Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X и $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, онда $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2$.

$\boxed{3.}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ компактан и T_2 и $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2$.

(а) $(X, \mathcal{T}_1)$ није T_2;

(б) $(X, \mathcal{T}_2)$ није компактан.

▲ (а) $(X, \mathcal{T})$ је компактан и T_2, па је $\mathcal{K} = \mathcal{F}$.

Такође $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}$.

Пс. да $(X, \mathcal{T}_1)$ јесте T_2. Онда је $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$, одакле

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F} = \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}_1 \subsetneq \mathcal{K},$$

али из $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ следи $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ ↯

(б) Имамо $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2$, $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$.

Пс. $(X, \mathcal{T}_2)$ је компактан. Онда је $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2$, па

$$\mathcal{K} = \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2 \Rightarrow \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{K}_2 \text{ ↯ } \blacksquare$$

$\boxed{4.}$ Ако је $f: X \to Y$ непрекидно, X компактан, Y T_2, онда је f затворено.

▲ $F \in \mathcal{F}_X \xRightarrow{X \text{ компактан}} F \in \mathcal{K}_X \xRightarrow{f \text{ непр.}} f(F) \in \mathcal{K}_Y$

$\xRightarrow{Y\ T_2} f(F) \in \mathcal{F}_Y$ ■

Последица Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, X компактан, Y T_2, онда је f хомеоморфизам.

▲ Став на стр. 42 + претходни задатак. ■

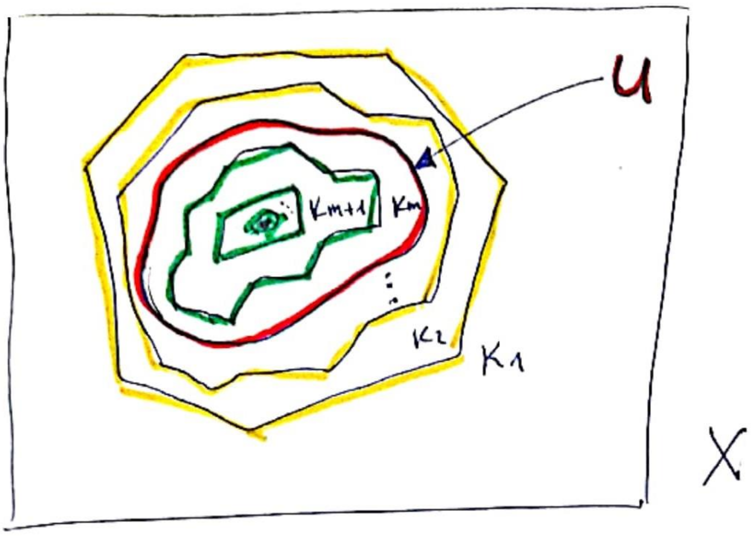
5. Ако је X Хауздорфов, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ опадајућа фамилија, онда је $K := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ непразан, затворен и компактан.

▲ Како је $K_n \in \mathcal{K}_X$ и X T_2, то је $K_n \in \mathcal{F}_X$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Даље, $K_n \subseteq K_1$, за $n \in \mathbb{N}$, па $K_n \in \mathcal{F}_{K_1}$ и K_1 је компактан па је $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ (последица 1 на стр. 93).

Како су сви K_n, $n \in \mathbb{N}$, затворени, то је и $K \in \mathcal{F}_X$.

Коначно, $\underset{\text{затворен}}{K} \subseteq \underset{\text{компактан}}{K_1}$, па је и K компактан. ■

Лема Нека је $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија компактних скупова у X. Тада за сваки $U \in \mathcal{T}_X$ т.д. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq U$ важи: $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq m \Rightarrow K_n \subseteq U$.



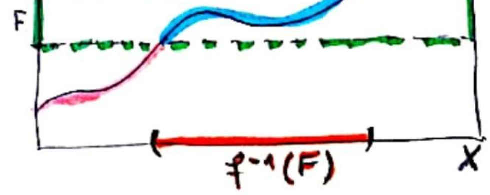
Став Нека је $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија повезаних компактних и непразних скупова у X и X је T_2. Онда је $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ компактан и повезан.

Теорема Ако је Y компактан, онда је $p_X : X\times Y\to X$ затворено.

Теорема X_1 и X_2 су компактни акко је $X_1\times X_2$ компактан.

6. Нека је $f: X\to Y$, Y компактан и T_2.

f је непрекидно $\iff \Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y}$.



▲ $\Rightarrow$: важи јер је Y T_2.

$\Leftarrow$: Нека је $F\in\mathcal{F}_Y$

$$f^{-1}(F) = p_X\Big(\underbrace{(X\times F)\cap\Gamma_f}_{\in\,\mathcal{F}_{X\times Y}}\Big) \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f \text{ је непрекидно.} \blacksquare$$

затворено

затворен

затворен

$\boxed{7.}$ Нека је $f: X \to Y$ затворено, „на" и
$(\forall y \in Y)\ f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X$.

(а) Ако је X T_2, онда је Y T_2;

(б) Ако је $K \in \mathcal{K}_Y$, онда је $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

▲ (а) Нека су $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Тада $f^{-1}(\{y_1\}), f^{-1}(\{y_2\}) \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ и дисјунктни су, па постоје $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_X$ т.д. $f^{-1}(\{y_1\}) \subseteq U_1$ и $f^{-1}(\{y_2\}) \subseteq V_1$. Нека је $U := (f(U_1^c))^c$ и $V := (f(V_1^c))^c$. То ће бити тражене околине од y_1 и y_2.

(б) Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$ и $f^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$.

Ако је $y \in K$ произвољно, онда $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X$ и $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, па постоји коначан потпокривач $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i}^{(y)} =: U(y)$

Приметимо: $$K \subseteq \bigcup_{y \in K} \underbrace{f(\underbrace{U(y)^c}_{\text{затворено}})^c}_{\text{отворено}}$$ затворено

(јер $y \in f(U(y)^c)^c$), па постоје $y_1, \dots, y_m$ т.д.

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} f(U(y_i)^c)^c. \quad / f^{-1}$$

$\Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{m} f(U(y_i)^c)^c\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{f^{-1}(f(U(y_i)^c)^c}_{\ldots \subseteq U(y_i)} \subseteq$

$\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U(y_i) \Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{m_{y_i}} U_{\alpha_j}^{(y_i)}}_{\text{коначна подфамилија.}} \Rightarrow f^{-1}(K) \in \mathcal{K}X.$ ■

Локална компактност

Дефиниција Тополошки простор X је локално компактан ако $(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \wedge H \in \mathcal{K}X$.

- Ако је X T_2, онда:
  X је локално компактан $\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists N \in \mathcal{O}(x))\ \overline{N} \in \mathcal{K}X$.
- Ако је X компактан и T_2, онда је локално компактан.

1. Испитати локалну компактност простора:
(а) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$; (б) $(X, \mathcal{T}_d)$; (в) $(X, \mathcal{T}_a)$; (г) $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

▲(а) $\mathbb{R}$ је T_2 и за $x \in \mathbb{R}$ је $\underbrace{\overline{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}}_{\overline{N}} \in \mathcal{K}\mathbb{R}$, па јесте лок. компактан.

(б) За $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ узмемо $H := \{x\} \in \mathcal{K}X \Rightarrow$ јесте лок. комп.

(в) $G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow G = X$, па узмемо $H := X \Rightarrow$ јесте лок. комп.

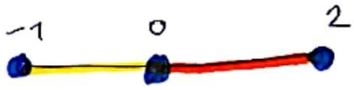
(г) За $x \in \mathbb{R}$ и $G = (-\infty, a) \in \mathcal{O}(x)$ узмемо $H := \left(-\infty, \frac{x+a}{2}\right]$.
Тврдимо H је компактан. Нека је $H \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (-\infty, a_\lambda)$
$\Rightarrow (\exists \lambda_0 \in \Lambda)\ H \subseteq (-\infty, a_{\lambda_0}) \Rightarrow H$ је компактан.

Дакле, $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ је локално компактан. ■

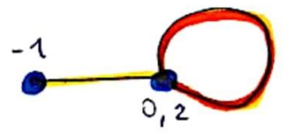
Компактификација

Желимо да од некомпактног направимо компактан простор додавањем тачака. То се може урадити на више начина.

Пример $X = (-1,0) \cup (0,2)$

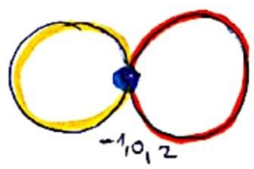
- додано 3 тачке: $[-1,2]$ 

- додано 2 тачке: 

или 

нису хомеоморфни

- додано 1 тачку:



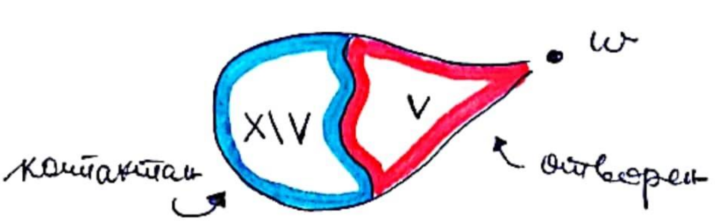
← јединствен простор (до на хомеоморфизам)

Александровљева компактификација (једном тачком)

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. Правимо компактан простор $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

$$X^* \overset{\text{def}}{=} X \cup \{\omega\}$$ (ω – „бесконачно далека тачка")

$$\mathcal{T}^* \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T} \cup \{ V \cup \{\omega\} \mid V \in \mathcal{T},\ X \setminus V \in \mathcal{K}_X \}$$



Особине:

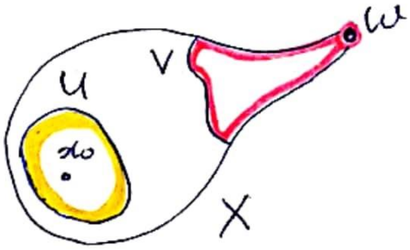
- $(X^*, \mathcal{T}^*)$ је компактан;
- $(X, \mathcal{T}^*_X) = (X, \mathcal{T})$;

  наслеђена топологија
- $(X, \mathcal{T})$ је отворен потпростор од $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Став X^* је T_2 ако и само ако је X T_2 и локално компактан.

▲ $\Rightarrow$: T_2 је наследно својство па је X T_2. Још да се уверимо да је локално компактан. Како је X T_2, то: X је локално компактан $\overset{★}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)(\exists U \in \mathcal{O}(x))\, \overline{U} \in \mathcal{K}_X$

Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Како је X^* T_2 и $x_0 \neq \omega$, то постоје $U, V \in \mathcal{T}^*$ т.д. $x_0 \in U$, $\omega \in V$, $U \cap V = \emptyset$.



$\Rightarrow \quad U \subseteq X^* \setminus V \in \mathcal{K}_X$.

Нека је $V = V' \cup \{\omega\}$, $V' \in \mathcal{T}$ и $X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$ (баш $X \setminus V' = X^* \setminus V$).

Тада је $U \subseteq X \setminus V' \in \mathcal{F}_X$, па $\overline{U} \subseteq X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$, тј. $\overline{U}$ је затворен подскуп компакта, па је и он компактан. На основу ★ закључујемо да је X локално компактан.

$\Leftarrow$: Нека су $x, y \in X^*$, $x \neq y$. Желимо да их „раздвојимо".

$\boxed{1^\circ}$ $x, y \in X^* \setminus \{\omega\} \xRightarrow{X \text{ је } T_2}$ постоје $U, V \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$

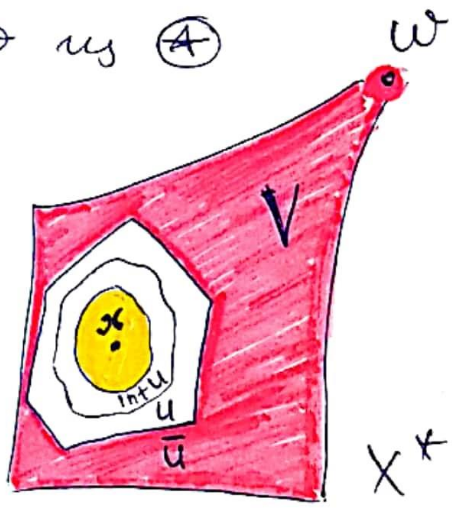
$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$

$\boxed{2^\circ}$ $x \in X$, $y = \omega$

Како је X локално компактан то из (4)

$(\exists U \in \mathcal{O}(x))\ \overline{U} \in \mathcal{K}_x$.

Нека је $V := (\underbrace{X \setminus \overline{U}}_{\in \mathcal{T}}) \cup \{\omega\} \in \mathcal{T}^*$



Тада $x \in \operatorname{int} U$, $\omega \in V$, $(\operatorname{int} U) \cap V = \emptyset$.

Дакле, X^* је T_2. ■

$\boxed{1.}$ Ако је X локално компактан и T_2, онда је $T_{3\frac{1}{2}}$.

▲ X локално компактан и T_2

$\Rightarrow X^*$ је T_2 и компактан

$\Rightarrow X^*$ је T_4 ← није наследно

$\Rightarrow X^*$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ ← наследно

$\Rightarrow X$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ ■

Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори и $f: X \to Y$, оно индукује $f^*: X^* \to Y^*$ са

$$f^*(x) \overset{def}{=} \begin{cases} f(x), & x \in X \\ \omega_Y, & x = \omega_X \end{cases}$$

Ако је f непрекидно, f^* <u>не</u> мора бити непрекидно!

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Пресликавање f је својствено ако је непрекидно и ако $(\forall K \in \mathcal{K}_Y)\ f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

$\boxed{2.}$ (а) f својствено $\Rightarrow$ f^* непрекидно;

(б) f^* непрекидно и Y T_2 $\Rightarrow$ f својствено.

▲ (а) Приметимо да за $B \subseteq Y$ важи:

$$(f^*)^{-1}(B) = f^{-1}(B),$$

$$(f^*)^{-1}(B \cup \{\omega_Y\}) = f^{-1}(B) \cup \{\omega_X\}.$$

Нека је $U \in \mathcal{T}_Y^*$.

$\boxed{1^\circ}$ $\underline{\omega_Y \notin U} \Rightarrow (f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{T}_Y}}{U}) \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_X^*$

$\boxed{2^\circ}$ $\underline{\omega_Y \in U} \Rightarrow U = V \cup \{\omega_Y\},\ V \in \mathcal{T}_Y,\ Y \setminus V \in \mathcal{K}_Y$

$$(f^*)^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in \mathcal{T}_X} \cup \{\omega_X\}$$

Још да ли је $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{K}_X$?

$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus V}_{\in \mathcal{K}_Y}) \in \mathcal{K}_X$ јер је f својствено.

$\Rightarrow (f^*)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X^*$.

Дакле, f^* је непрекидно.

(б) $f^* : X^* \to Y^*$ је непрекидно, па је и $f = f^*|_X$ непр.

Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$. Покажимо $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

Како је Y T_2, то је $K \in \mathcal{F}_Y$, па је $Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y$ и

одатле је $(Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\} \in \mathcal{T}_Y^*$.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{непрекидно}}}{(f^*)^{-1}}\big((Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\}\big) = f^{-1}(Y \setminus K) \cup \{\omega_X\} \in \mathcal{T}_X^*$$

$\Rightarrow X \setminus f^{-1}(Y \setminus K) \in \mathcal{K}_X$, али

$$X \setminus f^{-1}(Y \setminus K) = \big(f^{-1}(K^c)\big)^c = f^{-1}\big((K^c)^c\big) = f^{-1}(K).$$

Дакле, $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$, па је f својствено. ■

Теорема $X \approx Y \Rightarrow X^* \approx Y^*$

▲ $h : X \to Y$ хомеоморфизам $\Rightarrow h$ је бијекција

$\Rightarrow h^*$ је бијекција

Како је h хомеоморфизам, то су h и h^{-1} својствена, па су h^* и $(h^{-1})^*$ непрекидна и међусобно инверзна. Дакле, h^* је хомеоморфизам. ■

3. Ако је X компактан и T_2, онда за $x_0 \in X$ је

$$\left(X \setminus \{x_0\}\right)^* \simeq X.$$

▲ Нека је $X_0 := X \setminus \{x_0\}$. Дефинишимо $f : X_0^* \to X$

са $f(x) := \begin{cases} x, & x \neq \omega \\ x_0, & x = \omega \end{cases}$

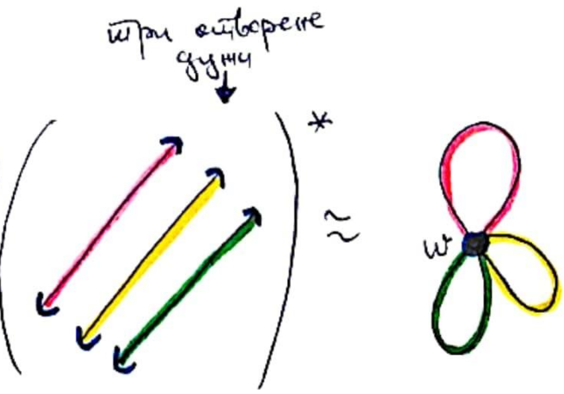
- ▸ f је бијекција
- ▸ f је непрекидно (слично као у 2. зад.)
- ▸ $f : \underset{\text{компакт}}{X_0^*} \longrightarrow \underset{T_2}{X}$ па је затворено

$\Bigg\}$ f је хомеоморфизам. ■

4. Наћи компактификације једном тачком следећих простора:

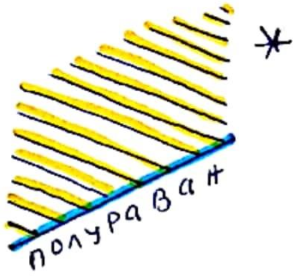
(а) $(\mathbb{R}^n)^* \simeq (S^n \setminus \{*\})^* \simeq S^n$

(б)



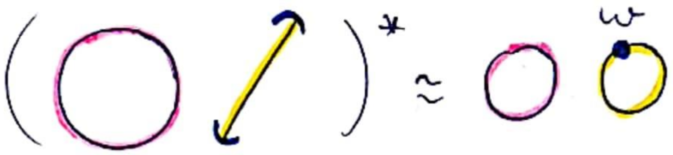
(в)

(г)

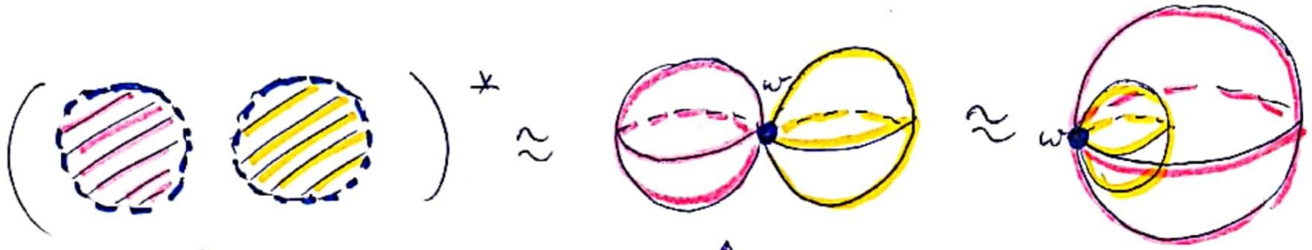


$\approx \left(D^2 \setminus K\right)^* \approx D^2 \approx$

(д)



(ђ)



отворени дискови

приметимо да полазни простори нису хомеоморфни иако компактификације јесу.

(е)

$\approx$

(ж)

(з)

(и)

бесконачан цилиндар

уштинута сфера

(ј) $\left(S^2 \setminus \{A, B, C\}\right)^* \approx$

различите на S^2

∎