Компактност

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је компактан ако сваки отворен покривач од X има коначан потпокривач.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ $A \subseteq X$ је компактан ако је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан. $\mathcal{K}_X \stackrel{def}{=} \{A \subseteq X \mid A \text{ компактан}\}$

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ има својство коначног пресека ако свака коначна подфамилија има непразан пресек.

$\boxed{\text{Став}}$ X је компактан ако и само ако свака фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}_X$ која има својство коначног пресека има непразан пресек.

▲ $\Rightarrow$: Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}_X$ има с.к.п.

ттс. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset \quad /^c$

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = X \text{ - отворен покривач од } X$$

$\Rightarrow$ постоји коначан потпокривач:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}^c = X \quad /^c$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = \emptyset \quad ↯$$

$\Leftarrow$: пос. X није компактан, па постоји отворен покривач $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ који нема коначан покривач. Тада $\emptyset = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c$, па $\{U_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ нема с.к.п. одакле постоје $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ т.д. $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}^c = \emptyset$, тј. $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} = X$ ↯ ■

Последица Ако је X компактан и $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија непразних и затворених скупова ($F_{n+1} \subseteq F_n$, $n\in\mathbb{N}$), онда је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Став $f: X \to Y$ непрекидно и X компактан, онда је и $f(X)$ компактан.

Став Ако је X компактан, онда $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

Став Ако је X Хауздорфов, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$.

Последица X компактан и T_2 $\Rightarrow$ $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

$\boxed{1.}$ Испитати компактност простора:

(а) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (б) $([0,1], \mathcal{S}_{[0,1]})$; (в) $(X, \mathcal{T}_d)$; (г) $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

▲ (а) $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$ – отворен покривач који нема коначан потпокривач $\Rightarrow$ није компактан.

(б) $[0,1] = \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1-\frac{1}{n}) \cup \{1\}$ – нема коначан потпокривач

$\{1\} = [0,1] \cap [1,2) \in \mathcal{S}_{[0,1]}$

$\Rightarrow$ није компактан.

(в) $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ – има коначан потпокривач само ако је X коначан.

Дакле, $(X, \mathcal{T}_d)$ је компактан акко је коначан.

(г) Нека је $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, U_λ^c - коначни.

Нека је $\lambda_0 \in \Lambda$ фиксирано и $U_{\lambda_0}^c = \{x_1, \dots, x_k\}$.

Тада постоје $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k}$ т.д. $x_i \in U_{\lambda_i}$.

Одавде је $X = \bigcup_{i=0}^{k} U_{\lambda_i}$, па је X компактан. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ X је псеудокомпактан ако је свако непрекидно пресликавање $f: X \to \mathbb{R}$ ограничено.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ X је пребројиво компактан ако

Сваки отворен пребројив покривач има коначан потпокривач.

компактност $\Rightarrow$ пребројива компактност $\Rightarrow$ псеудокомп.

$\boxed{2.}$ (а) Ако је X пребројиво компактан, онда је псеудокомпактан;

(б) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан акко је псеудокомпактан.

▲ (а) Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна.

Тада је $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}((-n,n))}_{\in \mathcal{T}_X}$, па постоји коначан

потпокривач $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}((-n_i, n_i))$. Нека је

$N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Онда је $|f(x)| < N$ за свако

$x \in X$, тј. f је ограничена.

(б) $\Rightarrow$: A је компактан $\Rightarrow$ $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ је компактан

$\Leftrightarrow$ $f(A)$ је затворен и ограничен

$\Leftarrow$: Нека је A псеудокомпактан и нека је

$f : A \to \mathbb{R}$ дато са $f(a) = \|a\|$. f је непрекидно, па је ограничено, одакле је A ограничен.

Такође, A је затворен.

тј. $A \neq \bar{A}$ и нека је $a \in \bar{A} \setminus A$ и $f: A \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) := \dfrac{1}{\|x-a\|}$.

f није ограничено јер пошто $a \in \bar{A}$, то постоји низ $(a_n) \subseteq A$ т.д. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$.

Ово је у контрадикцији са претпоставком да је X псеудокомпактан (јер би f било ограничено).

Дакле A је затворен.

Коначно, A је ограничен и затворен у $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A је компактан. $\blacksquare$

Ако је X T_2, онда:

(1) $(\forall x_0 \in X)(\forall K \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})\ x_0 \notin K$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ x_0 \in U,\ K \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset;$$

(2) $(\forall K, L \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})\ K \cap L = \emptyset$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ K \subseteq U,\ L \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset;$$

(3) Ако је X додатно компактан, онда је T_4.