Симплицијални комплекси

литература:

[1] Using the Borsuk-Ulam theorem, Jiři Matoušek (chapter 1)

[2] Топологија, Врећица - Марјановић (глава VI)

подсетник: $\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, (\forall i)\ \lambda_i \geq 0\}$

n-симплекс

$\mathring{\sigma}^n = \{ x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \in \sigma^n \mid (\forall i)\ \lambda_i > 0 \}$

унутрашњост

тачке $a_0, a_1, \dots, a_n$ су у општем положају ако

$$(\forall \alpha_0, \dots, \alpha_n) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i = 0 \ \text{ и } \ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \Rightarrow (\forall i)\alpha_i = 0$$

1. [2, стр. 149] Нека је $\sigma^k = (a_0, \dots, a_k)$ страна симплекса $\sigma^n = (a_0, \dots, a_n)$. Ако је $x_k \in \mathring{\sigma}^k$, тада је скуп тачака $x_0, \dots, x_n$ у општем положају.

решење Нека је $x_k = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j^{(k)} a_j$, $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j^{(k)} = 1$, $(\forall j)\ \lambda_j^{(k)} > 0$

и нека су $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ т.д.

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k = 0 \ \text{ и } \ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{j=0}^{k} \lambda_j^{(k)} a_j = a_0\left(\alpha_0 \lambda_0^{(0)} + \alpha_1 \lambda_0^{(1)} + \dots + \alpha_n \lambda_0^{(n)}\right) +$$
$$\dots + a_k\left(\alpha_k \lambda_k^{(k)} + \alpha_{k+1} \lambda_k^{(k+1)} + \dots + \alpha_n \lambda_k^{(n)}\right) +$$
$$\dots + a_n \alpha_n \lambda_n^{(n)}$$

$\Rightarrow$ сви коефицијенти уз a_k су 0:

$$\alpha_n \overbrace{\lambda_n^{(n)}}^{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$$

$$\alpha_{n-1} \overbrace{\lambda_{n-1}^{(n-1)}}^{\neq 0} + \cancelto{0}{\alpha_n \lambda_{n-1}^{(n)}} = 0 \Rightarrow \alpha_{n-1} = 0$$

$$\dots$$

$$\alpha_0 \overbrace{\lambda_0^{(0)}}^{\neq 0} + \cancelto{0}{\alpha_1 \lambda_0^{(1)}} + \dots + \cancelto{0}{\alpha_n \lambda_0^{(n)}} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$\Rightarrow$ тачке су у општем положају. □

деф. Симплицијални комплекс K у $\mathbb{R}^m$ је коначна фамилија симплекса у $\mathbb{R}^m$ т.д.

(i) свака страна симплекса из фамилије K је симплекс из те фамилије;

(ii) пресек свака два симплекса из K је страна сваког од њих.

Услов (ii) се може заменити условом (ii') из тврђења:

Тврђење 2.2 [2, стр. 151] Фамилија K је симплицијални комплекс акко:

(i) свака страна симплекса из фамилије K је симплекс из те фамилије;

(ii') интериори различитих симплекса из K су дисјунктни.

Доказ $\Rightarrow$: (i) тривијално важи, па показујемо (ii').

Нека су $\sigma, \tau \in K$, $\sigma \neq \tau$ и т.с. $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} \neq \emptyset$. Нека је $x \in \mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau}$

$\Rightarrow x \in \sigma \cap \tau = \rho$ – заједничка страна.

$x \in \mathring{\sigma} \Rightarrow \rho = \sigma$, $x \in \mathring{\tau} \Rightarrow \rho = \tau \Rightarrow \sigma = \tau$ ↯

$\Leftarrow$: (i) тривијално важи, па показујемо (ii).

Приметимо $x \in \sigma \Rightarrow x$ припада интериору тачно једне стране симплекса σ.

Нека је сада $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ и нека је ρ симплекс чија су темена она темена симплекса σ садржана у τ.

$$\Rightarrow \quad \rho \subseteq \tau \quad \text{и} \quad \rho \subseteq \sigma \cap \tau. \quad (\star)$$

Нека је $x \in \sigma \cap \tau$ и s и t јединствене стране од σ и τ т.д.

$$x \in \mathring{s} \subseteq s \subseteq \sigma, \quad x \in \mathring{t} \subseteq t \subseteq \tau.$$

$\Rightarrow x \in \mathring{s} \cap \mathring{t} \overset{(ii')}{\Longrightarrow} s = t \Rightarrow$ темена од s и t су иста.

Дакле, $s = t \subseteq \rho$, па $x \in \rho \Rightarrow \sigma \cap \tau \subseteq \rho$ $(\star\star)$

$(\star) + (\star\star) \Longrightarrow \sigma \cap \tau = \rho$ је страна симплекса σ (слично и за τ). □

деф. Полиедар $|K|$ симплицијалног подскупа K је унија свих његових симплекса као подскуп $\mathbb{R}^m$.

деф. Апстрактни симплицијални комплекс је пар $\mathcal{K} = (V, \Sigma)$, где је V коначан, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(V)$ т.д.

(i) $(\forall v \in V)\ \{v\} \in \Sigma$;

(ii) $\sigma \in \Sigma$ и $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Тврђење 3.2 [2, стр. 156] За сваки апстрактни с.к. $\mathcal{K}$ постоји његова геометријска реализација K.

Тврђење 3.3. [2, стр. 156] Нека су K' и K'' две реализације апстрактног с.к. $\mathcal{K}$. Тада $|K'| \approx |K''|$.

Доказ Нека су темена сва три комплекса нумерисана тако да су $v_i \mapsto v_i'$ и $v_i \mapsto v_i''$ изоморфизми с.к. $\mathcal{K}$ са апстракцијама $\mathcal{K}(K')$ и $\mathcal{K}(K'')$.

Нека су $g : |K'| \to |K''|$ и $h : |K''| \to |K'|$ одређена са $v_i' \mapsto v_i''$ и $v_i'' \mapsto v_i'$.

Тада за $x = \sum \lambda_i v_i' \in |K'|$ имамо $(h \circ g)(x) = h(\sum \lambda_i v_i'') = \sum \lambda_i v_i' = x$ и слично $(g \circ h)(y) = y$, за $y \in |K''|$. □

2. [1, стр. 16] Шаховски комплекс $\text{♖}_{m,n}$ за темена има поља шаховске табле димензије $m \times n$, а симплекси су сви подскупови скупа поља т.д. ниједна два поља нису у истој врсти или колони. Одредити шта је $|\text{♖}_{3,4}|$.

решење Приметимо да у $\text{♖}_{3,4}$ имамо само 0, 1 и 2 симплексе.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

0 – симплекси : $(1), (2), \dots, (12)$ (укупно 12)

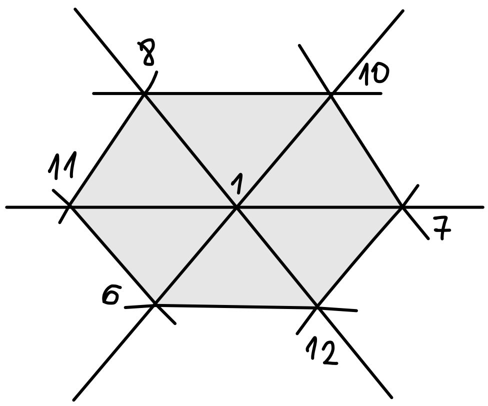
1 – симплекси : $(1,6), (1,7), (1,8), (1,10), (1,11), (1,12), (2,5), (2,7), \dots$

(укупно $\underbrace{4 \cdot 6}_{\substack{\text{садрже} \\ 1,2,3 \text{ или } 4}} + \underbrace{4 \cdot 3}_{\substack{\text{не садрже} \\ 1,2,3,4}} = 36$)

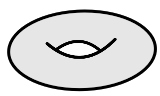
2 – симплекси : $(1,6,11), (1,6,12), (1,7,10), (1,7,12), \dots$

(укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$)

илустрација:



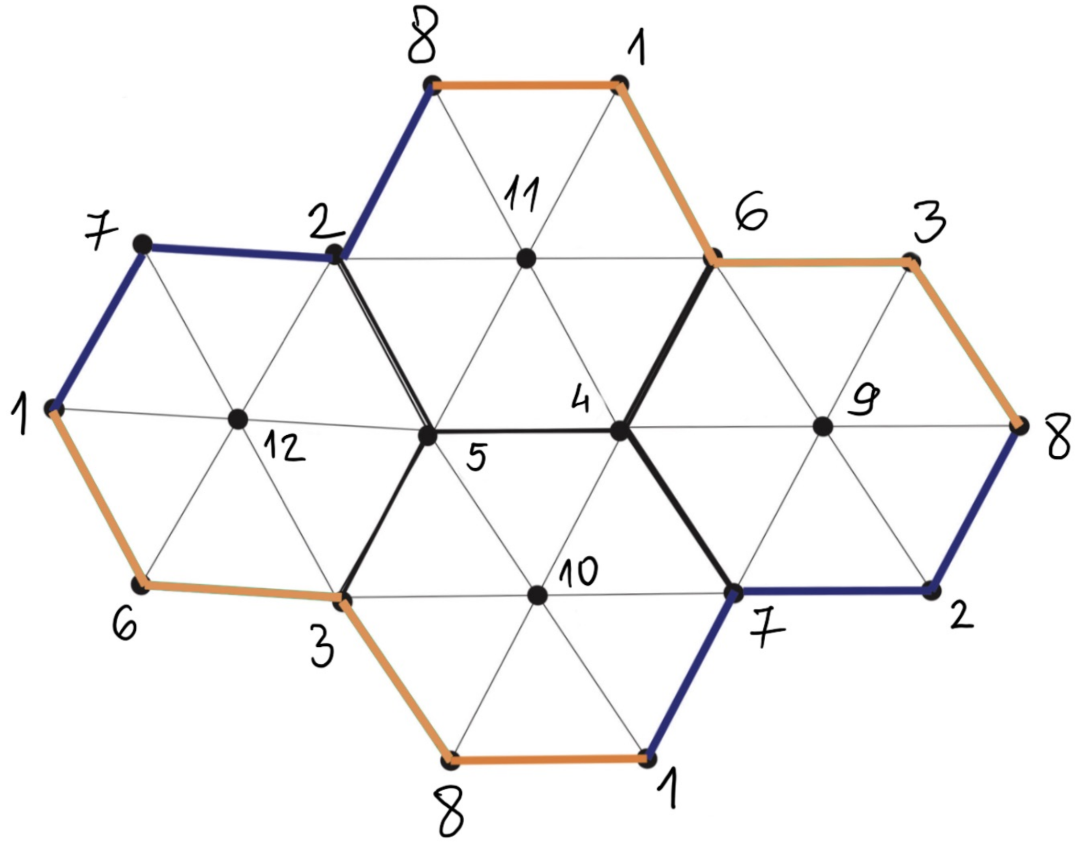
Добијамо триангулацију неке повезане затворене оријентабилне површи, али која површ је у питању?



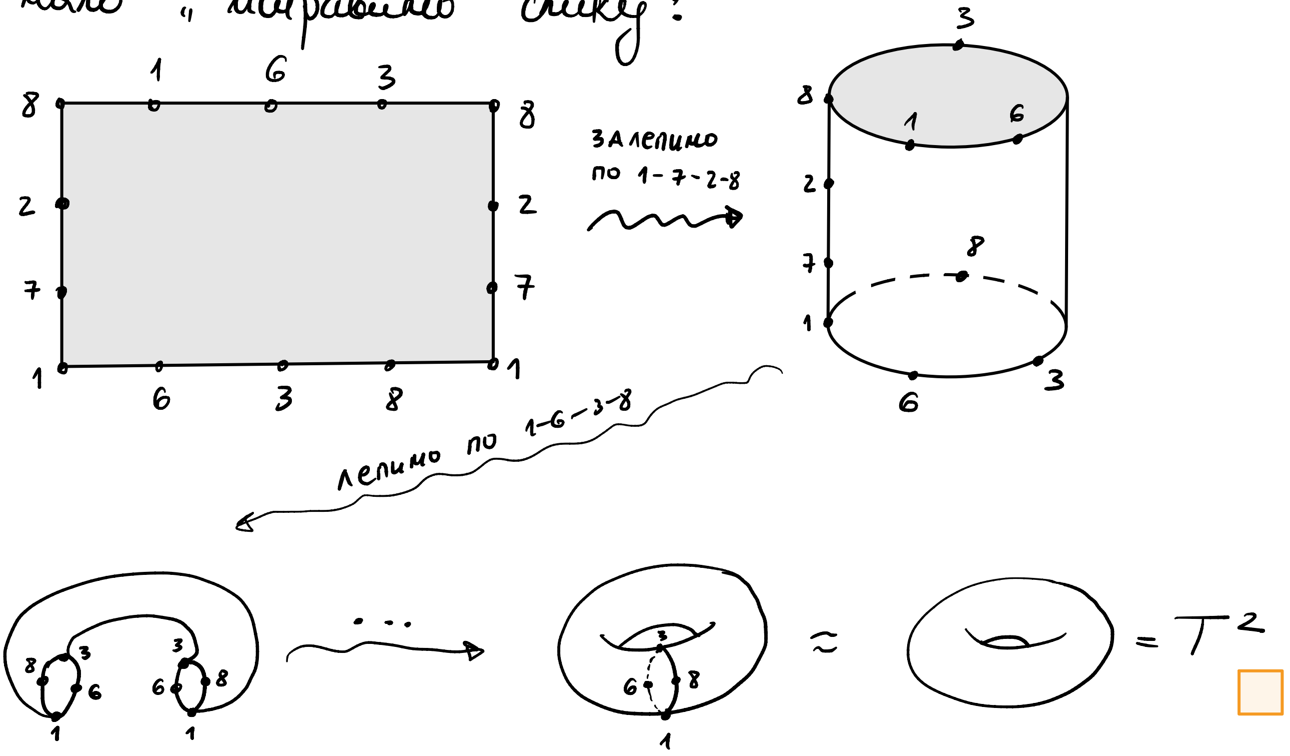
$$\overset{\substack{\text{Ојлерова} \\ \text{карактеристика}}}{\chi}(|\text{♖}_{3,4}|) = \overset{\text{темена}}{12} - \overset{\text{ивице}}{36} + \overset{\text{стране}}{24} = 0 = \chi(\overset{\text{торус}}{T^2})$$

$$\Rightarrow |\text{♖}_{3,4}| \approx T^2.$$

Да је $|♖_{3,4}| \simeq T^2$ можемо видети и директно.
На слици је описан симплицијални комплекс, остаје још само да се залепи по ивицама $1-7-2-8$ и по $8-1-6-3$

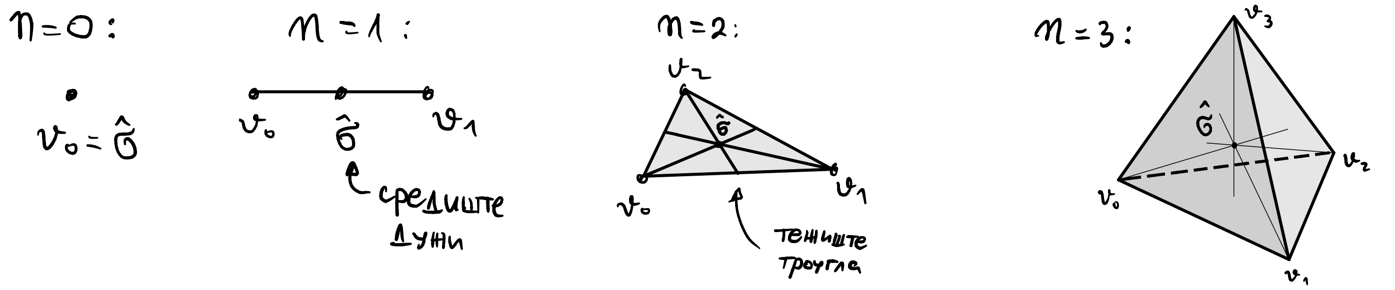


Прво мало „исправимо“ слику:



Барицентрична подела

деф. Нека је $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ n-симплекс у $\mathbb{R}^N$. Тада тачку $\hat{\sigma} := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i \in \mathring{\sigma}$ називамо барицентром од σ.

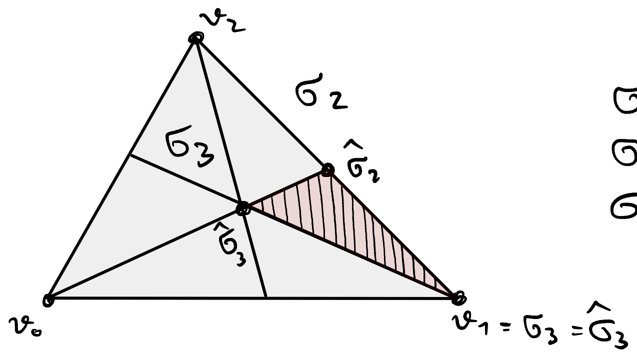


Став Нека су $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ симплекси у $\mathbb{R}^N$ т.д.

$$\sigma_m < \sigma_{m-1} < \dots < \sigma_2 < \sigma_1.$$

Тада су барицентри $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m$ у општем положају, тј. $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m)$ је један $(m-1)$-симплекс.

Пример



$\sigma_1 = (v_0, v_1, v_2)$

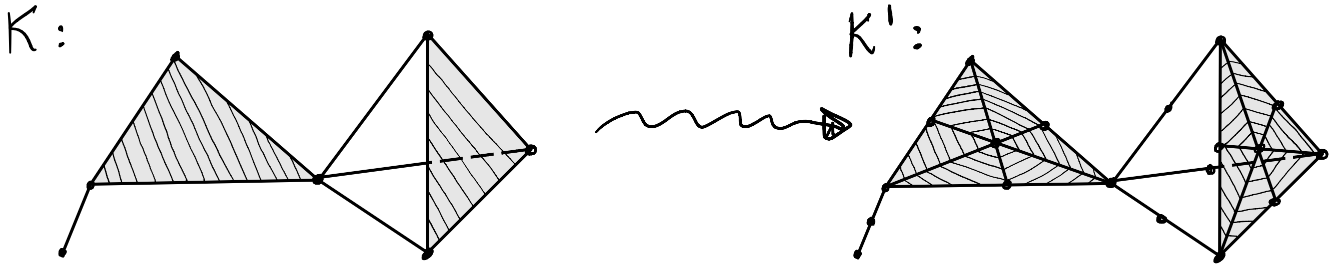
$\sigma_2 = (v_1, v_2)$

$\sigma_3 = (v_1)$

Нека је K симплицијални комплекс у $\mathbb{R}^N$. Уочимо скуп K' свих симплекса облика $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m)$, где је $m \in \mathbb{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in K$ т.д. $\sigma_m < \sigma_{m-1} < \dots < \sigma_2 < \sigma_1$. Дакле,

$$K' = \{ (\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m) \mid m \in \mathbb{N},\ \sigma_m < \sigma_{m-1} < \dots < \sigma_2 < \sigma_1 \in K \}$$

Пример



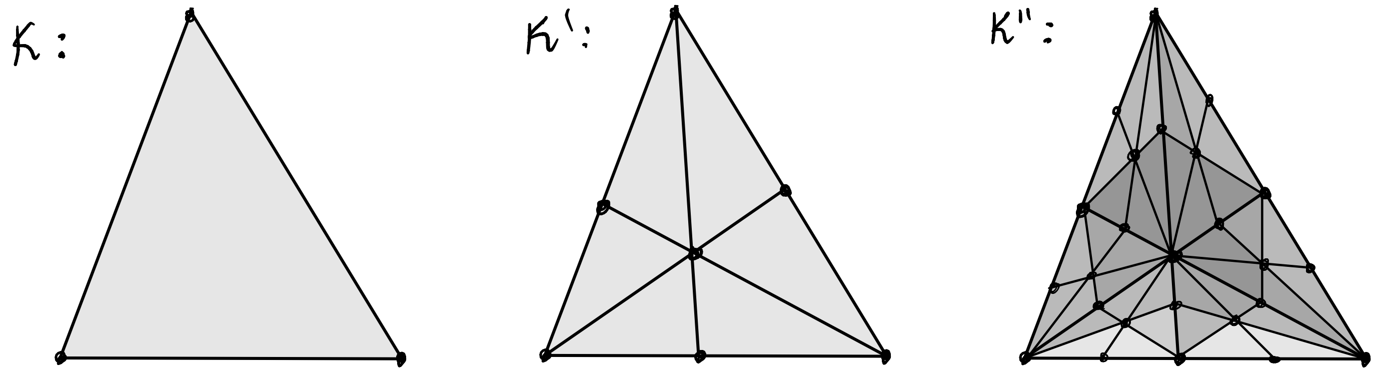
Теорема K' је симплицијални комплекс у $\mathbb{R}^N$ и $|K'| = |K|$ и $\dim K = \dim K'$.

деф. Симплицијални комплекс K' називамо првом барицентричном поделом симплицијалног комплекса K.
Прву барицентричну поделу од K' називамо другом барицентричном поделом од K (ознака K'').
Генерално:

$$K^{(r)} = \left(K^{(r-1)}\right)', \quad r \in \mathbb{N}.$$

r-та барицентрична подела од K

Пример



деф. Ако је K коначан с.к. у $\mathbb{R}^N$, онда

$$\mu(K) := \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam} \sigma$$

Став Нека је K коначан с.к. у $\mathbb{R}^N$ и $r \in \mathbb{N}_0$. Тада

$$\mu\left(K^{(r)}\right) \leq \left(\frac{\dim K}{1 + \dim K}\right)^{r} \cdot \mu(K).$$

Последица $\lim_{r \to \infty} \mu\left(K^{(r)}\right) = 0.$

Брауерова и Борсук-Уламова теорема

1. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ затворени подскупови од S^n т.д. $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$, за све i. Доказати да је

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup (-A_i) \neq S^n.$$

решење Претпоставимо супротно да је

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup (-A_i) = S^n. \quad (*)$$

Нека је $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$f(x) = \big(d(x, A_1), d(x, A_2), \dots, d(x, A_n)\big).$$

f је непрекидно $\xRightarrow{\text{БУТ}} (\exists x \in S^n)\ f(x) = f(-x)$.

Из $(*)$ следи да БУО $x \in A_i$ за неко i, па је

$$d(x, A_i) = d(-x, A_i) = 0,$$

али, $d(-x, A_i) = d(x, -A_i) = 0 \implies x \in -A_i$

$\implies x \in A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ ↯ □

2. Нека је $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно т.д. $d(x, f(x)) \leq 1$, за све $x \in D^n$. Доказати да једначина $f(x) = 0$ има решења у скупу D^n.

решење Нека је $g : D^n \to D^n$ дато са

$$g(x) = x - f(x).$$

$\xRightarrow{\text{Брауер}} (\exists x \in D^n)\ g(x) = x \implies f(x) = 0.$ □

3. Нека су $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрекидне функције. Доказати да систем једначина

$$\frac{f(x,y)}{1+f(x,y)^2} = x, \quad \frac{g(x,y)}{1+g(x,y)^2} = y$$

има решење у D^2.

Решење Нека је $F : D^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$F(x,y) = \left(\frac{f(x,y)}{1+f(x,y)^2}, \frac{g(x,y)}{1+g(x,y)^2} \right).$$

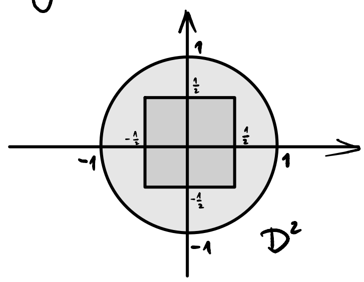
F је очигледно непрекидно.

Приметимо да је

$$\left\| \frac{f(x,y)}{1+f(x,y)^2} \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \left\| \frac{g(x,y)}{1+g(x,y)^2} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

па је $F(D^2) \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \subseteq D^2$, тј. $F : D^2 \to D^2$

$\xRightarrow{\text{Брауер}} \left(\exists (x,y) \in D^2\right) F(x,y) = (x,y)$,

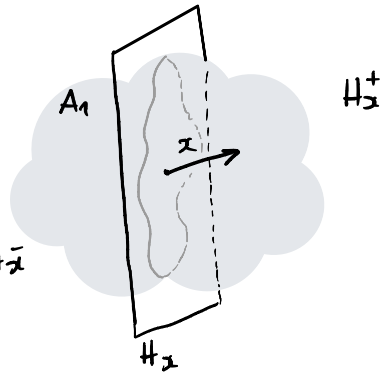


тј. дати систем има решење. $\square$

4. [теорема о сендвичу] Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ мерљиви скупови коначне мере. Тада постоји хиперраван која полови меру сваког од њих.

(Претпостављамо да су A_i „довољно лепи“, као и мера, тј. хиперраван је мере 0 и сваки отворен скуп има меру већу од 0, A_i повезани итд.)

Решење Свака хиперраван је одређена својим вектором нормале, тј. јединичним вектором $x \in S^{n-1}$. Нека је $x \in S^{n-1}$ и $H_x \perp x$ хиперраван која полови A_1, тј.



$$\mu(H_x^+ \cap A_1) = \mu(H_x^- \cap A_1).$$

Ова хиперраван је јединствена (за фиксирано x).

Дефинишимо $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(x) := \big(\mu(H_x^+ \cap A_2), \dots, \mu(H_x^+ \cap A_n)\big).$$

$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^{n-1})\ \varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$, тј.

$$(\forall i \geq 2)\ \mu(H_{x_0}^+ \cap A_i) = \mu(H_{-x_0}^+ \cap A_i) = \mu(H_{x_0}^- \cap A_i)$$

$\Longrightarrow H_{x_0}$ полови све скупове $A_1, \dots, A_n$. $\square$