Дефиниција $(X, \mathcal{T}_X)$ је регуларан простор ако

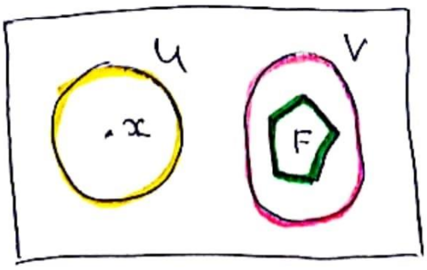
$$(\forall x\in X)(\forall F\in \mathcal{F}_X)\ x\notin F \Rightarrow (\exists U,V\in \mathcal{T}_X)\ U\cap V=\emptyset \land x\in U \land F\subseteq V.$$

Дефиниција X је T_3 простор ако је T_1 и регуларан.

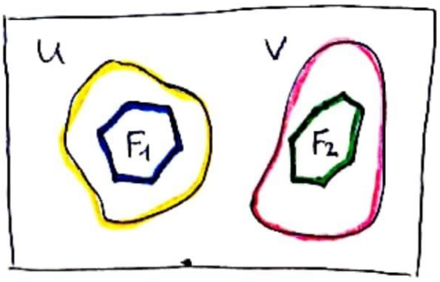
Дефиниција $(X, \mathcal{T}_X)$ је нормалан простор ако

$$(\forall F_1, F_2\in \mathcal{F}_X)\ F_1\cap F_2=\emptyset \Rightarrow (\exists U,V\in \mathcal{T}_X)\ U\cap V=\emptyset \land F_1\subseteq U \land F_2\subseteq V.$$

Дефиниција X је T_4 простор ако је T_1 и нормалан.



T_3



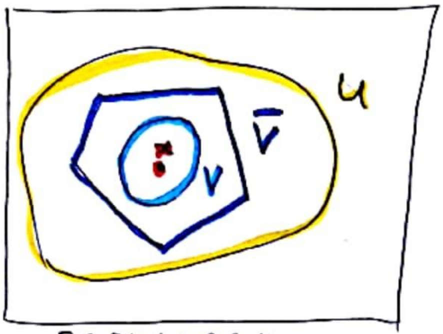
T_4

Теорема X је регуларан ако и само ако

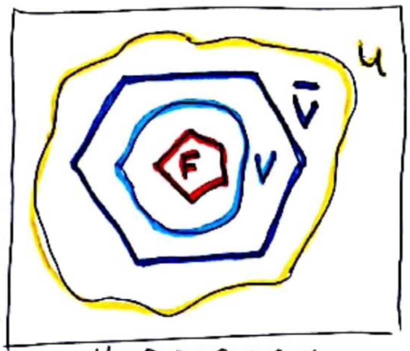
$$(\forall x\in X)(\forall U\in \mathcal{O}(x))(\exists V\in \mathcal{T}_X)\ x\in V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$

Теорема X је нормалан ако и само ако

$$(\forall F\in \mathcal{F}_X)(\forall U\in \mathcal{O}(F))(\exists V\in \mathcal{T}_X)\ F\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$



регуларан



нормалан

Пример T_3 и T_4 нису непрекидне инваријанте.

$$(\mathbb{R},\mathcal{U}) \xrightarrow{\mathbb{1}} (\mathbb{R},\mathcal{D}) \text{ је непрекидно}$$

јесте T_3, T_4 није ни T_1

Пример Сваки метрички простор је T_4.

$$\boxed{M \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1}$$

Наследност: Ако је X регуларан, онда је и $A\subseteq X$ рег.

Нормалност није наследна, али је слабо наследна, тј. преноси се на затворене потпросторе.

X нормалан и $A\in\mathcal{F}_X \Rightarrow A$ је нормалан.

$\boxed{4.}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4.

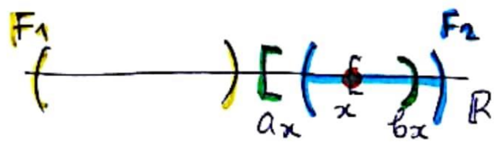
▲ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_1

Нека су $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ и Б.У.О. $x < y$.
Узмимо $U := [x, y)$, $V := [y, y+1)$.
Тада $U, V \in \mathcal{S}$, $U \cap V = \emptyset$ и $x \in U$, $y \in V$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је нормалан

Нека су $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.
Ако $x \in F_2 \Rightarrow x \in F_1^c$, па постоји базни $[a_x, b_x)$ т.д.

$$x \in [a_x, b_x) \subseteq F_1^c,$$



одакле је $x \in [x, b_x) \subseteq F_1^c$.

Слично за $x \in F_1$ постоји c_x т.д. $[x, c_x) \subseteq F_2^c$.

Нека је

$$U_1 := \bigcup_{x \in F_1} [x, c_x),$$

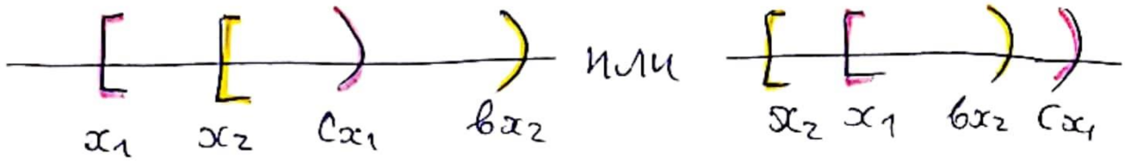
$$U_2 := \bigcup_{x \in F_2} [x, b_x).$$

Тада је $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$.

Још да проверимо да ли су U_1 и U_2 дисјунктни.

пс. $(\exists \alpha \in U_1 \cap U_2)$

$$\Rightarrow (\exists x_1 \in F_1)(\exists x_2 \in F_2) \ \alpha \in \underbrace{[x_1, c_{x_1})}_{\subseteq F_2^c} \cap \underbrace{[x_2, b_{x_2})}_{\subseteq F_1^c}$$



Тада или $x_2 \in [x_1, c_{x_1}) \subseteq F_2^c$ ↯

или $x_1 \in [x_2, b_{x_2}) \subseteq F_1^c$ ↯

Дакле, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, па је $(\mathbb{R}, S)$ нормалан.

Коначно, $(\mathbb{R}, S)$ је T_4. ■

$\boxed{\text{Пример}}$ $(\mathbb{R}, S)$ је T_4, али $(\mathbb{R}, S) \times (\mathbb{R}, S)$ није T_4 јер није нормалан.

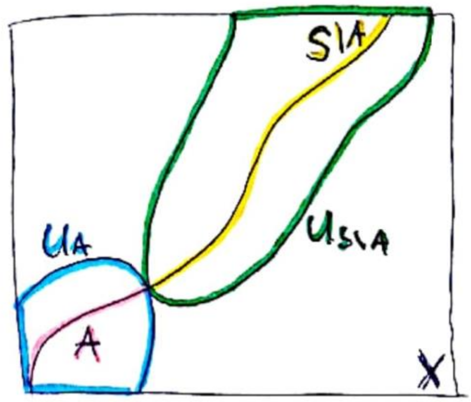
(Ово ћемо доказати касније)

Џонсова лема Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, D свуда густ у X, $S \subseteq X$ дискретан (тј. $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$). Ако је S затворен и $|S| \geq 2^{|D|} = |\mathcal{P}(D)|$, онда X није нормалан.

▲ Пп. да X јесте нормалан.

Нека је $A \subseteq S$. Како је $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$, то $A \in \mathcal{F}_S$ и $S \setminus A \in \mathcal{F}_S$, па како је и S затворен, то $A, S \setminus A \in \mathcal{F}_X$.

Како је X нормалан, то постоје $U_A, U_{S\setminus A} \in \mathcal{T}_X$ т.д. $U_A \cap U_{S \setminus A} = \emptyset$ и $A \subseteq U_A$, $S \setminus A \subseteq U_{S\setminus A}$.



Нека је $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ дато са

$$f(A) := U_A \cap D \neq \emptyset \quad (\text{јер } \overline{D} = X)$$

Показаћемо да је f „1-1".

Нека су $A, B \subseteq S$, $A \neq B$. Б.У.О. $A \setminus B \neq \emptyset$, тј.

$$A \cap B^c_S = A \cap (S \setminus B) \neq \emptyset, \ (*)$$

Приметимо да је

$$(U_A \cap D) \cap U_{S\setminus B} \neq \emptyset \quad (**)$$

јер $U_A \cap U_{S\setminus B}$ је отворен и непразан због $(*)$, па је у пресеку са D непразан (јер $\overline{D} = X$).

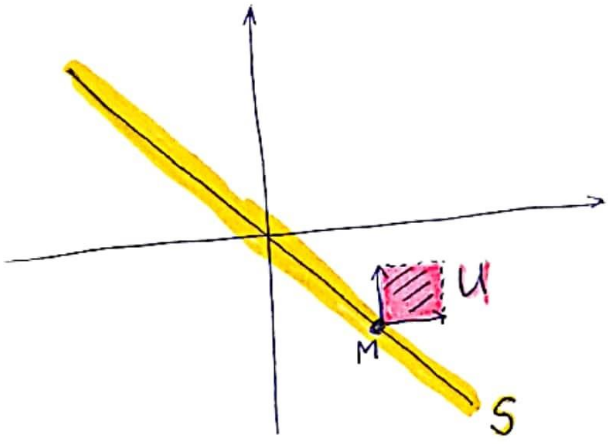
Такође, $(\mathcal{U}_B \cap D) \cap \mathcal{U}_{S \setminus B} = \emptyset$ $(\overset{*}{**})$ из дефиниције скупова $\mathcal{U}_B$ и $\mathcal{U}_{S\setminus B}$.

Сада из $(**)$ и $(\overset{*}{**})$ јасно следи да је $\mathcal{U}_A \cap D \neq \mathcal{U}_B \cap D$, тј. $f(A) \neq f(B)$ па је $\underbrace{f \text{ „1-1"}}$. Одавде је

$$|S| < |\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)| \quad \lightning \quad \blacksquare$$

Последица $(\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан.

▲ $S := \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $D := \mathbb{Q}^2$.



- $\overline{D} = \mathbb{R}^2$
- $\{M\} = \mathcal{U} \cap S \in \mathcal{T}_S$, па је зашта $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$.
- S је затворен.
- $|S| = \mathfrak{c} = 2^{|D|} = |\mathcal{P}(D)|$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан. $\blacksquare$

5. Нека је $f: X \to Y$ непрекидно, „на" и затворено.

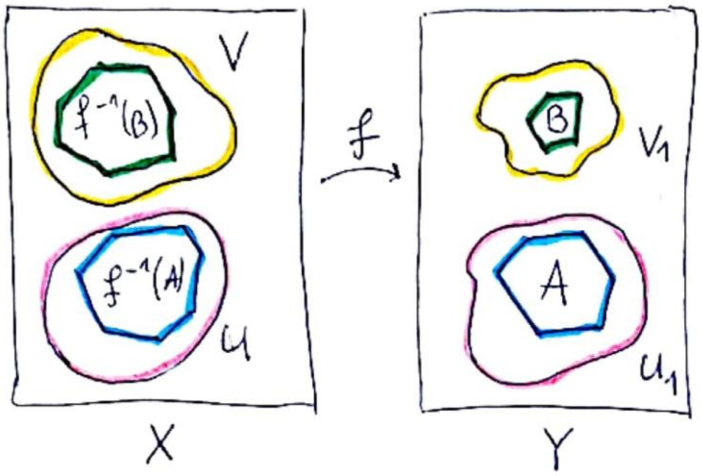
(а) Ако је X нормалан, онда је и Y нормалан;

(б) Ако је X T_4, онда је и Y T_4.

▲ (а) Нека су $A, B \in \mathcal{F}_Y \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B = \emptyset$.

Тада је $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$ и $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

X је нормалан па постоје $U, V \in \mathcal{T}_X$ т.д. $U \cap V = \emptyset$ и $f^{-1}(A) \subseteq U$, $f^{-1}(B) \subseteq V$. Нека је:



$$U_1 := \big(\underbrace{f(U^c)}_{\text{затворено}}\big)^c \in \mathcal{T}_Y$$

$$V_1 := \big(\underbrace{f(V^c)}_{\text{затворено}}\big)^c \in \mathcal{T}_Y$$

Тада $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_Y$ и $A \subseteq U_1$, $B \subseteq V_1$. Још да се уверимо да су дисјунктни.

$$U_1 \cap V_1 = \big(f(U^c)\big)^c \cap \big(f(V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(U^c) \cup f(V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(U^c \cup V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f((U \cap V)^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(\underbrace{\emptyset^c}_{X})\big)^c \underset{f \text{ је „на"}}{=} Y^c = \emptyset.$$

Дакле, Y је нормалан.

(б) Још треба показати да ако је X T_1, онда је и Y T_1.

Y је $T_1 \iff (\forall y \in Y)\ \{y\} \in \mathcal{F}_Y$.

Нека је $y \in Y$. Како је f „на“, то постоји $x \in X$ т.д. $f(x) = y$. Тада је $f(\{x\}) = \{y\} \in \mathcal{F}_Y$.

затворено

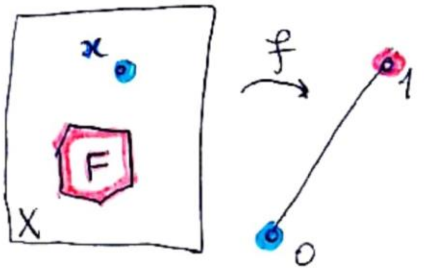
$\Rightarrow$ Y је T_1, па је и T_4.

Урисонова лема X је нормалан ако и само ако

$(\forall A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\})\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists$ непрекидно $f : X \to [0,1]$ т.д. $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$

Дефиниција Простор X је потпуно регуларан ако $(\forall x \in X)(\forall F \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\})\ x \notin F \Rightarrow \exists$ непр. $f : X \to [0,1]$ т.д. $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$.

Дефиниција Простор X је $T_{3\frac{1}{2}}$ ако је T_1 и потпуно регуларан.



Приметимо: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.

6. Ако је X $T_{3\frac{1}{2}}$, повезан и $|X| \geq 2$, онда је X непребројив.

▲ Нека су $x, y \in X$, $x \neq y$. Како је X T_1, то је $\{y\} \in \mathcal{F}_X$ па постоји непрекидно $f : X \to [0,1]$ т.д.

$f(x)=0$, $f(\{y\})=1$. Како је X повезан, то је и $f(X)$ повезан, па пошто $0,1\in f(X)$, онда и $[0,1]\subseteq f(X)$. Дакле, $f(X)$ је непребројив, па је и X непребројив. ■

Конвергенција низова

Дефиниција $x=\lim_{n\to\infty}x_n \overset{def}{\iff} (\forall U\in\mathcal{O}(x))(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})$

$$n>n_0 \Rightarrow x_n\in U.$$

Теорема Ако је X Хауздорфов, гранична вредност низа је јединствена (уколико постоји).

1. Описати све конвергентне низове у:

(а) $(X,\mathcal{T}_d)$; (б) $(X,\mathcal{T}_a)$; (в) $(X,\mathcal{T}_{cc})$.

▲ (а) Ако је $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, онда следујошто за $U:=\{x\}\in\mathcal{O}(x)$ постоји $n_0\in\mathbb{N}$ т.д. за $n>n_0$ важи $x_n\in\{x\}$. Дакле, конвергентни низови су они који су константни почев од неког члана.

(б) Ако је $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, могуће је за U из деф. узети само $U:=X$, па ће сваки низ бити конвергентан (и сваком низу је свака тачка из X гранична вр.)

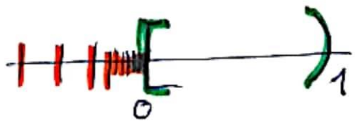
(б) Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $U := (X \setminus \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_{cc}$.
Тада $U \in \mathcal{O}(x)$ па $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow x_n \in U$,
а то је једино могуће за $x_n = x$.
Дакле, конвергентни низови су исти као у (а). ■

2. Да ли у $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ конвергирају $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=-\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$?

▲ Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X и $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ и ако $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x у $\mathcal{T}_2$, онда он конвергира ка x и у $\mathcal{T}_1$.
Овде имамо $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ у $\mathcal{U}$, па ако неки од ових низова конвергира у $\mathcal{S}$, то мора бити ка 0.

► $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: Ако је $U\in\mathcal{O}(0)$ онда $(\exists\varepsilon>0)\ [0,\varepsilon)\subseteq U$, па је за $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ и $n>n_0$ важи $a_n\in U$. Дакле,
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ у $\mathcal{S}$.

► $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $[0,1)\in\mathcal{O}(0)$, али $[0,1)\cap\{-\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}=\emptyset$, па овај низ не конвергира.

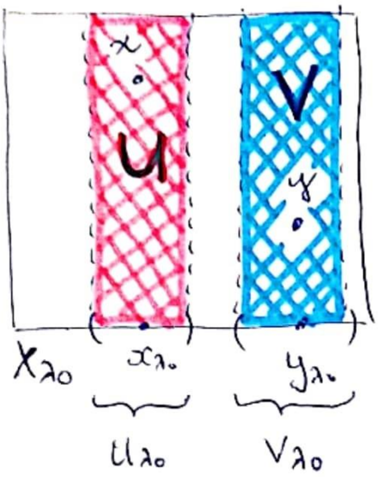


■

$\boxed{4.}$ $T_{3\frac{1}{2}}$ је продуктивно својство (тј. X_λ $T_{3\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \prod X_\lambda$ $T_{3\frac{1}{2}}$).

▲ Нека су X_λ, $\lambda \in \Lambda$, $T_{3\frac{1}{2}}$ простори.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ је T_1 : Нека су $x, y \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $x \neq y$. Тада постоји $\lambda_0 \in \Lambda$ т.д. $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$, па како је X_{λ_0} T_1, то постоје $U_{\lambda_0}, V_{\lambda_0} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}$ т.д. $x_{\lambda_0} \in U_{\lambda_0} \setminus V_{\lambda_0}$ и $y_{\lambda_0} \in V_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0}$.



Узмимо $U := p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0}) \in \mathcal{T}$ и $V := p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0}) \in \mathcal{T}$. Тада је $x \in U \setminus V$, $y \in V \setminus U$, па је $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ T_1.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ је потпуно регуларан:

Нека је $\tilde{x} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ и $F \neq \emptyset$ затворен у $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ т.д. $\tilde{x} \notin F$.

Тражимо непрекидну функцију т.д. $f(\tilde{x}) = 1$, $f(F) = \{0\}$.

Како $\tilde{x} \in F^c \in \mathcal{T}$, то постоји базни $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$, т.д. $\tilde{x} \in B \subseteq F^c$. Сви X_{λ_i} су потпуно регуларни, па постоје функције $f_i : X_{\lambda_i} \longrightarrow [0,1]$ т.д. $f_i(\tilde{x}_{\lambda_i}) = 1$, $f_i(U_{\lambda_i}^c) = \{0\}$.

Нека је $f : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to [0,1]$ дата са $f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_i(p_{\lambda_i}(x))$.

- ▷ f је непрекидна;
- ▷ $f(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_{\lambda_i}) = 1$;
- ▷ $x \in F$, да ли је $f(x) = 0$?

$F \subseteq B^c \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n\})\ x_{\lambda_j} \notin U_{\lambda_j} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_j(x_{\lambda_j}) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

Дакле $f(F) = \{0\}$.

Коначно, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ је потпуно регуларан. ▨