$\boxed{3.}$ Нека су X и Y тополошки простори и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Тада $\partial(A\times B) = (\overline{A}\times\partial B)\cup(\partial A\times\overline{B})$.

▲ $\partial(A\times B) = \overline{A\times B} \cap \overline{(A\times B)^c} \overset{(*)}{=}$

$= \overline{A}\times\overline{B} \cap \left(\overline{A^c\times Y \cup X\times B^c}\right) =$

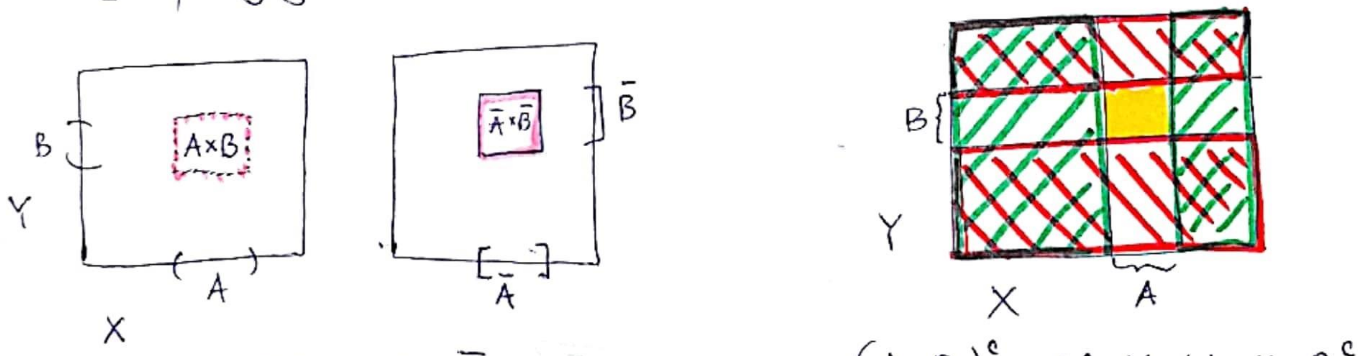
$= \overline{A}\times\overline{B} \cap \left(\overline{A^c\times Y} \cup \overline{X\times B^c}\right) =$

$= \overline{A}\times\overline{B} \cap \left(\overline{A^c}\times Y \cup X\times \overline{B^c}\right) =$

$= \left(\overline{A}\times\overline{B} \cap \overline{A^c}\times Y\right) \cup \left(\overline{A}\times\overline{B} \cap X\times \overline{B^c}\right) =$

$= \partial A\times\overline{B} \cup \overline{A}\times\partial B.$ ■

Илустрација особине $(*)$:



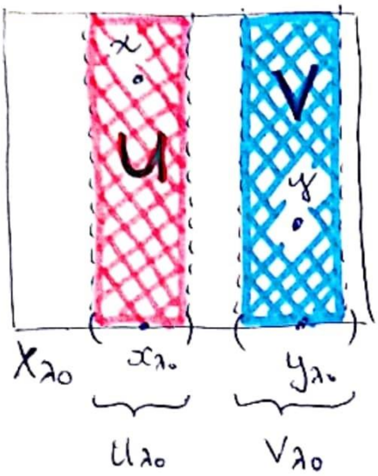
$\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$

$(A\times B)^c = \underbrace{A^c\times Y}\cup\underbrace{X\times B^c}$

$\boxed{4.}$ $T_{3\frac{1}{2}}$ је продуктивно својство (тј. X_λ $T_{3\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \prod X_\lambda$ $T_{3\frac{1}{2}}$).

▲ Нека су X_λ, $\lambda\in\Lambda$, $T_{3\frac{1}{2}}$ простори.

$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ је T_1 : Нека су $x, y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $x \neq y$. Тада постоји $\lambda_0 \in \Lambda$ т.д. $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$, па како је X_{λ_0} T_1, то постоје $U_{\lambda_0}, V_{\lambda_0} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}$ т.д. $x_{\lambda_0} \in U_{\lambda_0} \setminus V_{\lambda_0}$ и $y_{\lambda_0} \in V_{\lambda_0} \setminus U_{\lambda_0}$.



Узмимо $U := p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0}) \in \mathcal{T}$ и $V := p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0}) \in \mathcal{T}$. Тада је $x \in U \setminus V$, $y \in V \setminus U$, па је $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ T_1.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ је потпуно регуларан:

Нека је $\tilde{x} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ и $F \neq \emptyset$ затворен у $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ т.д. $\tilde{x} \notin F$.

Тражимо непрекидну функцију т.д. $f(\tilde{x}) = 1$, $f(F) = \{0\}$.

Како $\tilde{x} \in F^c \in \mathcal{T}$, то постоји базни $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$, т.д. $\tilde{x} \in B \subseteq F^c$. Сви X_{λ_i} су потпуно регуларни, па постоје функције $f_i : X_{\lambda_i} \longrightarrow [0,1]$ т.д. $f_i(\tilde{x}_{\lambda_i}) = 1$, $f_i(U_{\lambda_i}^c) = \{0\}$.

Нека је $f : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to [0,1]$ дата са $f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_i(p_{\lambda_i}(x))$.

▷ f је непрекидна;

▷ $f(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_{\lambda_i}) = 1$;

▷ $x \in F$, да ли је $f(x) = 0$?

$F \subseteq B^c \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n\})\ x_{\lambda_j} \notin U_{\lambda_j} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ f_j(x_{\lambda_j}) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

Дакле $f(F) = \{0\}$.

Коначно, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ је потпуно регуларан. ▨

Компактност

Дефиниција Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је компактан ако сваки отворен покривач од X има коначан потпокривач.

Дефиниција $A \subseteq X$ је компактан ако је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан. $\mathcal{K}_X \overset{\text{def}}{=} \{A \subseteq X \mid A \text{ компактан}\}$

Дефиниција фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ има својство коначног пресека ако свака коначна подфамилија има непразан пресек.

Став X је компактан ако и само ако свака фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}_X$ која има својство коначног пресека има непразан пресек.

▲ $\Rightarrow$: Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}_X$ има с.к.п.

тдс. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset \quad /^c$

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c = X \text{ - отворен покривач од } X$$

$\Rightarrow$ постоји коначан потпокривач:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}^c = X \quad /^c$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = \phi \quad ↯$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ пос. X није компактан, па постоји отворен покривач $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ који нема коначан покривач. Тада $\phi = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c$, па $\{U_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ нема с.к.п. одакле постоје $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ т.д. $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}^c = \phi$, тј. $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} = X$ ↯ ■

Последица Ако је X компактан и $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија непразних и затворених скупова ($F_{n+1} \subseteq F_n$, $n\in\mathbb{N}$), онда је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \phi$.

Став $f: X\to Y$ непрекидно и X компактан, онда је и $f(X)$ компактан.

Став Ако је X компактан, онда $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

Став Ако је X Хаусдорфов, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$.

Последица X компактан и $T_2 \Rightarrow \mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

1. Испитати компактност простора:

(а) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (б) $([0,1], \mathcal{S}_{[0,1]})$; (в) $(X, \mathcal{T}_d)$; (г) $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

▲ (а) $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$ – отворен покривач који нема коначан потпокривач $\Rightarrow$ није компактан.

(б) $[0,1] = \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1-\frac{1}{n}) \cup \{1\}$ – нема коначан потпокривач

$\{1\} = [0,1] \cap [1,2) \in \mathcal{S}_{[0,1]}$

$\Rightarrow$ није компактан.

(в) $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ – има коначан потпокривач само ако је X коначан.

Дакле, $(X, \mathcal{T}_d)$ је компактан акко је коначан.

(г) Нека је $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, U_λ^c - коначни.

Нека је $\lambda_0 \in \Lambda$ фиксирано и $U_{\lambda_0}^c = \{x_1, \dots, x_k\}$.

Тада постоје $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k}$ т.д. $x_i \in U_{\lambda_i}$.

Одавде је $X = \bigcup_{i=0}^{k} U_{\lambda_i}$, па је X компактан. ▨

Дефиниција X је псеудокомпактан ако је свако непрекидно пресликавање $f: X \to \mathbb{R}$ ограничено.

Дефиниција X је пребројиво компактан ако

Сваки отворен пребројив покривач има коначан потпокривач.

Компактност $\Rightarrow$ пребројива компактност $\Rightarrow$ псеудокомп.

$\boxed{2.}$ (а) Ако је X пребројиво компактан, онда је псеудокомпактан;

(б) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан акко је псеудокомпактан.

▲ (а) Нека је $f: X \to \mathbb{R}$ непрекидна.

Тада је $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}((-n,n))}_{\in \mathcal{T}_X}$, па постоји коначан потпокривач $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}((-n_i, n_i))$. Нека је $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Онда је $|f(x)| < N$ за свако $x \in X$, тј. f је ограничена.

(б) $\Rightarrow$: A је компактан $\Rightarrow$ $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ је компактан

$\Leftrightarrow$ $f(A)$ је затворен и <u>ограничен</u>

$\Leftarrow$: Нека је A псеудокомпактан и нека је $f: A \to \mathbb{R}$ дато са $f(a) = \|a\|$. f је непрекидно, па је ограничено, одакле је A ограничен. Такође, A је затворен.

пп. $A \neq \bar{A}$ и нека је $a \in \bar{A} \setminus A$ и $f : A \to \mathbb{R}$

дато са $f(x) := \dfrac{1}{\|x-a\|}$.

f није ограничено јер пошто $a \in \bar{A}$, то постоји

низ $(a_n) \subseteq A$ т.д. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$.

Ово је у контрадикцији са претпоставком да је X псеудокомпактан (јер би f било ограничено).

Дакле A је затворен.

Коначно, A је ограничен и затворен у $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A је компактан. $\blacksquare$

Ако је X T_2, онда:

(1) $(\forall x_0 \in X)(\forall K \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})\ x_0 \notin K$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ x_0 \in U,\ K \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset;$$

(2) $(\forall K, L \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})\ K \cap L = \emptyset$

$$\Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)\ K \subseteq U,\ L \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset;$$

(3) Ако је X додатно компактан, онда је T_4.

Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X и $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, онда $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2$.

$\boxed{3.}$ Нека је $(X,\mathcal{T})$ компактан и T_2 и $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2$.

(а) $(X,\mathcal{T}_1)$ није T_2;

(б) $(X,\mathcal{T}_2)$ није компактан.

▲ (а) $(X,\mathcal{T})$ је компактан и T_2, па је $\mathcal{K}=\mathcal{F}$.

Такође $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}$.

Пс. да $(X,\mathcal{T}_1)$ јесте T_2. Онда је $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$, одакле

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F} = \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}_1 \subsetneq \mathcal{K},$$

али из $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ следи $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ ↯

(б) Имамо $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2$, $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$.

Пс. $(X,\mathcal{T}_2)$ је компактан. Онда је $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2$, па

$$\mathcal{K} = \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2 \Rightarrow \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{K}_2$$ ↯ ■

$\boxed{4.}$ Ако је $f: X \to Y$ непрекидно, X компактан, Y T_2, онда је f затворено.

▲ $F \in \mathcal{F}_X \xRightarrow{X \text{ компактан}} F \in \mathcal{K}_X \xRightarrow{f \text{ непр.}} f(F) \in \mathcal{K}_Y$

$\xRightarrow{Y\ T_2} f(F) \in \mathcal{F}_Y$ ■

Последица Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, X компактан, Y T_2, онда је f хомеоморфизам.

▲ Став на стр. 42 + претходни задатак. ■

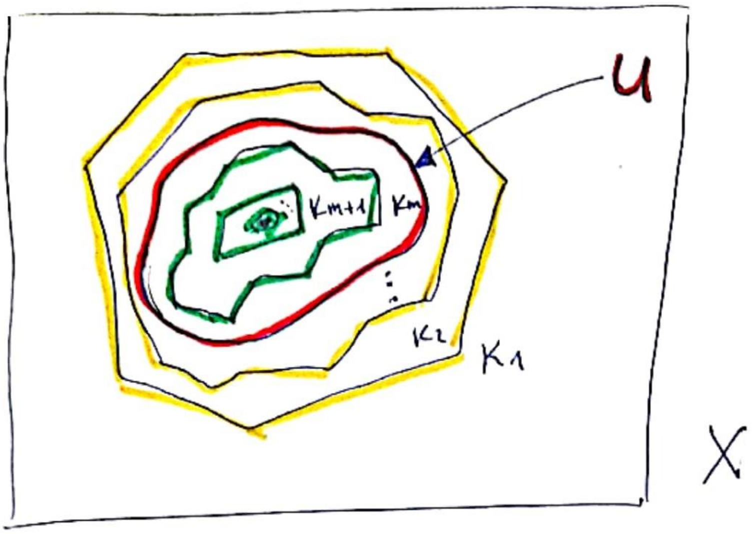
5. Ако је X Хаусдорфов, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ опадајућа фамилија, онда је $K := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ непразан, затворен и компактан.

▲ Како је $K_n \in \mathcal{K}_X$ и X T_2, то је $K_n \in \mathcal{F}_X$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Даље, $K_n \subseteq K_1$, за $n \in \mathbb{N}$, па $K_n \in \mathcal{F}_{K_1}$ и K_1 је компактан па је $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ (последица 1 на стр. 93).

Како су сви K_n, $n \in \mathbb{N}$, затворени, то је и $K \in \mathcal{F}_X$.

Коначно, $\underset{\text{затворен}}{K} \subseteq \underset{\text{компактан}}{K_1}$, па је и K компактан. ■

Лема Нека је $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија компактних скупова у X. Тада за сваки $U \in \mathcal{T}_X$ т.д. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq U$ важи: $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq m \Rightarrow K_n \subseteq U$.



Став Нека је $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајућа фамилија повезаних компактних и непразних скупова у X и X је T_2. Онда је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ компактан и повезан.

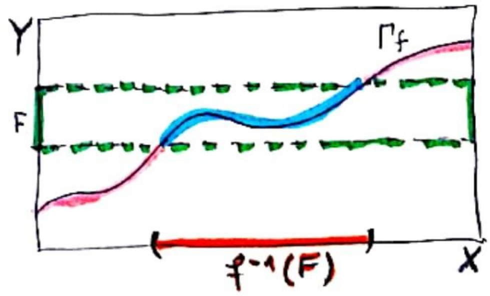
Теорема Ако је Y компактан, онда је $p_X : X\times Y \to X$ затворено.

Теорема X_1 и X_2 су компактни акко је $X_1 \times X_2$ компактан.

6. Нека је $f: X \to Y$, Y компактан и T_2.

f је непрекидно $\Leftrightarrow \Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y}$.

▲ $\Rightarrow$: важи јер је Y T_2.



$\Leftarrow$: Нека је $F \in \mathcal{F}_Y$

$$f^{-1}(F) = \underbrace{p_X}_{\text{затворено}}\Big(\underbrace{(\underbrace{X\times F}_{\text{затворен}}) \cap \underbrace{\Gamma_f}_{\text{затворен}}}_{\in \mathcal{F}_{X\times Y}}\Big) \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f \text{ је непрекидно.} \;\blacksquare$$

$\boxed{7.}$ Нека је $f: X \to Y$ затворено, „на" и
$$(\forall y \in Y)\ f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X.$$
(а) Ако је X T_2, онда је Y T_2;
(б) Ако је $K \in \mathcal{K}_Y$, онда је $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

▲ (а) Нека су $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Тада $f^{-1}(\{y_1\}), f^{-1}(\{y_2\}) \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ и дисјунктни су, па постоје $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_X$ т.д. $f^{-1}(\{y_1\}) \subseteq U_1$ и $f^{-1}(\{y_2\}) \subseteq V_1$. Нека је $U := (f(U_1^c))^c$ и $V := (f(V_1^c))^c$. То ће бити тражене околине од y_1 и y_2.

(б) Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$ и $f^{-1}(K) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$.

Ако је $y \in K$ произвољно, онда $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X$ и $f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, па постоји коначан потпокривач
$$f^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\alpha_i}^{(y)} =: U(y)$$

Приметимо:
$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} \underbrace{f\big(\underbrace{U(y)^c}_{\text{затворено}}\big)^c}_{\text{отворено}}$$
затворено

(јер $y \in f(U(y)^c)^c$), па постоје $y_1, \dots, y_m$ т.д.
$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} f(U(y_i)^c)^c. \ \Big/ f^{-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} f(U(y_i)^c)^c\Big) = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{f^{-1}(f(U(y_i)^c)^c}_{\cdots\subseteq U(y_i)} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U(y_i) \Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n_{y_i}} U_{\alpha_j}^{(y_i)}}_{\text{коначна подфамилија.}} \Rightarrow f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X.$$

Локална компактност

Дефиниција Тополошки простор X је локално компактан ако $(\forall x\in X)(\forall G\in\mathcal{O}(x))(\exists H\in\mathcal{O}(x))\ \overline{H}\subseteq G \wedge \overline{H}\in\mathcal{K}_X$.

- Ако је X T_2, онда:
  X је локално компактан $\Leftrightarrow (\forall x\in X)(\exists N\in\mathcal{O}(x))\ \overline{N}\in\mathcal{K}_X$.
- Ако је X компактан и T_2, онда је локално компактан.

1. Испитати локалну компактност простора:

(а) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$; (б) $(X, \mathcal{T}_d)$; (в) $(X, \mathcal{T}_a)$; (г) $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

(а) $\mathbb{R}$ је T_2 и за $x\in\mathbb{R}$ је $\underbrace{\overline{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}}_{\overline{N}} \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, па јесте лок. компактан.

(б) За $x\in X$ и $G\in\mathcal{O}(x)$ узмемо $H:=\{x\}\in\mathcal{K}_X \Rightarrow$ јесте лок. комп.

(в) $G\in\mathcal{O}(x)\Rightarrow G=X$, па узмемо $H:=X\Rightarrow$ јесте лок. комп.

(г) За $x\in\mathbb{R}$ и $G=(-\infty,a)\in\mathcal{O}(x)$ узмемо $H:=\left(-\infty,\frac{x+a}{2}\right]$.
Тврдимо H је компактан. Нека је $H\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,a_\lambda)$
$\Rightarrow (\exists\lambda_0\in\Lambda)\ H\subseteq(-\infty,a_{\lambda_0})\Rightarrow H$ је компактан.

Дакле, $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ је локално компактан.