2. Нека је дата фамилија тополошких простора $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $A_\lambda \subseteq X_\lambda$ за $\lambda\in\Lambda$.

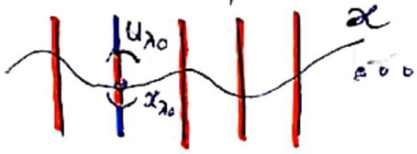
(а) $\overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$;

(б) $\operatorname{int}\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$.

▲ (а) $\subseteq$: Нека је $x\in\overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$. Показујемо $(\forall\lambda\in\Lambda)\, x_\lambda\in\overline{A_\lambda}$.

Нека је $\lambda_0\in\Lambda$, $U_{\lambda_0}\in\mathcal{T}_{\lambda_0}$ произвољан т.д. $x_{\lambda_0}\in U_{\lambda_0}$ и

$U = p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$.



Како је U базни и $x\in U$, то по претпоставци $U\cap\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$, па постоји $y\in U\cap\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

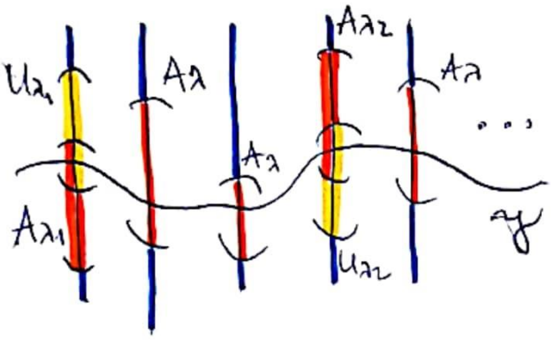
$$\left.\begin{aligned} y\in U &\Rightarrow y_{\lambda_0}\in U_{\lambda_0} \\ y\in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &\Rightarrow y_{\lambda_0}\in A_{\lambda_0}\end{aligned}\right\} \Rightarrow y\in U_{\lambda_0}\cap A_{\lambda_0}$$

$\Rightarrow U_{\lambda_0}\cap A_{\lambda_0}\neq\emptyset \Rightarrow x_{\lambda_0}\in\overline{A_{\lambda_0}}$.

$\supseteq$: Нека је $x\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ и нека је $B=\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i}\in\mathcal{T}_{\lambda_i}$, произвољни базни који садржи x.

Показујемо $B\cap\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$.

Како је $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$, то $A_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset$ (јер $x_{\lambda_i} \in \overline{A_{\lambda_i}}$),
па постоји $y_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i}$.
За $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ одаберемо $y_\lambda \in A_\lambda$ произвољно.



$$\left.\begin{array}{l} y \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\ y \in B \end{array}\right\} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}.$$

Специјално за $A_\lambda = \emptyset$ за неко λ, тврђење тривијално важи.

(б) Нека је $x \in \operatorname{int}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. Тада постоји базни

$B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$ тд. $x \in B \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, тј.

$$B = \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda, \text{ где је } B_\lambda = \begin{cases} U_\lambda, & \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ X_\lambda, & \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \end{cases}$$

Одавде $x_\lambda \in B_\lambda$, за свако $\lambda \in \Lambda$, па је $B_\lambda \subseteq A_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$
(на основу дела (б) из става на стр. 84.)

1° $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i} \subseteq A_{\lambda_i} \Rightarrow x_{\lambda_i} \in \operatorname{int} A_{\lambda_i}$

2° $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $A_\lambda = X_\lambda \Rightarrow x_\lambda \in \operatorname{int} A_\lambda = X_\lambda$.

Дакле, $\operatorname{int}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$. ■

Када би било $A_\lambda \neq X_\lambda$ за бесконачно много λ, онда
$\operatorname{int}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \emptyset$, иначе $\operatorname{int}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$.

3. Нека су X и Y тополошки простори и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Тада $\partial(A \times B) = (\overline{A} \times \partial B) \cup (\partial A \times \overline{B})$.

▲ $\partial(A \times B) = \overline{A \times B} \cap \overline{(A \times B)^c} \overset{(*)}{=}$

$$= \overline{A} \times \overline{B} \cap \left(\overline{A^c \times Y \cup X \times B^c} \right) =$$

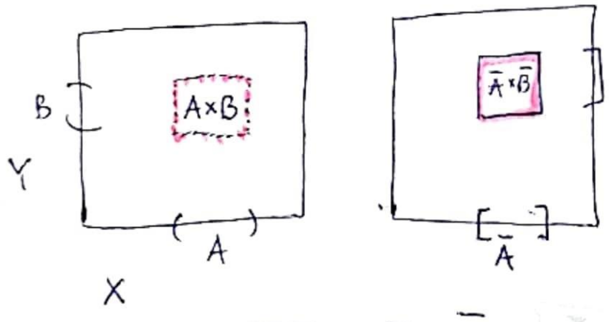
$$= \overline{A} \times \overline{B} \cap \left(\overline{A^c \times Y} \cup \overline{X \times B^c} \right) =$$

$$= \overline{A} \times \overline{B} \cap \left(\overline{A^c} \times Y \cup X \times \overline{B^c} \right) =$$

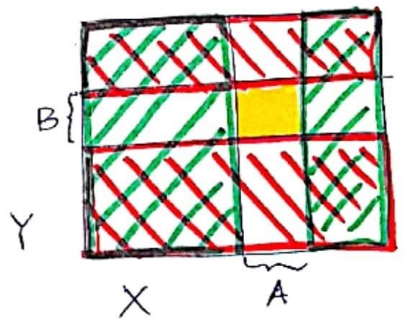
$$= \left(\overline{A} \times \overline{B} \cap \overline{A^c} \times Y \right) \cup \left(\overline{A} \times \overline{B} \cap X \times \overline{B^c} \right) =$$

$$= \partial A \times \overline{B} \cup \overline{A} \times \partial B. \ \blacksquare$$

Илустрација особине $(*)$:



$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$



$(A \times B)^c = \underbrace{A^c \times Y}_{} \cup \underbrace{X \times B^c}_{}$