$\boxed{\text{Није II}}$ Нека је $\mathcal{B}$ произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

За $x \in \mathbb{R}$ постоји $B_x \in \mathcal{B}$ т.д. $x \in B_x \subseteq [x, x+1) \in \mathcal{S}$

Нека је $F : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ дато са $F(x) := B_x$.

За $x \neq y$, БУО $x < y$ је $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ и

$y \in B_y \subseteq [y, y+1)$, па $x \notin B_y$, тј. $B_x \neq B_y$.

Ово управо значи да је F „1-1", па како је $\mathbb{R}$ непребројив, то је и $\mathcal{B}$ непребројив.

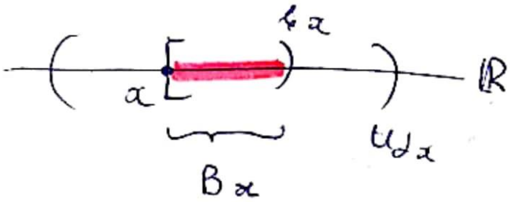
$\boxed{\text{Линделефовост}}$ Нека је $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{S}$

отворен покривач.

За $x \in \mathbb{R}$ постоји $\alpha_x \in A$ т.д. $x \in U_{\alpha_x}$ као и

базни $B_x = [x, b_x) \in \mathcal{S}$ т.д. $x \in B_x \subseteq U_{\alpha_x}$.

Нека је $A := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x, b_x)$.



Идеја: $\mathbb{R} = A \cup A^c$

1. корак: нађемо пребројив покривач од A
2. корак: A^c је пребројив.
3. корак покријемо посебно A и A^c пребројивим покривачима и то је тражени потпокривач од $\mathbb{R}$

1. корак: $(x, b_x) \in \mathcal{U}$ (стандардна топологија на $\mathbb{R}$)

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава II аксиому $\Rightarrow (A, \mathcal{U}_A)$ задовољава II аксиому (јер је то наследно својство)

$\Rightarrow (A, \mathcal{U}_A)$ је Линделефов, па је

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i, b_{x_i}) \leftarrow \text{пребројив потпокривач,}$$

одакле је $\boxed{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha x_i}}$ (*) (јер $(x_i, b_{x_i}) \subseteq U_{\alpha x_i}$)

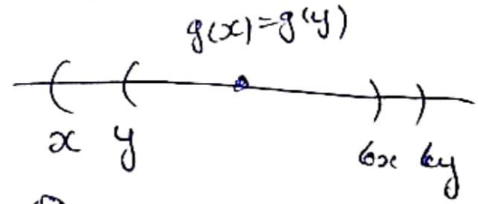
2. корак: A^c је пребројив.

Нека је $g: A^c \longrightarrow \mathbb{Q}$ дефинисано на следећи начин: за $x \in A^c$ имамо $[x, b_x)$ од раније и нека је $q_x \in (x, b_x) \cap \mathbb{Q}$ произвољно.

Дефинишимо $g(x) := q_x$.

g је „1-1": птс. $x < y$ и $g(x) = g(y)$.

$\Rightarrow y \in (x, b_x) \subseteq A$, али $y \in A^c$ ↯



Дакле, g је „1-1", па како је $\mathbb{Q}$ пребројив, то је и A^c пребројив, одакле $\boxed{A^c \subseteq \bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha x}}$ (**)

3. корак: Из (*) и (**) имамо

$$\mathbb{R} = A \sqcup A^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha x_i} \right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha x} \right)}_{\text{пребројиве уније}} \text{ - пребројив потпокривач}$$

Дакле, $(\mathbb{R}, S)$ је Линделефов. ■

▷ I и II аксиома су наследна својства;

▷ Линделефовост је слабо наследна:

X Линделефов и $A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow A$ је Линделефов.

Став Ако је (M, d) метрички простор, онда

M је сепарабилан $\Leftrightarrow$ M задовољава II аксиому.

▲ $\Leftarrow$: увек важи.

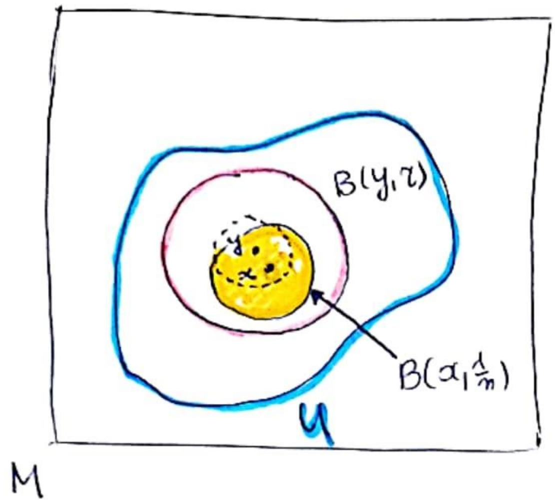
$\Rightarrow$: Нека је $D \subseteq M$ пребројив и $\overline{D} = M$ и нека је

$$\mathcal{B} = \{ B(x, \tfrac{1}{n}) \mid x \in D, n \in \mathbb{N} \}.$$

Показујемо да је $\mathcal{B}$ база од M.

Нека је $U \in \mathcal{T}_M$ и $y \in U$. Тада постоји $r > 0$ т.д.

$B(y, r) \subseteq U$. Б.У.О. нека је $r < 1$.



Како је D свуда густ, то $(\exists x \in D)\ x \in B(y, \frac{r}{3})$.

Даље, постоји $n \in \mathbb{N}$ т.д. $d(x,y) < \frac{1}{n} < \frac{2r}{3}$, па

је $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$, одакле закључујемо да $\mathcal{B}$ јесте база и то пребројива, па је M заиста сепарабилан. ▨

▶ $\mathbb{R}^n$ није компактан али јесте Линделефов јер је метрички и сепарабилан $(\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n)$

▶ $(\mathbb{R}, S)$ није метризабилан.

Заиста, ако тс. да јесте метрички и знамо да је сепарабилан, онда на основу става знамо да задовољава II аксиому пребројивости ↯

(Дакле, није метрички али јесте T_4).

1. Нека је метрички простор (M, d) Линделефов. Доказати да онда он задовољава II аксиому пребројивости.

▲ Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада је $M = \bigcup_{x\in M} B(x, \frac{1}{n})$, па како је M Линделефов, постоји пребројив потпокривач

$$M = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B\left(x_{n,m}, \frac{1}{n}\right).$$

Лако се покаже да је

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x_{n,m}, \frac{1}{n}\right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

пребројива база од M, па M задовољава II аксиому. ■

$\boxed{\text{Лема}}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, $x \in X$ и нека је $\mathcal{B}_x$ локална база у x. Тада

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}_x} B = \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{T}\\ x\in U}} U.$$

$\boxed{2.}$ Ако је X непребројив, онда $(X, \mathcal{T}_{cc})$ не задовољава I аксиому пребројивости.

▲ Пп. $(\forall x\in X)$ имамо пребројиву локалну базу $\mathcal{B}_x$. Тада је

јер за $y \neq x$ је $\{y\}^c \in \mathcal{T}_{cc}$

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}_x} B \overset{\text{лема}}{=} \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{T}_{cc}\\ x\in U}} U = \{x\} \;/^{c}$$

$$\underbrace{\bigcup_{\underbrace{B\in\mathcal{B}_x}_{\text{пребројива унија}}} \underbrace{B^c}_{\text{пребројив}}}_{\text{ПРЕБРОЈИВО}} = \underbrace{X \setminus \{x\}}_{\text{непребројив}} \quad ↯ \quad ■$$

$\boxed{3.}$ Нека је X тополошки простор и $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ две топологије на њему т.д. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

(а) $(X,\mathcal{T}_1)$ сепарабилан $\not\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ сепарабилан

нпр. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ јесте, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_d)$ није;

(б) $(X,\mathcal{T}_2)$ сепарабилан $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_1)$ сепарабилан

(в) $(X,\mathcal{T}_1)$ задовољава I акс. $\not\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ задовољава I акс.

нпр. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_a)$ задовољава, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{cc})$ не;

(г) $(X,\mathcal{T}_2)$ задовољава I акс. $\not\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_1)$ задовољава I акс.

нпр. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_d)$ задовољава, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{cc})$ не;

(д) $(X,\mathcal{T}_1)$ задовољава II акс. $\not\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ задовољава II акс.

нпр. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ задовољава, $(\mathbb{R},\mathcal{S})$ не;

(ђ) $(X,\mathcal{T}_2)$ задовољава II акс. $\not\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_1)$ задовољава II акс.

нпр. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ задовољава, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{cf})$ не;

(е) $(X,\mathcal{T}_1)$ је Линделефов $\not\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ је Линделефов

нпр. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ јесте, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_d)$ није;

(ж) $(X,\mathcal{T}_2)$ је Линделефов $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_1)$ је Линделефов. ■

$\boxed{4.}$ Ако је X регуларан и Линделефов, онда је нормалан.

▲ Нека су $A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$ и $A \cap B = \emptyset$. Желимо да направимо дисјунктне околине ова два скупа.

Ако је $x \in A$, онда $x \in B^c$, па из регуларности имамо

$$(\exists U_x \in \mathcal{T}_X)\ x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq B^c.$$

Слично за $y \in B \subseteq A^c$ имамо

$$(\exists V_y \in \mathcal{T}_X)\ y \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq A^c.$$

Како је Линделефовост слабо наследна и $A, B \in \mathcal{F}_X$, то су A и B Линделефови, па

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

$$B \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y \Rightarrow B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

пребројиви потпокривачи

Нека је $Y_1 := U_1 \setminus \overline{V_1} \in \mathcal{T}_X$

$$Y_2 := U_2 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2}) \in \mathcal{T}_X$$

$$\vdots$$

$$Y_k := U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \ldots \cup \overline{V_k}) \in \mathcal{T}_X$$

$$\vdots$$

и нека је $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k \in \mathcal{T}_X$.

Тада $A \subseteq U$ јер $\overline{V_k} \cap A = \emptyset$, за свако k.

Слично, нека је $W_k := V_k \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \dots \cup \overline{U_k}) \in \mathcal{T}_X$,

и $V := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k \in \mathcal{T}_X$. Јасно, $B \subseteq V$.

Остаје још да покажемо да је $U \cap V = \emptyset$.

Птс, $a \in U \cap V \Rightarrow (\exists k, l \in \mathbb{N})\ a \in Y_k \wedge a \in W_l$.

Б.У.О. $k \geq l$. Тада је

$$a \in Y_k = U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \dots \cup \overline{V_l} \cup \dots \cup \overline{V_k}) \Rightarrow a \notin \overline{V_l}$$

$$a \in W_l = V_l \setminus (\overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_l}) \Rightarrow a \in V_l \quad \lightning$$

Дакле, $U \cap V = \emptyset$, па је X нормалан. $\blacksquare$