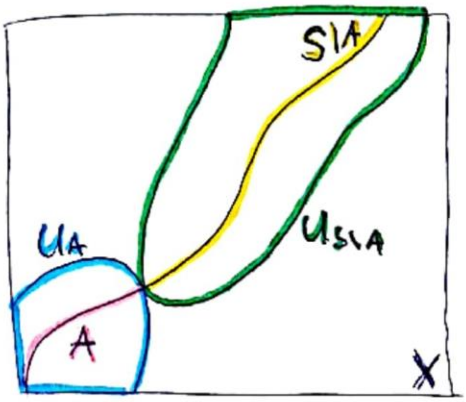
$\boxed{\text{Џонсова лема}}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, D свуда густ у X, $S \subseteq X$ дискретан (тј. $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$). Ако је S затворен и $|S| \geq 2^{|D|} = |\mathcal{P}(D)|$, онда X није нормалан.

▲ Ппс. да X јесте нормалан.

Нека је $A \subseteq S$. Како је $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$, то $A \in \mathcal{F}_S$ и $S \setminus A \in \mathcal{F}_S$, па како је и S затворен, то $A, S \setminus A \in \mathcal{F}_X$.

Како је X нормалан, то постоје $U_A, U_{S \setminus A} \in \mathcal{T}_X$ т.д. $U_A \cap U_{S \setminus A} = \emptyset$ и $A \subseteq U_A$, $S \setminus A \subseteq U_{S \setminus A}$.



Нека је $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ дато са

$$f(A) := U_A \cap D \neq \emptyset \quad (\text{јер } \overline{D} = X)$$

Показаћемо да је f „1-1".

Нека су $A, B \subseteq S$, $A \neq B$. Б.У.О. $A \setminus B \neq \emptyset$, тј.

$$A \cap B_S^c = A \cap (S \setminus B) \neq \emptyset, \ (*)$$

Приметимо да је

$$(U_A \cap D) \cap U_{S \setminus B} \neq \emptyset \ (**)$$

јер $U_A \cap U_{S \setminus B}$ је отворен и непразан због $(*)$, па је у пресеку са D непразан (јер $\overline{D} = X$).

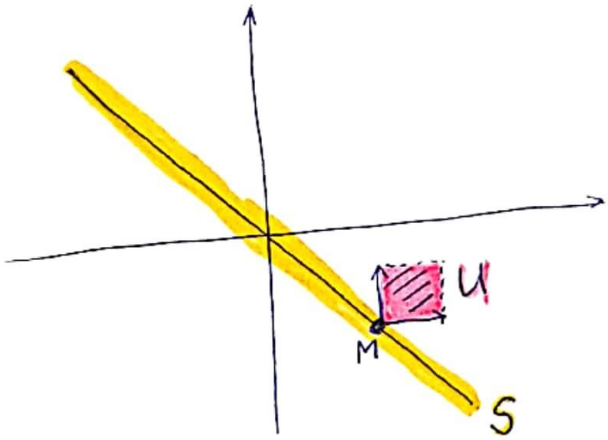
Такође, $(U_B \cap D) \cap U_{S\setminus B} = \emptyset$ $(\overset{*}{**})$ из дефиниције скупова U_B и $U_{S\setminus B}$.

Сада из $(**)$ и $(\overset{*}{**})$ јасно следи да је $U_A \cap D \neq U_B \cap D$, тј. $f(A) \neq f(B)$ па је $\underbrace{f \text{ „1-1"}}$. Одавде је

$$|S| < |\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)| \quad ↯ \quad ■$$

Последица $(\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан.

▲ $S := \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $D := \mathbb{Q}^2$.



- ▸ $\overline{D} = \mathbb{R}^2$
- ▸ $\{M\} = U \cap S \in \mathcal{T}_S$, па је заиста $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$.
- ▸ S је затворен.
- ▸ $|S| = c = 2^{|D|} = |\mathcal{P}(D)|$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})^2$ није нормалан. ■

5. Нека је $f: X \to Y$ непрекидно, „на" и затворено.

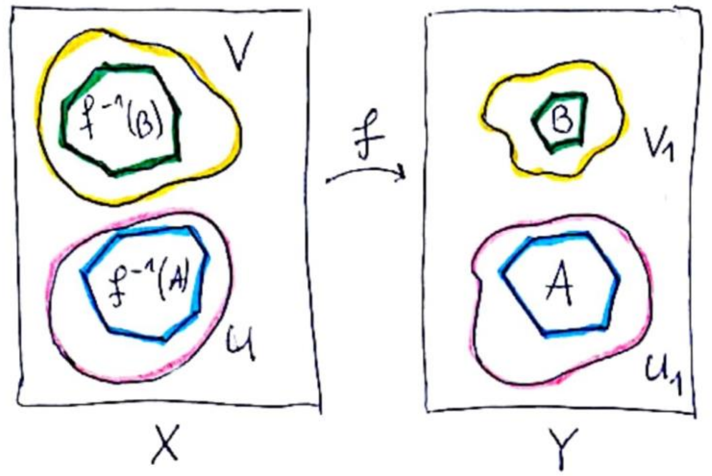
(а) Ако је X нормалан, онда је и Y нормалан;

(б) Ако је X T_4, онда је и Y T_4.

▲ (а) Нека су $A, B \in \mathcal{F}_Y \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B = \emptyset$.

Тада је $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$ и $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

X је нормалан па постоје $U, V \in \mathcal{T}_X$ т.д. $U \cap V = \emptyset$ и $f^{-1}(A) \subseteq U$, $f^{-1}(B) \subseteq V$. Нека је:



$$U_1 := \big(\underbrace{f(U^c)}_{\text{затворено}}\big)^c \in \mathcal{T}_Y$$

$$V_1 := \big(\underbrace{f(V^c)}_{\text{затворено}}\big)^c \in \mathcal{T}_Y$$

Тада $U_1, V_1 \in \mathcal{T}_Y$ и $A \subseteq U_1$, $B \subseteq V_1$. Још да се уверимо да су дисјунктни.

$$U_1 \cap V_1 = \big(f(U^c)\big)^c \cap \big(f(V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(U^c) \cup f(V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(U^c \cup V^c)\big)^c =$$

$$= \big(f((U \cap V)^c)\big)^c =$$

$$= \big(f(\underbrace{\emptyset^c}_{X})\big)^c \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ је „на"}}}{=} Y^c = \emptyset.$$

Дакле, Y је нормалан.

(б) Још треба показати да ако је X T_1, онда је и Y T_1.

Y је $T_1 \Leftrightarrow (\forall y \in Y)\ \{y\} \in \mathcal{F}_Y$.

Нека је $y \in Y$. Како је f „на", то постоји $x \in X$ т.д. $f(x) = y$. Тада је $\underbrace{f(\{x\}) = \{y\}}_{\text{затворено}} \in \mathcal{F}_Y$.

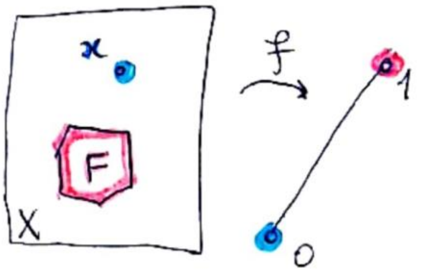
$\Rightarrow$ Y је T_1, па је и T_4. $\blacksquare$

Урисонова лема X је нормалан ако и само ако

$\left(\forall A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}\right) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists$ непрекидно $f : X \to [0,1]$ т.д. $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$

Дефиниција Простор X је потпуно регуларан ако $(\forall x \in X)(\forall F \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\})\, x \notin F \Rightarrow \exists$ непр. $f : X \to [0,1]$ т.д. $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$.

Дефиниција Простор X је $T_{3\frac{1}{2}}$ ако је T_1 и потпуно регуларан.



Приметимо: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.

6. Ако је X $T_{3\frac{1}{2}}$, повезан и $|X| \geq 2$, онда је X непребројив.

▲ Нека су $x, y \in X$, $x \neq y$. Како је X T_1, то је $\{y\} \in \mathcal{F}_X$ па постоји непрекидно $f : X \to [0,1]$ т.д.

$f(x)=0$, $f(\{y\})=1$. Како је X повезан, то је и $f(X)$ повезан, па пошто $0,1\in f(X)$, онда и $[0,1]\subseteq f(X)$. Дакле, $f(X)$ је непребројив, па је и X непребројив. ▨

Конвергенција низова

Дефиниција $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall U\in\mathcal{O}(x))(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})$

$$n>n_0 \Rightarrow x_n\in U.$$

Теорема Ако је X Хауздорфов, гранична вредност низа је јединствена (уколико постоји).

1. Описати све конвергентне низове у:

(а) $(X,\mathcal{T}_d)$; (б) $(X,\mathcal{T}_a)$; (в) $(X,\mathcal{T}_{cc})$.

▲ (а) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, онда специјално за $U:=\{x\}\in\mathcal{O}(x)$ постоји $n_0\in\mathbb{N}$ т.д. за $n>n_0$ важи $x_n\in\{x\}$. Дакле, конвергентни низови су они који су константни почев од неког члана.

(б) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, могуће је за U из деф. узети само $U:=X$, па ће сваки низ бити конвергентан (и сваком низу је свака тачка из X гранична вр.)

(в) Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $U := (X \setminus \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}) \cup \{x\} \in \mathcal{T}_{cc}$.

Тада $U \in \mathcal{O}(x)$ па $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow x_n \in U$,
а то је једино могуће за $x_n = x$.

Дакле, конвергентни низови су исти као у (а). ■

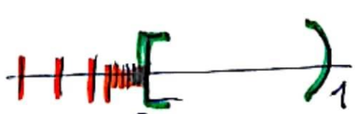
$\boxed{2.}$ Да ли у $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ конвергирају $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$?

▲ Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X и $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ и ако $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка x у $\mathcal{T}_2$, онда он конвергира ка x и у $\mathcal{T}_1$.

Овде имамо $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ у $\mathcal{U}$, па ако неки од ових низова конвергира у $\mathcal{S}$, то мора бити ка 0.

► $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: Ако је $U\in\mathcal{O}(0)$ онда $(\exists \varepsilon>0)\ [0,\varepsilon)\subseteq U$, па је за $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ и $n>n_0$ важи $a_n\in U$. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ у $\mathcal{S}$.

► $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $[0,1)\in\mathcal{O}(0)$, али $[0,1)\cap\{-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\} = \emptyset$, па овај низ не конвергира.



■

Тополошки производ

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i=1,\dots,n\}$$

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \Big\{ x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\Big|\; (\forall \lambda\in\Lambda)\ \underbrace{x(\lambda)}_{x_\lambda} \in X_\lambda \Big\}$$

Специјално, $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X = \{ x : \Lambda \to X \} =: X^\Lambda$.

$\boxed{\text{Став}}$ Ако су $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ две фамилије, онда

(а) $(\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \subseteq B_\lambda \Rightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$;

(б) $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ и $(\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow (\forall\lambda\in\Lambda)\ A_\lambda \subseteq B_\lambda$;

(в) $\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$;

(г) $\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B_\lambda)$.

- $(\forall\lambda\in\Lambda)\ X_\lambda \neq \emptyset \iff \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

Дефинишемо две топологије на производу.

Нека су $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$, тополошки простори.

1 $\mathcal{T}_{box}$ – „box" топологија

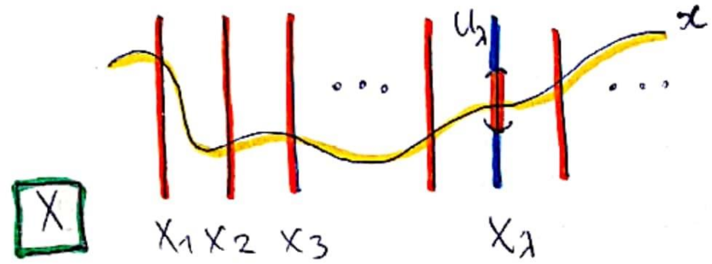
база: $\mathcal{B}_{box} = \{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid (\forall\lambda\in\Lambda)\ U_\lambda\in\mathcal{T}_\lambda\}$

2 $\mathcal{T}$ – Тихоновљева топологија

предбаза: $\mathcal{S} = \{p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda\in\mathcal{T}_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$,

где су $p_\lambda : X\to X_\lambda$ пројекције $(p_\lambda(x) \overset{def}{=} x_\lambda)$

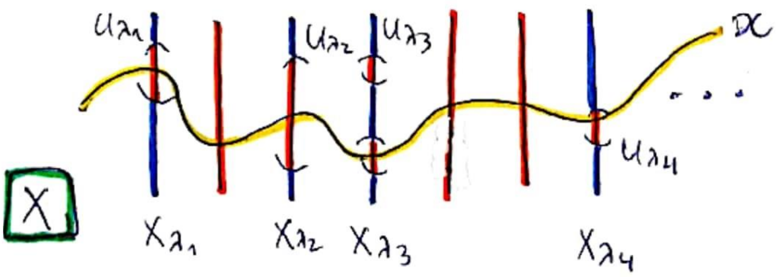
► Један елемент предбазе:



$x\in p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \Leftrightarrow x_\lambda = p_\lambda(x)\in U_\lambda$

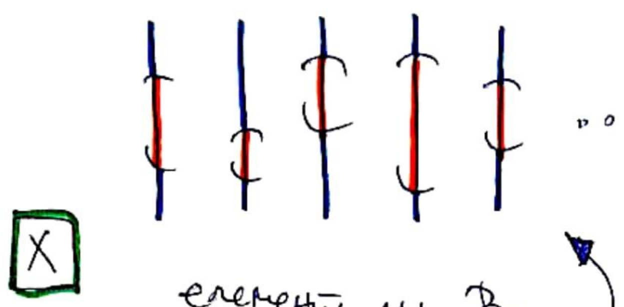
(остале координате су произвољне)

► Један елемент базе: $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i}\in\mathcal{T}_{\lambda_i}$



(Задаје се куда пролази „пут")

► $\mathcal{T}_{box} \neq \mathcal{T}$, али увек је $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}_{box}$.



елемент из $\mathcal{B}_{box}$

у $\mathcal{T}$ дајемо само коначно много ограничења $U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_n}$, а у $\mathcal{T}_{box}$ за свако $\lambda\in\Lambda$.

Ако је Λ коначан, онда је $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{box}$.

▶ Ако је $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \mathcal{T}$, онда постоји коначан скуп $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\subseteq\Lambda$ и $U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_n}$ отворени т.д.

$$V_\lambda = \begin{cases} U_\lambda, & \lambda\in\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \\ X_\lambda, & \lambda\notin\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \end{cases}$$

Пример Нека је $X_\lambda = \{0,1\} =: X$, $\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}_d$. Тада је $\prod_{n\in\mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$. Нека је $A = \{(0,0,\dots,0,\dots)\}$ - нула низ. Онда $A\in\mathcal{T}_{box}$, али $A\notin\mathcal{T}$ (јер ниједан базни није у A).

Теорема Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ тополошки простори и $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ производ са топологијом Тихонова. Ако је $f: X\to\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$, онда

f је непрекидно $\iff (\forall\lambda\in\Lambda)$ $p_\lambda\circ f$ је непрекидно.

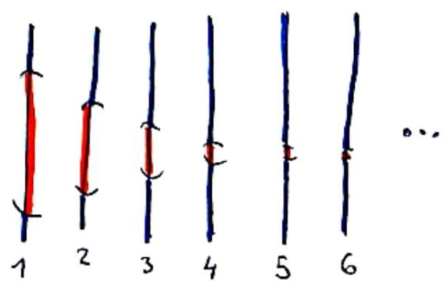
Пример Теорема не важи у box топологији.

Нека је $\Delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Delta(x):=(x,x,x,\dots)$.

$p_n\circ\Delta = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ јесте непрекидно за свако $n\in\mathbb{N}$, али Δ није непрекидно у $\mathcal{T}_{box}$.

Нека је $B := \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{B}_{box}\subseteq\mathcal{T}_{box}$

$\Delta^{-1}(B) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \{0\}\notin\mathcal{U}$



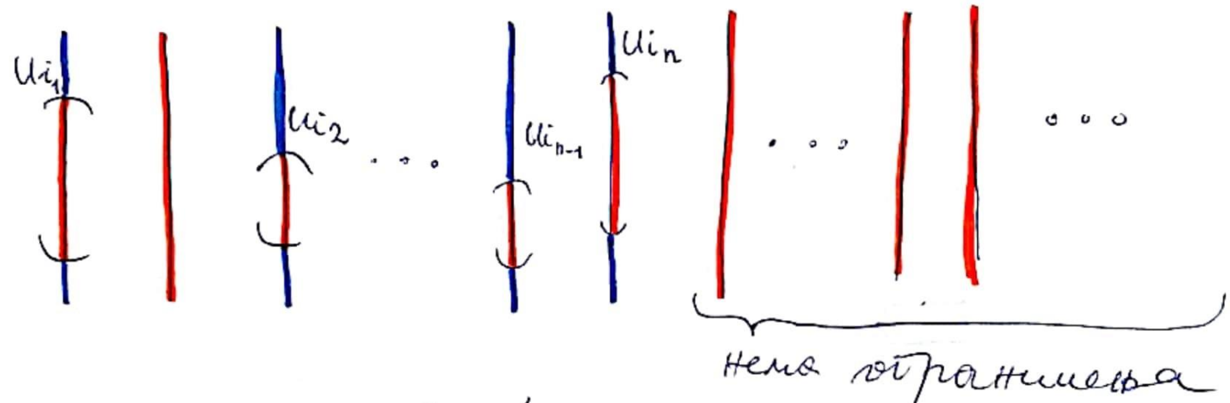
$\Rightarrow$ Δ није непрекидно.

$\boxed{1.}$ Нека је $A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

(а) $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ у $\mathcal{T}$;

(б) Да ли то важи у $\mathcal{T}_{box}$?

▲ (а) Нека је $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $B = \bigcap\limits_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$, $U_{i_j} \in \mathcal{U}$, $1 \le j \le n$, неки базни скуп т.д. $y \in B$. Покажимо да је $A \cap B \neq \emptyset$.



„провучемо" кроз све U_{i_j} произвољно, а на даље само 0

Нека је $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ низ дати са

$$x_k = \begin{cases} x_k \in U_k, & \text{за } k \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ 0, & \text{за } k \notin \{i_1, \dots, i_n\} \end{cases}$$

Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, па $x \in A$ и $x \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow y \in \overline{A}$. Дакле, $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(б) $U = (1,2)^{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{box}$, али $U \cap A = \emptyset$, па је

$\overline{A} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (јер нпр. $x_n = \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ није у $\overline{A}$). ■

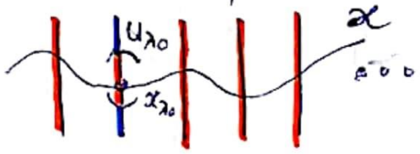
2. Нека је дата фамилија тополошких простора $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $A_\lambda \subseteq X_\lambda$ за $\lambda \in \Lambda$.

(а) $\overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$;

(б) $\operatorname{int}\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subseteq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$.

▲ (а) $\subseteq$: Нека је $x \in \overline{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$. Показујемо $(\forall \lambda\in\Lambda)\, x_\lambda \in \overline{A_\lambda}$.

Нека је $\lambda_0 \in \Lambda$, $U_{\lambda_0} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}$ произвољан т.д. $x_{\lambda_0} \in U_{\lambda_0}$ и $U = p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$.



Како је U базни и $x \in U$, то по претпоставци $U \cap \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$, па постоји $y \in U \cap \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

$$\left.\begin{array}{l} y \in U \Rightarrow y_{\lambda_0} \in U_{\lambda_0} \\ y \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \Rightarrow y_{\lambda_0} \in A_{\lambda_0} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in U_{\lambda_0} \cap A_{\lambda_0}$$

$\Rightarrow U_{\lambda_0} \cap A_{\lambda_0} \neq \emptyset \Rightarrow x_{\lambda_0} \in \overline{A_{\lambda_0}}$.

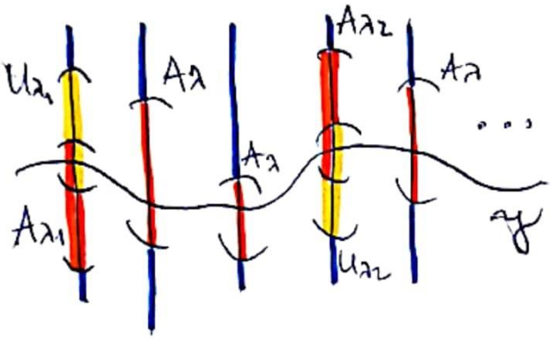
$\supseteq$: Нека је $x \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ и нека је $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$,

$U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$, произвољни базни који садржи x.

Показујемо $B \cap \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.

Како је $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$, то $A_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset$ (јер $x_{\lambda_i} \in \overline{A_{\lambda_i}}$), па постоји $y_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_i}$.

За $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ одаберемо $y_\lambda \in A_\lambda$ произвољно.



$$\left.\begin{array}{l} y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\ y \in B \end{array}\right\} \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}.$$

Специјално за $A_\lambda = \emptyset$ за неко λ, тврђење тривијално важи.

(б) Нека је $x \in \operatorname{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. Тада постоји базни

$B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$, $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i}$ тд. $x \in B \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, тј.

$$B = \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda, \text{ где је } B_\lambda = \begin{cases} U_\lambda, & \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ X_\lambda, & \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \end{cases}$$

Одавде $x_\lambda \in B_\lambda$, за свако $\lambda \in \Lambda$, па је $B_\lambda \subseteq A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ (на основу дела (б) из става на стр. 84.)

1° $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i} \subseteq A_{\lambda_i} \Rightarrow x_{\lambda_i} \in \operatorname{int} A_{\lambda_i}$

2° $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$: $A_\lambda = X_\lambda \Rightarrow x_\lambda \in \operatorname{int} A_\lambda = X_\lambda$.

Дакле, $\operatorname{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$. ▨

Када би било $A_\lambda \neq X_\lambda$ за бесконачно много λ, онда $\operatorname{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \emptyset$, иначе $\operatorname{int}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{int} A_\lambda$.