Тополошки производ

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i=1,\dots,n\}$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \Big\{ x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \ \Big|\ (\forall \lambda \in \Lambda)\ \underbrace{x(\lambda)}_{x_\lambda} \in X_\lambda \Big\}$$

Специјално, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X = \{x : \Lambda \to X\} =: X^\Lambda$.

$\boxed{\text{Став}}$ Ако су $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ две фамилије, онда

(а) $(\forall \lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \subseteq B_\lambda \Rightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$;

(б) $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ и $(\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow (\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \subseteq B_\lambda$;

(в) $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$;

(г) $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B_\lambda)$.

- $(\forall\lambda\in\Lambda)\ X_\lambda \neq \emptyset \Leftrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

Дефинишемо две топологије на производу.

Нека су $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$, тополошки простори.

1 $\mathcal{T}_{box}$ – „box" топологија

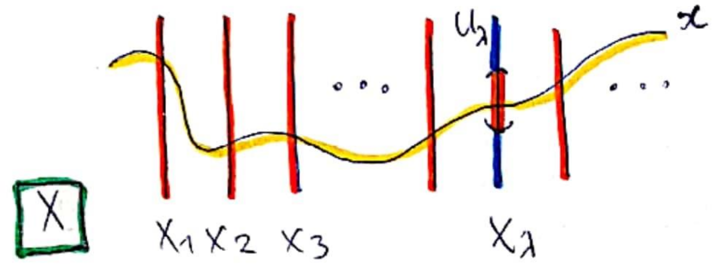
база: $\mathcal{B}_{box} = \{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid (\forall\lambda\in\Lambda)\ U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \}$

2 $\mathcal{T}$ – Тихоновљева топологија

предбаза: $\mathcal{S} = \{ p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda,\ \lambda\in\Lambda \}$,

где су $p_\lambda : X \to X_\lambda$ пројекције ($p_\lambda(x) \overset{def}{=} x_\lambda$)

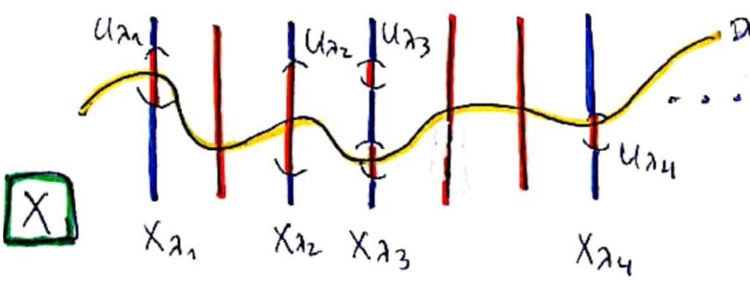
▶ Један елемент предбазе:



$x \in p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \Leftrightarrow x_\lambda = p_\lambda(x) \in U_\lambda$

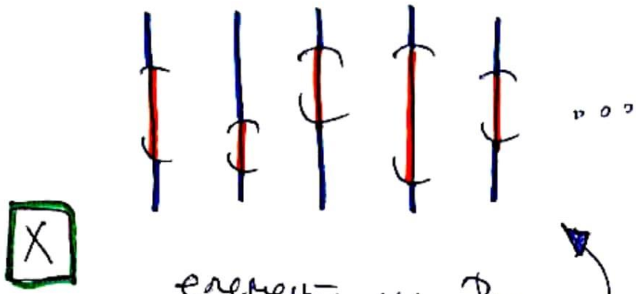
(остале координате су произвољне)

▶ Један елемент базе: $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$



(Задаје се куда пролази „пут")

▶ $\mathcal{T}_{box} \neq \mathcal{T}$, али увек је $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{box}$.



елемент из $\mathcal{B}_{box}$

у $\mathcal{T}$ дајемо само коначно много ограничења $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}$, а у $\mathcal{T}_{box}$ за свако $\lambda\in\Lambda$.

Ако је Λ коначан, онда је $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{box}$.

▶ Ако је $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \mathcal{T}$, онда постоји коначан скуп $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subseteq \Lambda$ и $U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_n}$ отворени т.д.

$$V_\lambda = \begin{cases} U_\lambda, & \lambda \in \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \\ X_\lambda, & \lambda \notin \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \end{cases}$$

Пример Нека је $X_\lambda = \{0,1\} =: X$, $\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}_d$. Тада је $\prod_{n\in\mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$. Нека је $A = \{(0,0,\dots,0,\dots)\}$ – нула низ.
Онда $A \in \mathcal{T}_{box}$, али $A \notin \mathcal{T}$ (јер ниједан базни није у A).

Теорема Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ тополошки простори и $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ производ са топологијом Тихонова. Ако је $f: X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$, онда

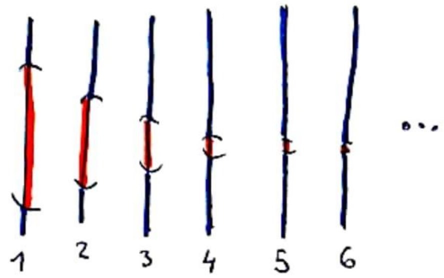
$$f \text{ је непрекидно} \iff (\forall \lambda\in\Lambda)\ p_\lambda\circ f \text{ је непрекидно.}$$

Пример Теорема не важи у box топологији.
Нека је $\Delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Delta(x) := (x,x,x,\dots)$.

$p_n \circ \Delta = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ јесте непрекидно за свако $n\in\mathbb{N}$, али Δ није непрекидно у $\mathcal{T}_{box}$.

Нека је $B := \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}_{box} \subseteq \mathcal{T}_{box}$

$\Delta^{-1}(B) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \mathcal{U}$



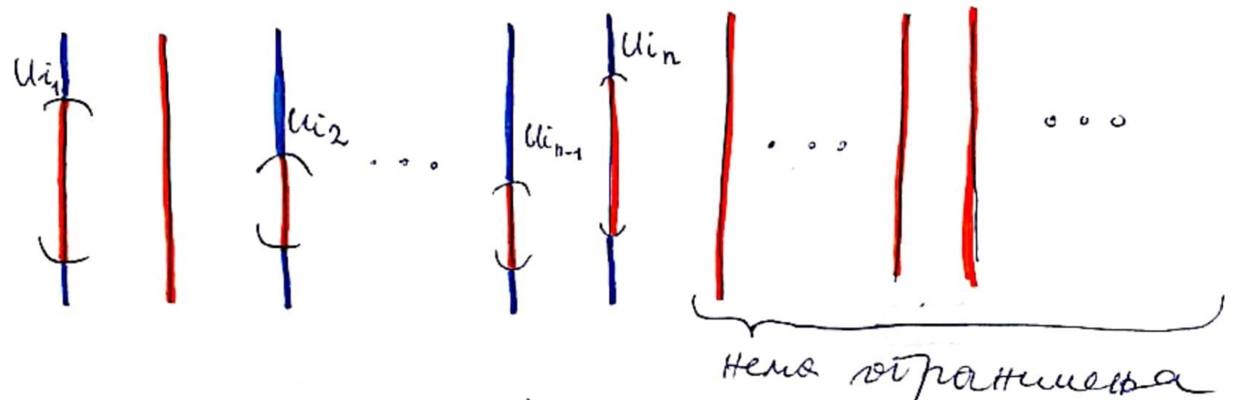
$\Rightarrow \Delta$ није непрекидно.

$\boxed{1.}$ Нека је $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

(а) $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ у $\mathcal{T}$;

(б) Да ли то важи у $\mathcal{T}_{box}$?

▲ (а) Нека је $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $B = \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$, $U_{i_j} \in \mathcal{U}$, $1 \le j \le n$, неки базни скуп т.д. $y \in B$. Покажујемо да је $A \cap B \neq \emptyset$.



„прођемо" кроз све U_{i_j} произвољно, а на даље само 0

Нека је $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ низ дати са

$$x_k = \begin{cases} x_k \in U_k, & \text{за } k \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ 0, & \text{за } k \notin \{i_1, \dots, i_n\} \end{cases}$$

Тада је $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, па $x \in A$ и $x \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow y \in \overline{A}$. Дакле, $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(б) $U = (1,2)^{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{box}$, али $U \cap A = \emptyset$, па је $\overline{A} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (јер нпр. $x_n = \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ није у $\overline{A}$). ■