, $|\dot{\sigma}^1| = \{0,1\}$, $\underbrace{\operatorname{int} \sigma^1 = \emptyset, \ \partial \sigma^1 = \sigma^1}_{\text{у топ. пр.}}$

σ^n одређено са $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

деф Свака подскуп $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ од $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ је страна симплекса σ^n.

Пример



$\rightsquigarrow$ стране:

ϕ,

a_0, a_1, a_2, ← темена

$(a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_0, a_2)$, ← ивице

(a_0, a_1, a_2)

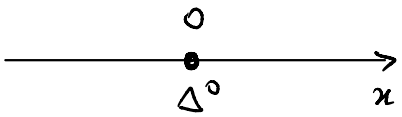
деф Барицентар од σ^n је тачка

$$\hat{\sigma}^n = \frac{1}{n+1} a_0 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$$

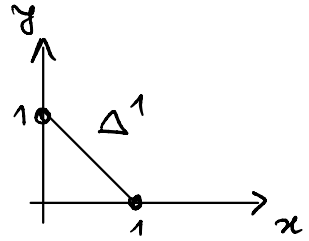
деф Стандардни n-симплекс је

$$\Delta^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1, \ (\forall i)\ x_i \geq 0 \}$$

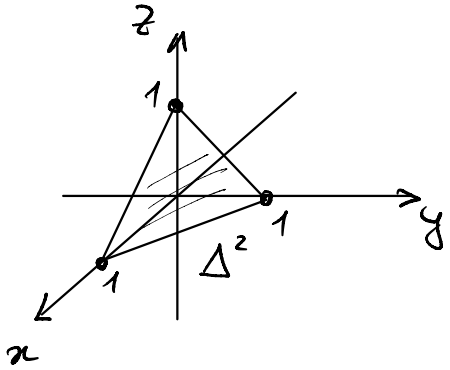
Пример $n = 0$



$n = 1$



$n = 2$



Став Свака два n-симплекса су хомеоморфна и свако од њих је компактан подскуп од $\mathbb{R}^m$.

деф. Геометријски симплицијални комплекс K у $\mathbb{R}^m$ је коначна фамилија симплекса у $\mathbb{R}^m$ т.ф.

(1) свака страна симплекса из K припада K,

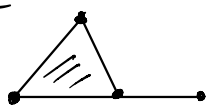
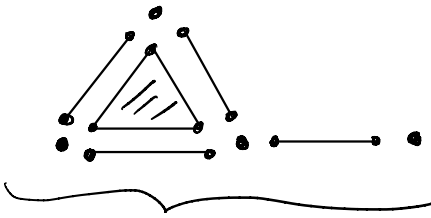
(2) пресек свака два симплекса је страна сваког од њих.

Пример

$K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1, a_2), (a_0), (a_1), (a_2)\}$ јесте с.к.

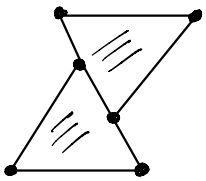
$K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1), (a_0, a_2), (a_1), (a_2)\}$ није с.к.

Пример

с.к.  замишљамо као: 

фамилија симплекса

Пример

 није с.к. јер пресек два троугла (2-симплекса) није страна ниједног од њих

деф Димензија геометријског с.к. K је димензија највећег симплекса у K.

У деф. геом. с.к. услов (2) се може заменити са:

(2') интерфори различитих симплекса из K су дисјунктни.

деф Унија свих симплекса у геом. с.к. K је тополошки од $\mathbb{R}^m$ који се назива полиедром с.к. K и означава са $|K|$.

деф Нека су K и L с.к. Пресликавање $f: |K| \to |L|$ је симплицијално ако

(1) $a_0, \dots, a_n$ темена од $K \Rightarrow f(a_0), \dots, f(a_n)$ темена од L
(не нужно различита)

(2) $x = \sum \lambda_i a_i \in |K| \Rightarrow f(x) = \sum \lambda_i f(a_i)$

Став Свако симплицијално пресл. $f: |K| \to |L|$ је непр.

доказ Нека је $\sigma^k \in K$ произвољан симплекс.
$\Rightarrow |\sigma^k|$ је компактан.
Пресликавање $g : |\sigma^k| \to [0,1]^k$ дато

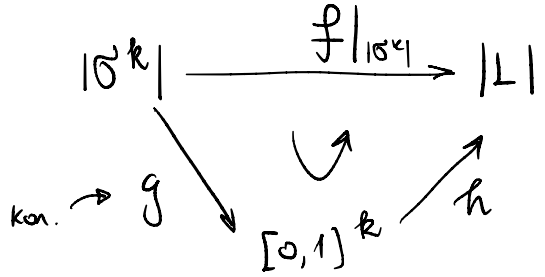
$$g(\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_k a_k) = (\lambda_0, \dots, \lambda_k)$$

па је очигледно непр. и слика компакта у T_2, па је и затворено. Нека је $h: [0,1]^k \to |L|$ дато са

$$h(\lambda_0, \dots, \lambda_k) = \lambda_0 f(a_0) + \dots + \lambda_k f(a_k)$$

h је очигледно непр.

Дакле, имамо



$\Rightarrow f|_{|\sigma^k|}$ је непр.
$\Rightarrow$ свих $|\sigma^k|$ су затворени, па је f непр. на основу леме о лепљењу. ▨

деф Апстрактни симплицијални комплекс је пар $K = (V, \Sigma)$ где је V коначан скуп, а Σ фамилија подскупова од V тд.

(1) $(\forall v \in V) \quad \{v\} \in \Sigma$,

(2) $\sigma \in \Sigma$ и $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Тачке $v \in V$ су врхови (темена) од K, а подскупови фамилије Σ су апстрактни симплекси.

Димензија симплекса $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \subseteq V$ је n, док је димензија с.к. K димензија највећег симплекса у K.

деф Нека су $K = (V, \Sigma)$ и $K' = (V', \Sigma')$ и $f : V \to V'$ тд.

$$\left(\forall \sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in \Sigma\right) \quad f(\sigma) = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in \Sigma',$$

Тада је f симплицијално пресл. и пишемо $f : K \to K'$.

Ако је $f : V \to V'$ бијекција и f и f^{-1} симплицијална, онда је f симплицијални изоморфизам и пишемо $K \approx K'$.

деф Апстракција геометријског с.к. K је апстрактни с.к. $K(K) = (V, \Sigma)$, где је V скуп темена од K, а Σ фамилија скупова темена симплекса у K.

Став За сваки апстрактни с.к. K постоји геом. с.к. K чија је апстракција изоморфна са K.

доказ (скица) $K = (V, \Sigma)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$v_i \rightsquigarrow e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \qquad \square$$

i

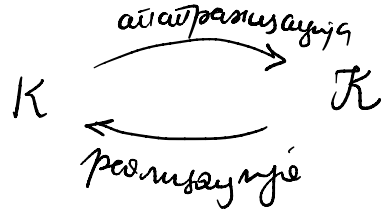
дефиниција Геом. с.к. из претходног става се зове (геометријска) реализација од K.

Став Ако су K' и K'' две реализације од K, онда

$$|K'| \approx |K''|.$$

Убудуће не правимо разлику између геом. и апстрактног с.к.

јер имамо



Барицентрична подела

$K = (V, \Sigma)$, $V = \{v_0, \dots, v_n\}$

↑ темена ↑ симплекси

$K^{(1)}$ - прва барицентрична подела од K:

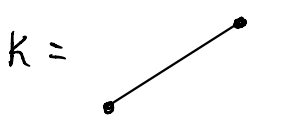
$V(K^{(1)})$ = барицентри свих симплекса у Σ

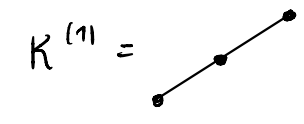
$\Sigma(K^{(1)})$ = сви симплекси $\{b_0, \dots, b_k\} \subseteq V(K^{(1)})$ тј.

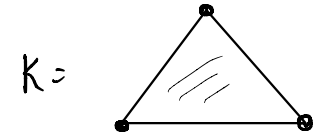
$$\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots \subseteq \sigma_k \subseteq V,$$

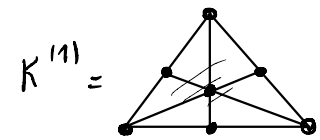
где је b_i барицентар од $\sigma_i \in \Sigma$

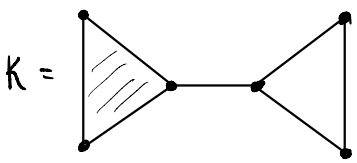
Пример

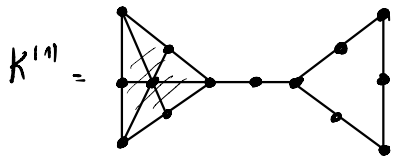








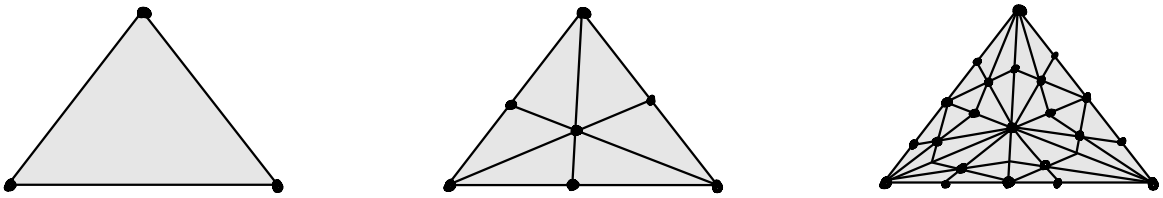




Генерално, n-та барицентрична подела је

$$K^{(n)} \stackrel{\text{деф}}{=} \left(K^{(n-1)}\right)^{(1)}$$

Пример



K $\quad K^{(1)}$ $\quad K^{(2)}$

деф σ геом. симплекс, $\operatorname{diam}\sigma$ је максимум растојања темена у σ.
Норма од K је $\|K\| = \max\{\operatorname{diam}\sigma \mid \sigma \in K\}$

Став K - геом. с.к. димензије n. Тада

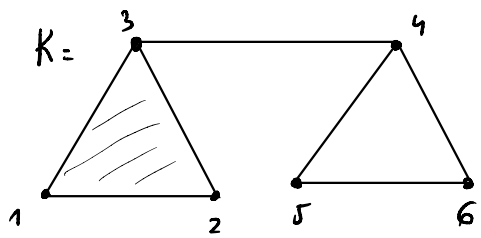
$$\|K^{(r)}\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \|K\|.$$

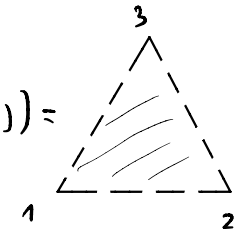
Теорема о симплицијалној апроксимацији

Ако је σ неки симплекс, $\tau \subseteq \sigma$ значи τ је страна од σ.

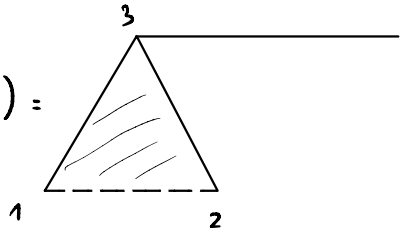
деф K с.к., $\sigma \in K$ симплекс. Отворена звезда од σ је

$$st_K(\sigma) = \bigcup\{\mathring{\tau} \mid \sigma \subseteq \tau\}$$

нпр. $K =$ 

$st_K((2,3)) =$ 

$= \overset{\circ}{(1,2,3)}$

$st_K(3) =$ 

Став $\sigma, \tau \in K$, онда $\sigma \subseteq \tau \Rightarrow st_K(\sigma) \supseteq st_K(\tau)$.

деф Нека су K и L с.к. и $f: |K| \to |L|$ непр. Ако постоји симплицијално прес. $s: |K| \to |L|$ тј.

$$(\forall a \in K)\ f(st_K(a)) \subseteq st_L(s(a)),$$

онда је s симплицијална апроксимација од f.

Став Ако је s симплицијална апроксимација за f, онда $f \simeq s$.
(„$f \simeq s$" значи f је хомотопно са s - види се на топ Б)

Став K, L с.к., $f: |K| \to |L|$ непр. Ако

$$(\forall a \in K)(\exists b \in L)\ f(st_K(a)) \subseteq st_L(b),$$

онда постоји симп. апрокс. s од f.

деф Нека је $\mathcal{U}$ отворен покривач метричког простора (M, d). Кажемо да је δ Лебегов број од $\mathcal{U}$ ако

$$(\forall A \subseteq M)\ \operatorname{diam} A < \delta \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{U})\ A \subseteq U.$$

Став [Лебегова лема] Ако је M компактан метрички пр, онда сваки отворен покривач пр M има Лебегов бр.

Теорема [О симп. апрокс.] Нека су K и L с.к. и $f: |K| \to |L|$ непр. Тада постоји барицентрична подела $K^{(r)}$ пр. $f: |K^{(r)}| \to |L|$ има симплицијалну апрокс.
(примедба: с.к. K и $K^{(r)}$ су различити, али $|K| = |K^{(r)}|$).

доказ $\{st_L(b) \mid b \in L\}$ је отворен покривач за $|L|$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{f^{-1}(st_L(b)) \mid b \in L\}$ је отв. покр. за $|K|$.

$|K|$ је комп. метр. пр. $\Rightarrow \mathcal{U}$ има Лебегов бр. Нека је λ Лебегов бр. за $\mathcal{U}$. Из неједнакости

$$\|K^{(r)}\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \|K\|$$

имамо да постоји r тј. $\|K^{(r)}\| < \frac{\lambda}{2}$, тј. је

$$(\forall a \in K^{(r)}) \quad diam\left(st_{K^{(r)}}(a)\right) < \lambda$$

$\overset{\text{деф. } \lambda}{\Rightarrow}$ $(\exists b \in L)\ st_{K^{(r)}}(a) \subseteq f^{-1}(st_L(b)) \in \mathcal{U}$

тј. $(\forall a \in K^{(r)})(\exists b \in L)\ f(st_{K^{(r)}}(a)) \subseteq st_L(b)$

$\Rightarrow f: |K^{(r)}| \to |L|$ има симпл. апроксимацију. ▨