Повезаност

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ За тополошки простор X кажемо да је повезан ако не постоји дисконекција тог простора

$\Leftrightarrow$ не постоје отворени (затворени) $U, V \neq \emptyset$ т.д. $U \sqcup V = X$;

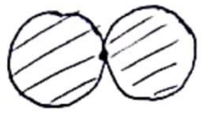
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X \cap \mathcal{F}_X = \{\emptyset, X\}$ - једини отворено-затворени скупови су $\emptyset$ и X;

$\Leftrightarrow$ ако је $f: X \to \{0,1\}$ непрекидно, онда је $f = const$.

Теорема Ако је $f: X \to Y$ непрекидно и X повезан, онда је $f(X)$ повезан.

Теорема Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$ повезан. Ако је $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, онда је и B повезан. (Специјално је и $\overline{A}$ повезан.)

Пример Ако је A повезан, $\operatorname{int} A$ и ∂A не морају бити.

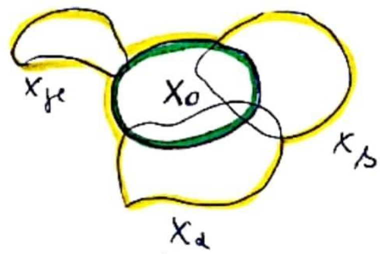
A:  повезан; $B = (a, b)$ повезан;

$\operatorname{int} A$:  неповезан; $\partial B = \{a, b\}$ неповезан.

Теорема Нека су $X_0, X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ повезани и нека је

$$(\forall \alpha \in \mathcal{A})\ X_0 \cap X_\alpha \neq \emptyset.$$

Тада је и $X_0 \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ повезан.



1. Нека је X повезан и A прави подскуп од X. Доказати

(а) $\partial A \neq \emptyset$;

(б) ∂A повезан $\Rightarrow$ $\overline{A}$ повезан.

▲ (а) $X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$

Пп. $\partial A = \emptyset$. Тада је $X = \operatorname{int} A \sqcup \operatorname{ext} A$.

$\operatorname{int} A$ и $\operatorname{ext} A$ отворени и X повезан $\Rightarrow$ бар један од њих је празан.

1° $\operatorname{int} A = \emptyset \Rightarrow \operatorname{ext} A = X \Leftrightarrow \operatorname{int}(A^c) = X \Rightarrow A^c = X \Rightarrow A = \emptyset$ ↯

2° $\operatorname{ext} A = \emptyset \Rightarrow \operatorname{int} A = X \Rightarrow A = X$ ↯

Дакле, $\partial A \neq \emptyset$.

(б) Показујемо да ако је $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ непрекидно, онда је $f = \text{const}$.

Нека је $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ непрекидно. Како је ∂A повезан, то је $f|_{\partial A} = \text{const}$. Нека је БУО $f|_{\partial A} = 0$. Даље, нека је $F : X \to \{0,1\}$ дато са
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in (\overline{A})^c = \operatorname{ext} A \end{cases}$$

Да ли је F непрекидно?

$$\left. \begin{array}{l} F|_{\overline{\operatorname{ext} A}} = 0 \\ F|_{\overline{A}} = f \end{array} \right\}$$
непрекидна и $\overline{\operatorname{ext} A}$, $\overline{A}$ су затворени, па на основу леме о лепљењу је и F непрекидно.

Како је X повезан, то је $F = \text{const}$, тј. $F = 0$, па је и $f = F|_{\overline{A}} = 0$. Дакле, $\overline{A}$ је повезан. ■

2. Испитати повезаност простора:

(а) $(X, \mathcal{T}_a)$; (б) $(X, \mathcal{T}_d)$; (в) $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$; (г) $(\mathbb{Q}^c, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c})$;

(д) $(X, \mathcal{T}_{cf})$; (ђ) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (е) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$; (ж) $(\{0,1\}, \mathcal{D}_{\{0,1\}})$.

▲ (а) $\mathcal{T}_a \cap \mathcal{F}_a = \{\emptyset, X\} \Rightarrow$ повезан;

(б) повезан $\Leftrightarrow |X| = 1$;

(в) $\mathbb{Q} = \underbrace{\left((-\infty,\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}\right)}_{\in\, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}} \sqcup \underbrace{\left((\sqrt{2},+\infty)\cap\mathbb{Q}\right)}_{\in\, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}} \Rightarrow$ није повезан

(г) $\mathbb{Q}^c = \underbrace{\left((-\infty,0)\cap\mathbb{Q}^c\right)}_{\in\, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c}} \sqcup \underbrace{\left((0,+\infty)\cap\mathbb{Q}^c\right)}_{\in\, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c}} \Rightarrow$ није повезан

(д) X није повезан $\Leftrightarrow X = F \sqcup G$, $F, G \in \mathcal{F}_{cf}$ и $F, G \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ и G су коначни $\Rightarrow X$ је коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$.

Закључак:

X је повезан $\Leftrightarrow |X| = 1$ или X бесконачан

X није повезан $\Leftrightarrow 1 < |X| < \infty$

(ђ) $\mathbb{R} = (-\infty,0) \sqcup [0,+\infty) \Rightarrow$ није повезан

$(-\infty,0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,0) \in \mathcal{S}$, $\quad [0,+\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n) \in \mathcal{S}$

(е) $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \Rightarrow$ повезан

(ж) $\mathcal{D}_{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\underbrace{\{0,1\} = \underset{\text{није отворен}}{\{0\}} \sqcup \underset{\text{отворен}}{\{1\}}}_{\text{једини начин да } \{0,1\} \text{ представимо као дисјунктну унију 2 непразна скупа}} \Rightarrow \{0,1\}$ је повезан. ■

3. Нека је (M,d) повезан метрички простор и нека је $|M| \geq 2$. Доказати да је M непребројив.

▲ Нека су $a, b \in M$, $a \neq b$ и нека је $f : M \to \mathbb{R}$

$$f(x) := d(a,x) \quad (\text{растојање је непрекидно}).$$

Приметимо $f(a) = 0$, $f(b) = d(a,b) > 0$.

$$0,\ d(a,b) \in \underbrace{f(M)}_{\text{повезан}} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [0, d(a,b)] \subseteq f(M)$$

$$\Rightarrow f(M) \text{ је непребројив.}$$

Како је $|M| \geq |f(M)|$, то је и M непребројив. ■

4. Доказати да међу следећим скуповима нема хомеоморфних:

(а) $[a,b)$, (a,b), $[a,b]$, S^1;

(б) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ за $n>1$;

(в) S^1, S^n за $n>1$.

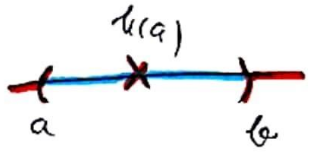
▲ (а) $\underbrace{[a,b),\ (a,b)}_{\text{нису компактни}} \not\simeq \underbrace{[a,b],\ S^1}_{\text{компактни}}$

- $[a,b) \simeq (a,b)$?

птс. да јесу хомеоморфни, тј. да постоји

$h : [a,b) \xrightarrow{\approx} (a,b)$. Тада је

$$\underset{\text{повезан}}{(a,b)} = [a,b) \setminus \{a\} \overset{h}{\approx} \underset{\text{није повезан}}{(a,b) \setminus \{h(a)\}}$$

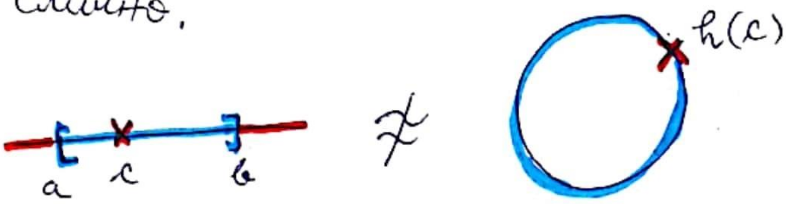


↯

$\Rightarrow [a,b) \not\approx (a,b)$

• $[a,b] \approx S^1$?

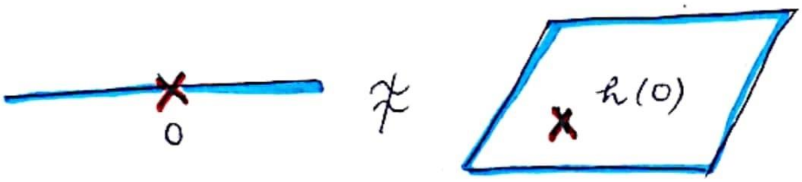
Слично.



$[a,b] \setminus \{c\}$ — није повезан

$S^1 \setminus \{h(c)\}$ — повезан

(б)



$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — није повезан

$\mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$ — повезан

(в) тпс. $S^1 \approx S^n \Rightarrow \underbrace{S^1 \setminus *}_{\approx\, \mathbb{R}} \approx \underbrace{S^n \setminus \{h(*)\}}_{\approx\, \mathbb{R}^n} \Rightarrow \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$ ↯ ■

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$, $V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \setminus \{\emptyset\}$ и $U \approx V$, онда је $m = n$.

Компоненте повезаности

Дефиниција Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и релација $\sim$ дата са

$$(\forall x, y \in X) \quad x \sim y \iff (\exists \text{ повезан } A \subseteq X) \ x, y \in A.$$

Теорема $\sim$ је релација еквиваленције.

Дефиниција Класе C_x, $x \in X$ ове релације називамо компонентама повезаности од X.

Теорема $(\forall x \in X) \ C_x \in \mathcal{F}_X$.

$\blacktriangle$ C_x је повезан, па је и $\overline{C_x}$ повезан. Одавде је $\overline{C_x} \subseteq C_x$, па је $C_x = \overline{C_x}$, тј. C_x је затворен. $\blacksquare$

Пример C_x не мора бити отворен. Посматрајмо $X = \mathbb{Q}$, са топологијом наслеђеном од $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}$.

Свако $q \in \mathbb{Q}$ је једна компонента повезаности, тј. $q \nsim r$ за $q \neq r$. Заиста, нека је $q \neq r$. Тада постоји $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ т.д. БУО $q < x < r$. Претпоставимо супротно да је $C_q = C_r =: A$, тј. да је $q \sim r$.

Тада су $A \cap (-\infty, x]$ и $A \cap [x, +\infty)$ затворени и дисјунктни па чине дисконекцију од A ↯.

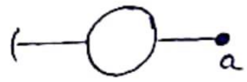
Дакле, класе су $C_q = \{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$. Са друге стране ниједна класа није отворен скуп.

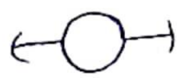
Теорема Број компоненти повезаности је тополошка инваријанта.

1. Да ли су хомеоморфни простори X и Y:

(а) X: 

Y:  ;

(б) X: 

Y:  ?

▲ (а) пп. да постоји $h: X \xrightarrow{\approx} Y$.

$X \setminus \{a\}$ има 3 компоненте повезаности

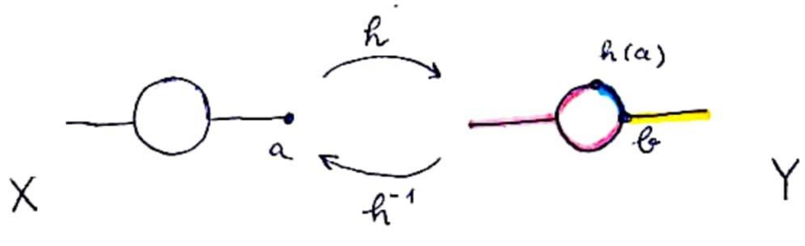
$Y \setminus \{h(a)\}$ има 1 или 4 компоненте повезаности

$\Rightarrow X \not\approx Y$

(б) пп. да постоји $h: X \xrightarrow{\approx} Y$.

$$Y \approx X \setminus \{a\} \overset{h}{\approx} Y \setminus \{h(a)\}$$

Y повезан $\Rightarrow Y \setminus \{h(a)\}$ повезан $\Rightarrow h(a) \in$ кругу



Даље, $\underbrace{(Y \setminus \{h(a)\}) \setminus \{b\}}_{\text{3 компоненте повезаности}} \approx \underbrace{(X \setminus \{a\}) \setminus \{h^{-1}(b)\}}_{\text{1 или 2 компоненте повезаности}}$ ↯

Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори, база од $X \times Y$ је дата са $\mathcal{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$

2. Нека су X и Y тополошки простори. C је компонента повезаности од $X \times Y$ ако и само ако

$$(\exists C_x \subseteq X)(\exists C_y \subseteq Y)\ C = C_x \times C_y.$$

▲ $\Rightarrow$: У датој топологији пројекције $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ су непрекидне (топологија се управо задаје т.д. p_X и p_Y буду непрекидне).

C је компонента повезаности па је повезан, па су и $p_X(C)$ и $p_Y(C)$ повезани.

> Напомена: овде не може бити „=". Нпр. $C = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$, а $p_X(C) \times p_Y(C) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $(\exists C_x \subseteq X)\ p_X(C) \subseteq C_x$

$(\exists C_y \subseteq Y)\ p_Y(C) \subseteq C_y$

Тада је $\underbrace{C}_{\text{компонента повезаности}} \subseteq p_X(C) \times p_Y(C) \subseteq \underbrace{C_x \times C_y}_{\text{повезан}}$

$\Rightarrow$ $C = C_x \times C_y$.

$\Leftarrow$: Нека су $C_x \subseteq X$ и $C_y \subseteq Y$ две компоненте повезаности и $C = C_x \times C_y$. Тада је C повезан па постоји нека компонента повезаности $K \subseteq X \times Y$ т.д. $C \subseteq K$.

Тада је $K = p_X(K) \times p_Y(K)$ (увек важи „$\subseteq$", а овде $p_X(K) \times p_Y(K)$ је повезан и K компонента повезаности, па је „=")

$\Rightarrow \underset{\text{компонента повезаности}}{C_x} \subseteq \underset{\text{повезан}}{p_X(K)}$, $\underset{\text{компонента повезаности}}{C_y} \subseteq \underset{\text{повезан}}{p_Y(K)}$

$\Rightarrow C_x = p_X(K)$, $C_y = p_Y(K)$, па је

$$C = C_x \times C_y = p_X(K) \times p_Y(K) = K.$$

Дакле, C јесте компонента повезаности од $X \times Y$. ■

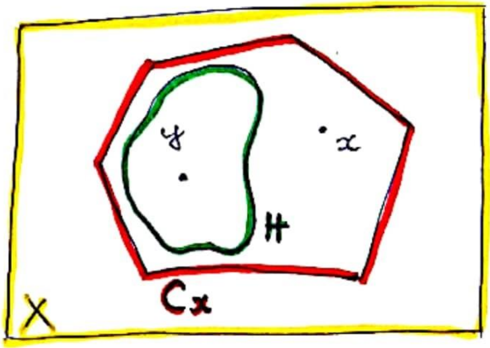
Локална повезаност

Дефиниција Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је локално повезан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \text{ и } H \text{ је повезан.}$$

1. Ако је $(X, \mathcal{T})$ локално повезан и C_x компонента повезаности, онда је $C_x \in \mathcal{T}$.

▲ Нека је $x \in X$, C_x компонента и $y \in C_x$ произвољно.



Како је $X \in \mathcal{O}(y)$, то постоји $H \in \mathcal{O}(y)$ т.д. је повезан.
H и C_x су повезани и садрже y, а C_x је највећи такав (јер је C_x унија свих повезаних који садрже y), па је $H \subseteq C_x$, а одатле је $y \in \underset{\text{отворен}}{\operatorname{int} H} \subseteq C_x$. Дакле, C_x је отворен. ■