Količnički prostori

Количнички простори

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Пресликавање $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ је количничко ако је „на" и за свако $B\subseteq Y$ важи:

$$B\in\mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_X.$$

(или, еквивалентно, $B\in\mathcal{F}_Y \iff f^{-1}(B)\in\mathcal{F}_X$).

$\boxed{\text{Пример}}$ $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ је непрекидно и „на", али није количничко.

$\boxed{\text{Став}}$ Нека су дата пресликавања $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ и нека је f количничко. Тада:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

количничко

g је непрекидно $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ је непрекидно.

$\boxed{1.}$ Нека су $p : X \to Y$, $f : Y \to X$ непрекидна т.д. је $p \circ f = 1_Y$. Тада је p количничко.

▲ ▸ 1_Y је „на" $\Rightarrow$ p је „на"

▸ p је непрекидно ✓

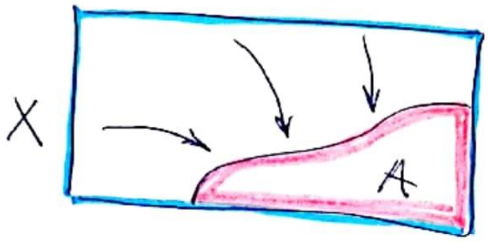
▸ $B \subseteq Y$, $p^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \overset{?}{\Rightarrow} B \in \mathcal{T}_Y$

$$B = 1_Y^{-1}(B) = (p \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(\underbrace{p^{-1}(B)}_{\in \mathcal{T}_X}\big) \in \mathcal{T}_Y.$$

Дакле, p је количничко. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је $A \subseteq X$. Пресликавање $r: X \to A$ је ретракција ако је непрекидно и $(\forall a \in A)\ r(a) = a$.

Приметимо:



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

тј. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A \xRightarrow{\text{зад. 1}} r$ је количничко

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ $A \subseteq X$ је ретракт ако постоји ретракција $r: X \to A$.

$\boxed{2.}$ Нека је $p: X \to Y$ количничко, Y повезан и
$(\forall y \in Y)\ p^{-1}(\{y\})$ је повезан.

Тада је X повезан.

▲ Нека је $f: X \to \{0,1\}$ непрекидно. Показаћемо да је f константно. Нека је $y \in Y$. p је количничко па је „на", па постоји $x \in X$ т.д. $p(x) = y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \{0,1\} \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Нека је $g(y) := f(x)$.

Да ли је g добро дефинисано?

$p^{-1}(\{y\})$ је повезан, па је $f|_{p^{-1}(\{y\})} = \text{const}$,

па јесте добро дефинисано.

Како је p количничко и f непрекидно, то је на основу става на стр. 119. и g непрекидно.

Како је Y повезан, мора бити $g = \text{const}$, а из $f = g \circ p$ закључујемо да је и $f = \text{const}$.

Дакле, X је повезан. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је X тополошки простор, Y скуп и $f : X \longrightarrow Y$ „на". Количничка топологија на Y је $\mathcal{T}_Y \overset{\text{def}}{=} \{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}$. (То је најфинија топологија т.д. је f непрекидно.)

▶ Ако је $\sim$ релација еквиваленције на тополошком простору X, имамо природну пројекцију $\pi : X \xrightarrow{\text{на}} X/\sim$

$$x \mapsto [x]$$

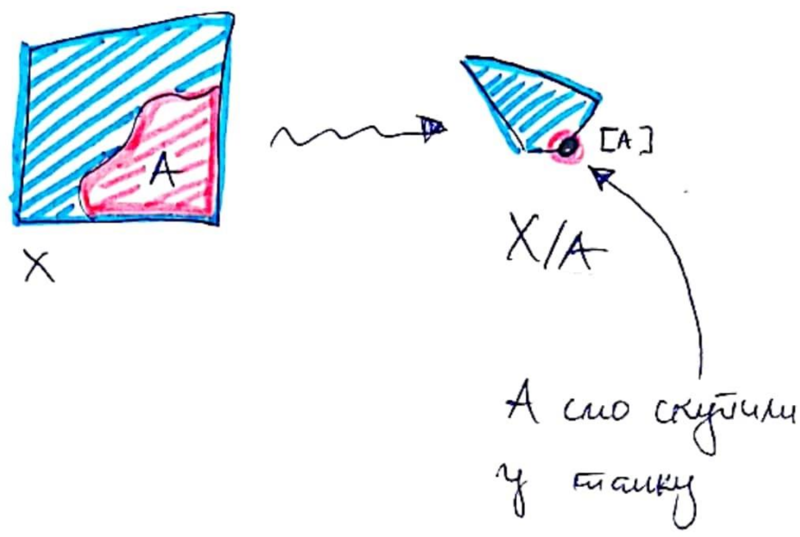
На $X/\sim$ дефинишемо топологију

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \overset{\text{def}}{=} \{ U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}$$

$X/\sim$ је количнички простор.

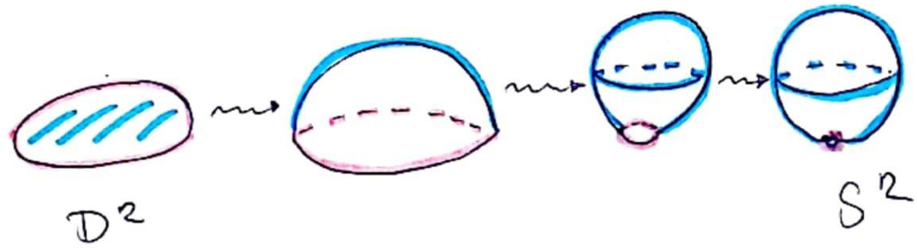
▶ Ако је X тополошки простор и $A \subseteq X$, имамо релацију еквиваленције: $x \sim y \iff x = y \vee x, y \in A$

Тада је $X/A \overset{\mathrm{df}}{=} X/\sim$.

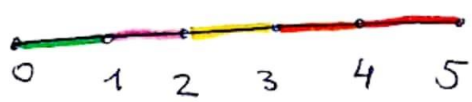


Пример (1) $X/X \cong *$

(2) $D^2/S^1 \cong S^2$



(3)



$/ \{1,2,3,4,5\} \cong$

▶ Ако су X, Y тополошки простори и $f : X \to Y$ непрекидно. Онда $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ задаје релацију еквиваленције, па дефинишемо $X/f \overset{\mathrm{df}}{=} X/\sim$.

За размишљање: Ако је $\sim$ релација на $\mathbb{R}^2$ дата са $(x,y) \sim (z,t) \iff x - z, y - t \in \mathbb{Z}$, како изгледа $\mathbb{R}^2/\sim$?

Брауерова и Борсук - Уламова теорема

Дефиниција Тополошки простор X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно пресликавање $f : X \to X$ има фиксну тачку, тј. $(\exists x \in X)\ f(x) = x$.

Теорема (Брауер) Диск D^n има СФТ за свако $n \in \mathbb{N}$.

1. Доказати Брауерову теорему за $n = 1$.

▲ Нека је $f : \underset{D^1}{\underset{\parallel}{[-1,1]}} \longrightarrow \underset{D^1}{\underset{\parallel}{[-1,1]}}$ непрекидно.

Посматрајмо $F : [-1,1] \to [-1,1]$ дато са $F(x) = f(x) - x$.

Тада важи

$$F(1) = \underbrace{f(1)}_{\leq 1} - 1 \leq 0,$$

$$F(-1) = \underbrace{f(-1)}_{\geq -1} + 1 \geq 0,$$

па постоји $x_0 \in [-1,1]$ т.д. је $F(x_0) = 0$, тј. $f(x_0) = x_0$. ■

2. СФТ је инваријанта хомеоморфизма.

▲ Нека је $h : X \longrightarrow Y$ хомеоморфизам и нека X има СФТ. Даље, нека је $f : Y \to Y$ непрекидно.

Желимо да покажемо да f има ФТ.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, dashed, bend right, "h^{-1}\circ f\circ h"'] & Y \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h^{-1}"] & X
\end{tikzcd}
$$

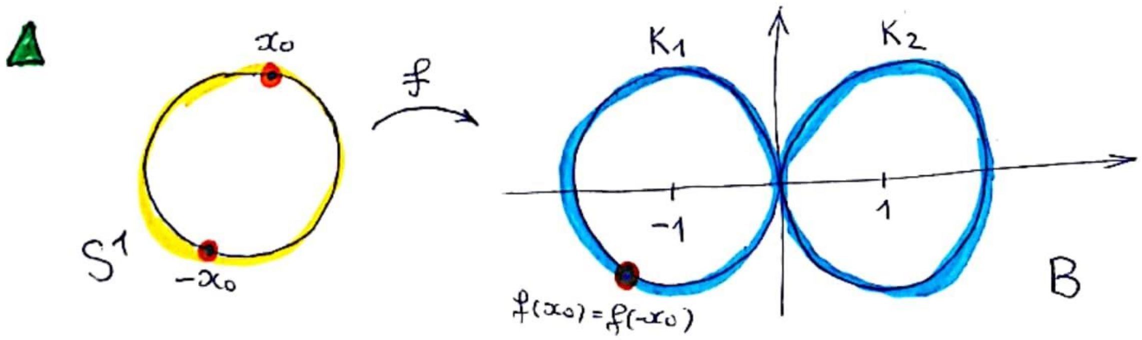
$h^{-1}\circ f\circ h : X \to X$ је непрекидно па има ФТ, тј.

$$(\exists x_0 \in X)\ (h^{-1}\circ f\circ h)(x_0) = x_0.$$

Када применимо h на претходну једнакост, добијамо $f(h(x_0)) = h(x_0)$, тј. $h(x_0)$ је ФТ од f. ■

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Борсук-Улам) Нека је $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно и $n \in \mathbb{N}$. Тада $(\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$.

$\boxed{3.}$ Нека су $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ јединичне кружнице са центрим у -1 и 1 и нека је $B = K_1 \cup K_2$. Ако је $f : S^1 \to B$ непрекидно и $(0,0) \notin f(S^1)$, показати да постоји $x_0 \in S^1$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$.



Нека је $\bar{f} : S^1 \to B \setminus \{(0,0)\}$, $\bar{f}(x) := f(x)$ (сузимо кодомен)

Како је S^1 повезана, то је $\bar{f}(S^1)$ повезан, па или $\overline{f}(S^1) \subseteq K_1$ или $\overline{f}(S^1) \subseteq K_2$.

Б.У.О. $\overline{f}(S^1) \subseteq K_1 \setminus \{(0,0)\} \overset{h}{\approx} \mathbb{R}$

Тада је $h \circ \overline{f} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, па на основу БУТ

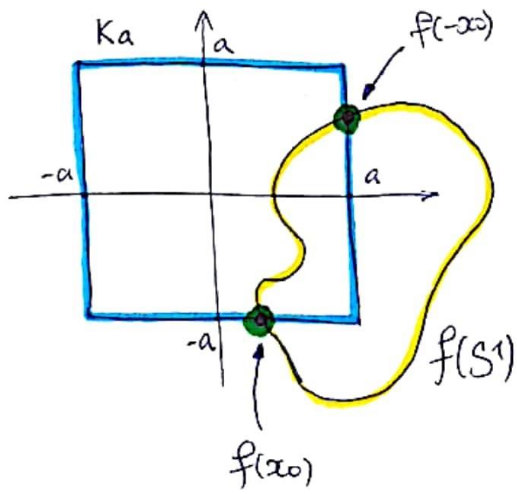
$$(\exists x_0 \in S^1)\ (h \circ \overline{f})(x_0) = (h \circ \overline{f})(-x_0),$$

одакле применом h^{-1} добијамо $\overline{f}(x_0) = \overline{f}(-x_0)$,

тј. $f(x_0) = f(-x_0)$. ▨

$\boxed{4.}$ Нека је $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно и $(0,0) \notin f(S^1)$. Тада постоји $K_a = \partial\left([-a,a]^2\right)$ и $x_0 \in S^1$ т.д. $f(x_0), f(-x_0) \in K_a$.

▲



Нека је $k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ дато са $k(x) = a$, где је $a \in \mathbb{R}$ т.д. $x \in K_a$. Јасно, k је непрекидно. Посматрајмо композицију

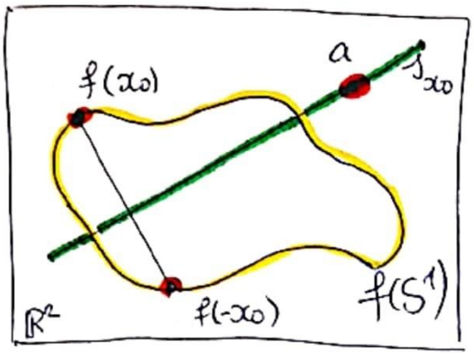
$$S^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{k} \mathbb{R}.$$

$k \circ f$ је непрекидно и $k \circ f : S^1 \to \mathbb{R}$, па на основу БУТ: $(\exists x_0 \in S^1)\ (k \circ f)(x_0) = (k \circ f)(-x_0) =: a$

Тада $f(x_0), f(-x_0) \in K_a$. ▨

$\boxed{5.}$ Нека је $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно т.д. $(\forall x \in S^1)\ f(x) \neq f(-x)$ и нека је s_x симетрала дужи $\overline{f(x)f(-x)}$. Показати да је тада $\bigcup_{x \in S^1} s_x = \mathbb{R}^2$.

▲



Нека је $a \in \mathbb{R}^2$. Тражимо $x_0 \in S^1$ т.д. $a \in s_{x_0}$. Нека је $\varphi: S^1 \to \mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) := d(a, f(x))$.
d и f су непрекидна, па је и φ непрекидно, па на основу БУТ постоји $x_0 \in S^1$ т.д. $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$, тј. $d(f(x_0), a) = d(f(-x_0), a)$ па је $a \in s_{x_0}$. ■

$\boxed{6.}$ Ако је $n \in \mathbb{N}$, показати да су следећа тврђења међусобно еквивалентна:

(1) $(\forall f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно$)(\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$ (БУТ);

(2) Не постоји непрекидно непарно пресликавање $g: S^n \to S^{n-1}$.

▲ (1) $\Rightarrow$ (2): ттс. нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ непрекидно и непарно.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, dashed, "i \circ g"'] & S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$i \circ g$ је непрекидно, па по (1) постоји $x_0 \in S^n$ т.д.

$$i(g(x_0)) = i(g(-x_0)), \text{ одакле је}$$

$$g(x_0) = \underbrace{g(-x_0) = -g(x_0)}_{\text{јер је } g \text{ непарно}} \Rightarrow g(x_0) = 0 \notin S^{n-1} \ \lightning$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Пс. да постоји непрекидно $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ т-д.

$$(\forall x \in S^n)\quad f(x) \neq f(-x).$$

Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ дато са $g(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$.

Тада је g непрекидно и непарно. $\lightning$ $\blacksquare$