Аксиоме сепарације

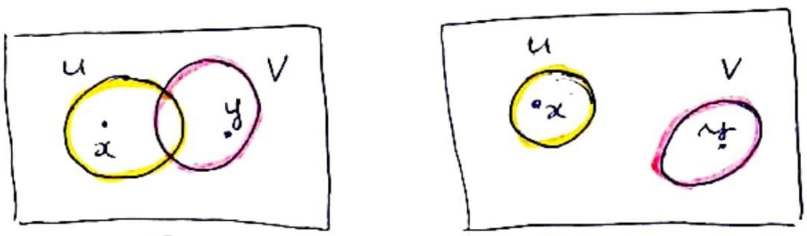
Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

Дефиниција X је T_1 простор ако

$$(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ x\in U\setminus V \wedge y\in V\setminus U.$$

Дефиниција X је T_2 простор ако је T_1 и $U\cap V=\emptyset$,

тј. $(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ U\cap V=\emptyset \wedge x\in U \wedge y\in V.$



T_2 простор се другачије зове Хаусдорфов.

Теорема X је T_1 ако и само ако $(\forall x\in X)\ \{x\}\in\mathcal{F}_X$.

Теорема X је T_2 ако и само ако $\Delta_X\in\mathcal{F}_{X\times X}$, где је

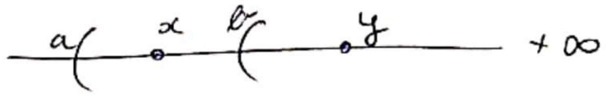
$$\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}\ \text{дијагонала.}$$

Пример T_1 и T_2 нису непрекидне инваријанте.

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D})$ је непрекидно

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ – T_1 и T_2,

$(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ – ни T_1 ни T_2



(не постоје U и V из деф.)

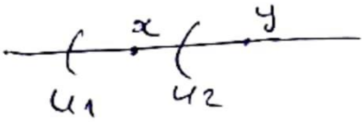
1. Који од наредних простора су T_2?

(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$; (г) $(X, \mathcal{T}_x)$; (д) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (ђ) $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

(а) јесте T_2. $U := \{x\}$, $V := \{y\}$.

(б) јесте акко $|X| = 1$.

(в) није.



$y \in U_1 \cap U_2$, тј. нема дисјунктних скупова у $\mathcal{D}$.

(г) није јер нема дисјунктних у $\mathcal{T}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\} \cup \{\emptyset\}$

(д) Знамо да је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$, па како је $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ T_2, то је и $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ T_2 (ако се две тачке могу раздвојити у мањој топологији, сигурно могу и у већој.)

(ђ) 1° $|X| < \infty \Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$ па јесте T_2;

2° $|X| = \infty \Rightarrow$ нема дисјунктних отворених скупова јер пп. $U, V \in \mathcal{T}_{cf}$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \underbrace{U^c \cup V^c}_{\text{коначни}} = \underbrace{X}_{\text{бесконачан}}$ ↯

Наследност: Ако је X T_1 или T_2 и $A \subseteq X$, онда је и A T_1 односно T_2.

$\boxed{\text{Теорема}}$ У T_2 простору гранична вредност низа је јединствена.

$\boxed{\text{Пример}}$ У $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ гранична вредност није јединствена. Нека је $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је $(\forall a \in (-\infty, 0]) \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$\boxed{\text{Став}}$ Ако су X и Y тополошки простори, Y T_2 и $f, g : X \to Y$ непрекидна, онда је

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X .$$

$\boxed{\text{Став}}$ Нека су X и Y тополошки простори, Y T_2 и $f, g : X \to Y$ непрекидна т.д. $f = g$ на скупу D који је густ у X (тј. $\overline{D} = X$). Тада $f = g$ на X.

▲ $D \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} =: A \in \mathcal{F}_X$ на основу првог става.

Тада је $X = \overline{D} \subseteq \overline{A} = A$, тј. $X = A$, тј. $f \equiv g$. ■

$\boxed{\text{Пример}}$ Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ т.д. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за свако $x, y \in \mathbb{R}$. Приметимо:

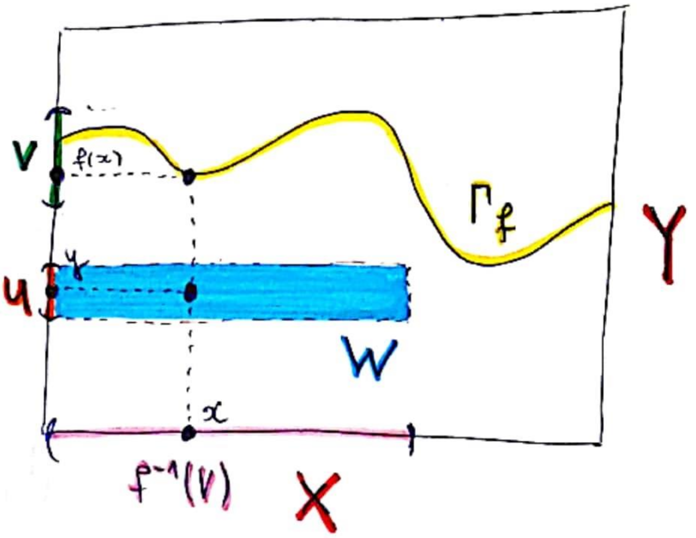
- $f(n) = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n} = n \cdot f(1)$, $n \in \mathbb{N}$
- $0 = f(n-n) = f(n) + f(-n) \Rightarrow f(-n) = (-n) \cdot f(1)$, $n \in \mathbb{N}$
- за $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$m \cdot f(1) = f(m) = f(n \cdot \underbrace{\tfrac{m}{n}}_{q}) = n \cdot f(q) \Rightarrow f(q) = q \cdot f(1)$$

функције $f(x)$ и $x \cdot f(1)$ се поклапају на $\mathbb{Q}$ који је густ у $\mathbb{R}$, па је $f(x) = x \cdot f(1)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2.}$ Нека је $f : X \to Y$ непрекидно и Y T_2. Онда је $\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X \times Y}$.

▲ $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$



$\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X \times Y} \iff \Gamma_f^c \in \mathcal{T}_{X \times Y}$

Нека је $(x, y) \in \Gamma_f^c$. Тада је $y \neq f(x)$ па како је Y T_2, то постоје $U, V \in \mathcal{T}_Y$, $U \cap V = \emptyset$

$y \in U$, $f(x) \in V$.

Узмимо $W := f^{-1}(V) \times U \in \mathcal{T}_{X \times Y}$. Тада је W тражена околина. Заиста, $W \cap \Gamma_f = \emptyset$. Пп.с. $(\exists (\tilde{x}, f(\tilde{x})) \in f^{-1}(V) \times U)$, тј. $f(\tilde{x}) \in U \cap V$ ↯.

Дакле, Γ_f^c је отворен, па је Γ_f затворен. ■

$\boxed{3.}$ Нека је $f : X \to Y$ непрекидно, „на" и отворено. Ако је $\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X \times Y}$, онда је Y T_2.

▲ Y је $T_2 \iff \Delta_Y \in \mathcal{F}_{Y \times Y} \iff \Delta_Y^c \in \mathcal{T}_{Y \times Y}$

Посматрајмо пресликавање $f \times \mathbb{1}_Y : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$

$$(x, y) \longmapsto (f(x), y)$$

f и $\mathbb{1}_Y$ су отворена, па је и $f \times \mathbb{1}_Y$ отворено, па

$$(f \times \mathbb{1}_Y)(\underbrace{\Gamma_f^c}_{\in \mathcal{T}_{X \times Y}}) \in \mathcal{T}_{Y \times Y}$$

Покажимо да је $(f \times \mathbb{1}_Y)(\Gamma_f^c) = \Delta_Y^c$.

$\subseteq$: $(x, y) \in \Gamma_f^c \Leftrightarrow y \neq f(x)$

$\Rightarrow (f \times \mathbb{1}_Y)(x, y) = (f(x), y) \notin \Delta_Y \Rightarrow (f(x), y) \in \Delta_Y^c$

$\supseteq$: $(y_1, y_2) \in \Delta_Y^c$, тј. $y_1 \neq y_2$.

f је „на" па постоји $x \in X$ т.д. $f(x) = y_1$.

Тада је $(y_1, y_2) = (f(x), y_2) = (f \times \mathbb{1}_Y)(\underbrace{x, y_2}_{\in \Gamma_f^c})$

Дакле, $\Delta_Y^c \in \mathcal{T}_{Y \times Y}$, па је Y T_2. $\blacksquare$