2. Да ли су следећи простори локално повезани:
(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$?

▲ (а) Нека су $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ произвољни.
Узмемо $H := \{x\}$ – повезан и $H \subseteq G \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ јесте локално повезан.

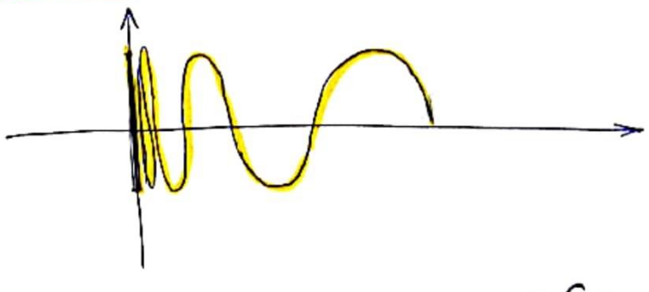
(б) Ако је $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ мора бити баш $G = X$, па узмемо $H := G = X$ – повезан.

(в) Тврдимо: ниједан скуп са бар 2 елемента није повезан.
$(\forall a \in \mathbb{R})\ (-\infty, a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, a) \in \mathcal{S}$ и $[a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, n) \in \mathcal{S}$.
Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ произвољан и $|A| \geqslant 2$ и нека су $a, b \in A$, $b < a$. Тада је

$$A = \underbrace{\big(A \cap (-\infty, a)\big)}_{\in\, \mathcal{S}_A} \sqcup \underbrace{\big(A \cap [a, +\infty)\big)}_{\in\, \mathcal{S}_A},$$

па A није повезан.
Са друге стране, $\operatorname{int}\{x\} = \emptyset$ за свако $x \in \mathbb{R}$.
Дакле ниједан скуп не може бити она околина H из дефиниције (једночлани скупови нису околине, а вишечлани нису повезани), па $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није локално повезан. ▨

Пример Тополошка синусоида није локално повезана.



$$X = \left\{ \left(x, \sin \tfrac{1}{x}\right) \mid x \in (0, +\infty) \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

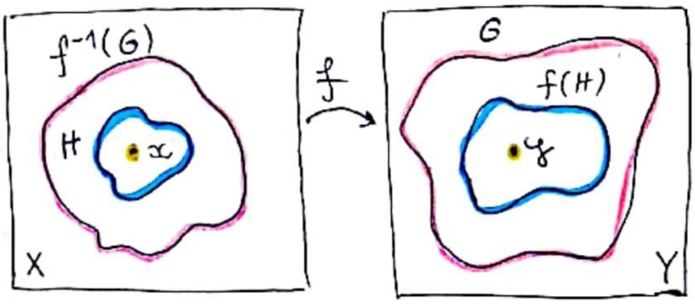
Локална повезаност није непрекидна инваријанта.

$\boxed{\text{Пример}}$ $\mathbb{1}_X : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})$, $(\mathbb{1}_X(x) = x, x \in \mathbb{R})$

$\mathbb{1}$ је непрекидно и $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ је локално повезан, али $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није.

$\boxed{\text{Став}}$ Нека је $f : X \longrightarrow Y$ непрекидно, „на" и отворено. Ако је X локално повезан, онда је и Y локално повезан.

▲ Нека је $y \in Y$, $G \in \mathcal{O}(y)$.



f је „на", па

$(\exists x \in X)\ f(x) = y$.

f је непрекидно $\Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(x)$.

X је локално повезан па $(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq f^{-1}(G)$ и H повезан.

Тада је $f(H)$ повезан, $y \in f(H)$ и $f(H) \subseteq G$.

Још да се уверимо да је $f(H) \in \mathcal{O}(y)$, тј. да $y \in \operatorname{int}(f(H))$.

$$H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in \operatorname{int} H \Rightarrow y \in \underbrace{\underset{\text{отворено}}{f}(\underset{\text{отворен}}{\operatorname{int} H})}_{\text{отворен}} \subseteq f(H), \text{ па}$$

зашта $y \in \operatorname{int}(f(H))$

Дакле, Y је локално повезан. ▨

Путна повезаност

Дефиниција Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор и $\sim$ релација на X дата са

$$x\sim y \iff (\exists u : I\to X) \text{ и непрекидно, } u(0)=x,\ u(1)=y.$$

$\sim$ је релација еквиваленције, а класе при овој релацији називамо компонентама путне повезаности. Ако X има само једну компоненту, кажемо да је путно повезан. Компоненте означавамо са P_x, $x\in X$.

Теорема Ако је X путно повезан, онда је и повезан.

Дефиниција Тополошки простор $(X,\mathcal{T})$ је локално путно повезан ако

$$(\forall x\in X)(\forall G\in \mathcal{O}(x))(\exists H\in\mathcal{O}(x))\ H\subseteq G \text{ и } H \text{ путно повезан.}$$

Теорема Ако је X локално путно повезан, онда

$$(\forall x_0\in X)\ P_{x_0}\in \mathcal{T}_X.$$

Специјално, $P_{x_0} = X\setminus\Big(\bigcup_{\alpha\in A} P_{x_\alpha}\Big)\in \mathcal{F}_X$.

Став Ако је X локално путно повезан, онда

$$X \text{ је повезан} \iff X \text{ је путно повезан.}$$

▲ $\Leftarrow$: увек важи.

$\Rightarrow$: пТС. да X није путно повезан, па имо бар две компоненте путне повезаности, тј. нека је

$\emptyset \neq P_{x_0} \neq X$ компонента. Тада $X = \underbrace{P_{x_0} \sqcup (X \setminus P_{x_0})}_{\text{отворени и непразни}}$,

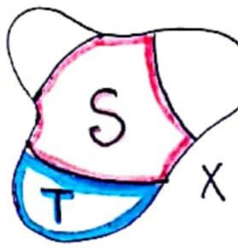
па је X неповезан. ↯ ■

$\boxed{\text{Лема}}$ Ако је $A \subseteq Y$, онда $x \sim_A y \Rightarrow x \sim_Y y$.

($\sim_A$ значи „спојени путем у A")

$\boxed{1.}$ Нека је X путно повезан, $\emptyset \neq S \in \mathcal{F}_X$ путно повезан и T нека компонента путне повезаности од $X \setminus S$. Тада је $T \cup S$ путно повезан.

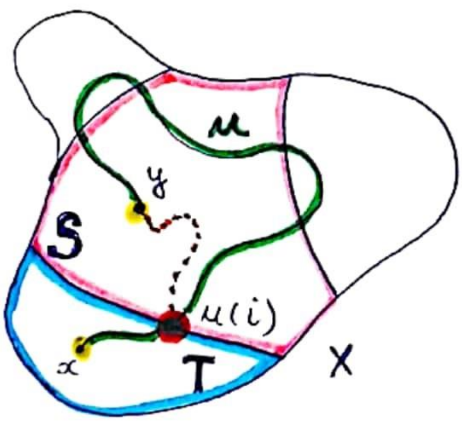
▲ Нека су $x, y \in T \cup S$.



1° $x, y \in T \Rightarrow x \sim_T y \Rightarrow x \sim_{T \cup S} y$;

2° $x, y \in S \Rightarrow x \sim_S y \Rightarrow x \sim_{T \cup S} y$.

3° $x \in T, y \in S$. X је путно повезан па постоји $u : [0,1] \to X$ непрекидно т.д. $u(0) = x$, $u(1) = y$.



Нека је $i := \inf(u^{-1}(S))$. Како је S затворен, то $u^{-1}(S) \in \mathcal{F}_{[0,1]}$, па $i \in u^{-1}(S)$, тј. $u(i) \in S$. При том $i \neq 0$ јер $u(0) = x \notin S$.

Приметимо да је $u([0,i)) \subseteq T$.

Заиста, ако пп. да $(\exists t \in (0,i))\ u(t) \in X \setminus (S \cup T)$, онда $u([0,t]) \subseteq X \setminus S$, па је $u|_{[0,t]}$ пут који спаја $u(0) \in T$ и $u(t)$ из неке друге компоненте. $\lightning$

Дакле, $u([0,i)) \subseteq T$.

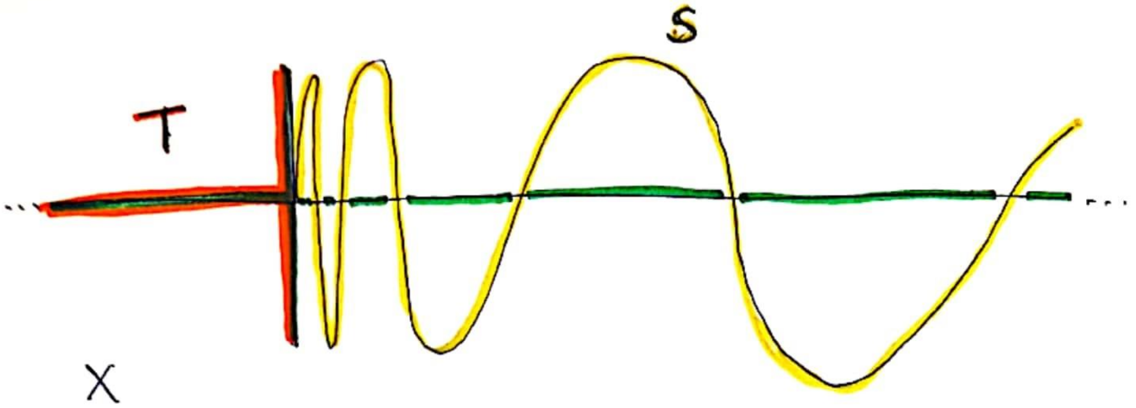
Сада имамо:

$$\left.\begin{array}{l} x \sim_{T \cup S} u(i) \ \text{(путем } u\text{)} \\ u(i) \sim_S y \ \text{(било којим путем)} \end{array}\right\} x \sim_{T \cup S} y \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Примедба}}$. Поставља се питање да ли је било неопходно да је $S \in \mathcal{F}_X$ у претходном задатку. Тај услов смо користили једино кад смо закључили да је $i \in u^{-1}(S)$ јер је и $u^{-1}(S)$ затворен. Јасно, ако $S \notin \mathcal{F}_X$ онда не мора бити $i \in u^{-1}(S)$, али ће бити у $\overline{u^{-1}(S)}$. И да ли се онда $u(i) \in \overline{S}$ може спојити путем са y? То питање се своди на питање да ли је затворење путно повезаног простора путно повезано? Одговор је НЕ. Пример за то је $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\}$. То мотивише овај контрапример:

$$X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\} \cup (\{0\} \times [-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$S = \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\}, \quad T = (\{0\} \times [-1,1]) \cup ((-\infty,0] \times \{0\})$$



X, S јесу путно повезани, T јесте компонента од $X \setminus S$, али $T \cup S$ није путно повезан!
Суштински разлог је то што $\overline{S} = S \cup \{0\} \times [-1,1]$ није путно повезан.

$\boxed{2.}$ Не постоји простор X т.д. је $\mathbb{R} \approx X \times X$.

▲ пп. да постоји такав X и $h : \mathbb{R} \xrightarrow{\approx} X \times X$.

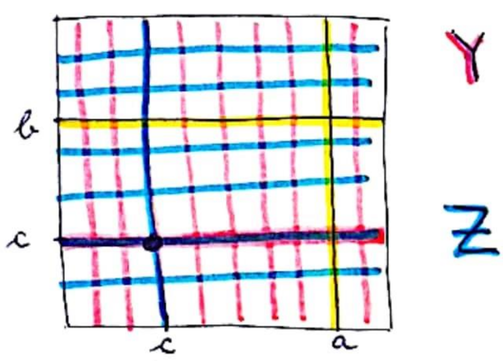
$\mathbb{R}$ повезан $\Rightarrow$ $X \times X$ је повезан $\Rightarrow$ $p_1(X \times X) = X$ је повезан.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ није повезан $\Rightarrow$ $(X \times X) \setminus \{h(0)\}$ није повезан.

Нека је $h(0) = (a, b) \in X \times X$, затим $c \in X \setminus \{a, b\}$ и

$$Y := \left(\bigcup_{\alpha \in X \setminus \{a\}} \{\alpha\} \times X \right) \cup \left(X \times \{c\} \right)$$

$$Z := \left(\bigcup_{\beta \in X \setminus \{b\}} X \times \{\beta\} \right) \cup \left(\{c\} \times X \right)$$



На основу последње теореме на стр. 51, Y и Z су повезани.
Из исте теореме, како је $(c, c) \in Y \cap Z \neq \emptyset$, то је и
$Y \cup Z = X \times X \setminus \{(a, b)\}$ повезан. ↯ ■