Линделефовост, сепарабилност, I и II аксиома пребројивости

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

Дефиниција X је Линделефов ако сваки отворен покривач од X има пребројив потпокривач.

Став X је Линделефов акко свака фамилија $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_X$ са својством пребројивог пресека има непразан пресек.

Дефиниција X је сепарабилан постоји $D \subseteq X$ који је пребројив и свуда густ у X (тј. $\overline{D} = X$).

Дефиниција X задовољава I аксиому пребројивости ако за свако $x \in X$ постоји пребројива локална база $\mathcal{B}_x$.
$\left(\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_x \text{ т.д. } (\forall U \in \mathcal{T}_x)\ x \in U \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}_x)\ x \in B \subseteq U\right)$

Дефиниција X задовољава II аксиому пребројивости ако има пребројиву базу.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{II} &\Rightarrow \mathrm{I} \\ \mathrm{II} &\Rightarrow \text{сепарабилност} \\ \mathrm{II} &\Rightarrow \text{Линделефовост} \end{aligned}}$$

(нигде не важи еквиваленција, видећемо то код $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$)

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I}}$ тривијално.

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \text{сепарабилност}}$ Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X, тј. $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и нека је $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$, произвољно. Узмимо $D := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тада је D пребројив и $\overline{D} = X$, па је X сепарабилан.

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \text{Линделефов}}$ Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X. и $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ – отворен покривач.

За $x \in X$ постоји $U_x \in \mathcal{U}$ т.д. $x \in U_x$, па постоји и $B_x \in \mathcal{B}$ т.д. $x \in B_x \subseteq U_x$. Имамо

$$X = \bigcup_{x \in X} B_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{база је} \\ \text{пребројива}}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i} \text{ – пребројив потпокривач}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је Линделефов, сепарабилан, задовољава I аксиому, али __не__ задовољава II аксиому.

$\boxed{\mathrm{I}}$ за $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ је пребројива локална база.

$\boxed{\text{сепарабилност}}$ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$