Брауерова и Борсук - Уламова теорема

Дефиниција Тополошки простор X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно пресликавање $f : X \to X$ има фиксну тачку, тј. $(\exists x \in X)\ f(x) = x$.

Теорема (Брауер) Диск D^n има СФТ за свако $n \in \mathbb{N}$.

1. Доказати Брауерову теорему за $n = 1$.

▲ Нека је $f : \underset{D^1}{\underset{\shortparallel}{[-1,1]}} \longrightarrow \underset{D^1}{\underset{\shortparallel}{[-1,1]}}$ непрекидно.

Посматрајмо $F : [-1,1] \to [-1,1]$ дато са $F(x) = f(x) - x$.

Тада важи

$$F(1) = \underbrace{f(1)}_{\leq 1} - 1 \leq 0,$$

$$F(-1) = \underbrace{f(-1)}_{\geq -1} + 1 \geq 0,$$

па постоји $x_0 \in [-1,1]$ т.д. је $F(x_0) = 0$, тј. $f(x_0) = x_0$. ▨

2. СФТ је инваријанта хомеоморфизма.

▲ Нека је $h : X \longrightarrow Y$ хомеоморфизам и нека X има СФТ. Даље, нека је $f : Y \to Y$ непрекидно.

Желимо да покажемо да f има ФТ.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, dashed, "h^{-1}\circ f\circ h"'] & Y \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h^{-1}"] & X
\end{tikzcd}
$$

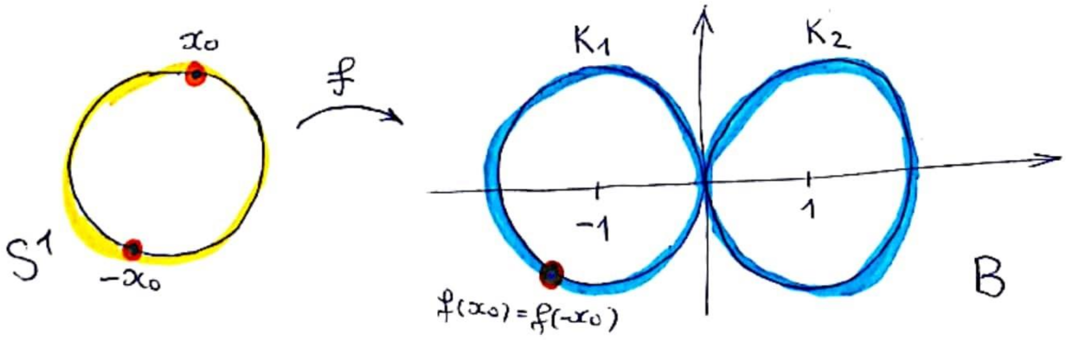
$h^{-1}\circ f\circ h : X\to X$ је непрекидно па има ФТ, тј.

$$(\exists x_0\in X)\ (h^{-1}\circ f\circ h)(x_0)=x_0 .$$

Када применимо h на претходну једнакост, добијамо $f(h(x_0))=h(x_0)$, тј. $h(x_0)$ је ФТ од f. ■

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Борсук-Улам) Нека је $f: S^n\to \mathbb{R}^n$ непрекидно и $n\in\mathbb{N}$. Тада $(\exists x_0\in S^n)\ f(x_0)=f(-x_0)$.

$\boxed{3.}$ Нека су $K_1, K_2\subset\mathbb{R}^2$ јединичне кружнице са центром у -1 и 1 и нека је $B=K_1\cup K_2$. Ако је $f: S^1\to B$ непрекидно и $(0,0)\notin f(S^1)$, показати да постоји $x_0\in S^1$ т.д. $f(x_0)=f(-x_0)$.



Нека је $\bar f : S^1\to B\setminus\{(0,0)\}$, $\bar f(x) := f(x)$ (сузимо кодомен)

Како је S^1 повезана, то је $\bar f(S^1)$ повезан, па или $\bar{f}(S^1) \subseteq K_1$ или $\bar{f}(S^1) \subseteq K_2$.

Б.У.О. $\bar{f}(S^1) \subseteq K_1 \setminus \{(0,0)\} \overset{h}{\approx} \mathbb{R}$

Тада је $h \circ \bar{f} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, па на основу БУТ

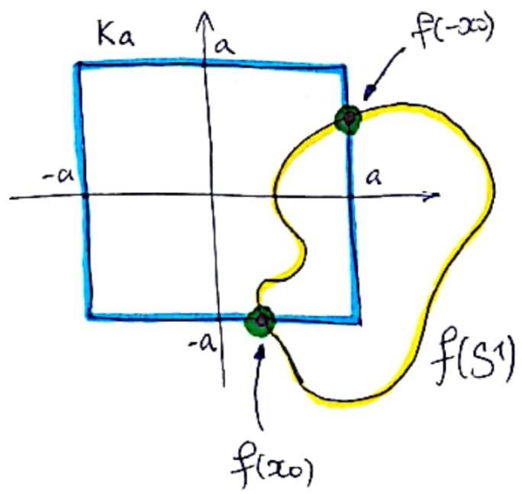
$$(\exists x_0 \in S^1)\ (h \circ \bar{f})(x_0) = (h \circ \bar{f})(-x_0),$$

одакле применом h^{-1} добијамо $\bar{f}(x_0) = \bar{f}(-x_0)$,

тј. $f(x_0) = f(-x_0)$. $\blacksquare$

$\boxed{4.}$ Нека је $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно и $(0,0) \notin f(S^1)$. Тада постоји $K_a = \partial\left([-a,a]^2\right)$ и $x_0 \in S^1$ т.д. $f(x_0), f(-x_0) \in K_a$.

$\blacktriangle$



Нека је $k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ дато са $k(x) = a$, где је $a \in \mathbb{R}$ т.д. $x \in K_a$. Јасно, k је непрекидно. Посматрајмо композицију

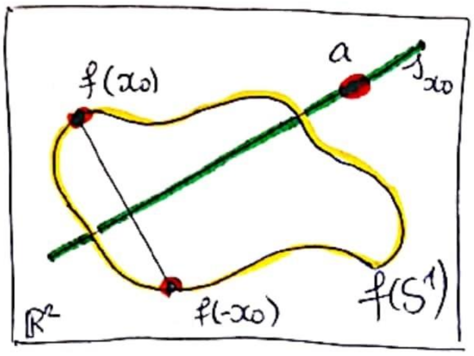
$$S^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{k} \mathbb{R}.$$

$k \circ f$ је непрекидно и $k \circ f : S^1 \to \mathbb{R}$, па на основу БУТ: $(\exists x_0 \in S^1)\ (k \circ f)(x_0) = (k \circ f)(-x_0) =: a$

Тада $f(x_0), f(-x_0) \in K_a$. $\blacksquare$

5. Нека је $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно т.д. $(\forall x\in S^1)\ f(x)\neq f(-x)$ и нека је s_x симетрала дужи $\overline{f(x)f(-x)}$. Показати да је тада $\bigcup_{x\in S^1} s_x = \mathbb{R}^2$.

▲



Нека је $a\in\mathbb{R}^2$. Тражимо $x_0\in S^1$ т.д. $a\in s_{x_0}$. Нека је $\varphi: S^1\to\mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) := d(a, f(x))$.
d и f су непрекидна, па је и φ непрекидно, па на основу БУТ постоји $x_0\in S^1$ т.д. $\varphi(x_0)=\varphi(-x_0)$, тј. $d(f(x_0),a)=d(f(-x_0),a)$ па је $a\in s_{x_0}$. ■

6. Ако је $n\in\mathbb{N}$, показати да су следећа тврђења међусобно еквивалентна:

(1) $(\forall f: S^n\to\mathbb{R}^n$ непрекидно$)(\exists x_0\in S^n)\ f(x_0)=f(-x_0)$ (БУТ);

(2) Не постоји непрекидно непарно пресликавање $g: S^n\to S^{n-1}$.

▲ (1) $\Rightarrow$ (2): тпс. нека је $g: S^n\to S^{n-1}$ непрекидно и непарно.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, dashed, "i\circ g"'] & S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$i\circ g$ је непрекидно, па по (1) постоји $x_0\in S^n$ т.д.

$$i(g(x_0)) = i(g(-x_0)),\ \text{одакле је}$$

$$g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = 0 \notin S^{n-1} \ ↯$$

јер је g непарно

(2) $\Rightarrow$ (1): ПТС. да постоји непрекидно $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ т.д.

$$(\forall x\in S^n)\ f(x)\neq f(-x).$$

Нека је $g: S^n\to S^{n-1}$ дато са $g(x) := \dfrac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$.

Тада је g непрекидно и непарно. ↯ ∎

Аксиоме сепарације

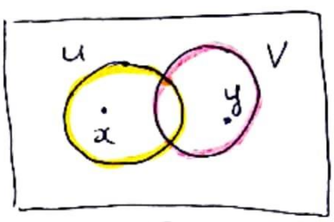
Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор.

Дефиниција X је T_1 простор ако

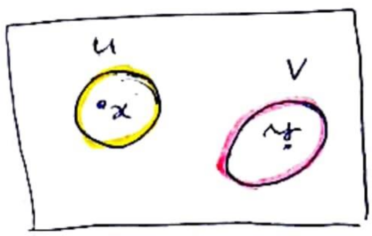
$$(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ x\in U\setminus V \wedge y\in V\setminus U.$$

Дефиниција X је T_2 простор ако је T_1 и $U\cap V=\emptyset$,

тј. $(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ U\cap V=\emptyset \wedge x\in U \wedge y\in V.$



T_1



T_2

T_2 простор се другачије зове Хаусдорфов.

Теорема X је T_1 ако и само ако $(\forall x\in X)\ \{x\}\in\mathcal{F}_X$.

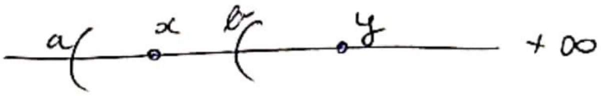
Теорема X је T_2 ако и само ако $\Delta_X\in\mathcal{F}_{X\times X}$, где је $\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$ дијагонала.

Пример T_1 и T_2 нису непрекидне инваријанте.

$1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D})$ је непрекидно

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ – T_1 и T_2,

$(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ – ни T_1 ни T_2



(не постоје U и V из деф.)

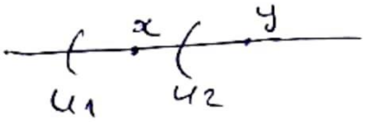
1. Који од наредних простора су T_2?

(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$; (г) $(X, \mathcal{T}_x)$; (д) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (ђ) $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

▲ (а) јесте T_2. $U := \{x\}$, $V := \{y\}$.

(б) јесте акко $|X| = 1$.

(в) није.



$y \in U_1 \cap U_2$, тј. нема дисјунктних скупова у $\mathcal{D}$.

(г) није јер нема дисјунктних у $\mathcal{T}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\} \cup \{\emptyset\}$

(д) Знамо да је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$, па како је $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ T_2, то је и $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ T_2 (ако се две тачке могу раздвојити у мањој топологији, сигурно могу и у већој.)

(ђ) 1° $|X| < \infty \Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$ па јесте T_2;

2° $|X| = \infty \Rightarrow$ нема дисјунктних отворених скупова јер пп. $U, V \in \mathcal{T}_{cf}$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \underbrace{U^c \cup V^c}_{\text{коначни}} = \underbrace{X}_{\text{бесконачан}}$ ↯

Наследност: Ако је X T_1 или T_2 и $A \subseteq X$, онда је и A T_1 односно T_2.

Теорема У T_2 простору гранична вредност низа је јединствена.

Пример У $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ гранична вредност није јединствена.

Нека је $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је $(\forall a \in (-\infty, 0])\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Став Ако су X и Y тополошки простори, Y T_2 и $f, g : X \to Y$ непрекидна, онда је

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}_X .$$

Став Нека су X и Y тополошки простори, Y T_2 и $f, g : X \to Y$ непрекидна т.д. $f = g$ на скупу D који је густ у X (тј. $\overline{D} = X$). Тада $f = g$ на X.

▲ $D \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} =: A \in \mathcal{F}_X$ на основу првог става.

Тада је $X = \overline{D} \subseteq \overline{A} = A$, тј. $X = A$, тј. $f \equiv g$. ■

Пример Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ т.д. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за свако $x, y \in \mathbb{R}$. Приметимо:

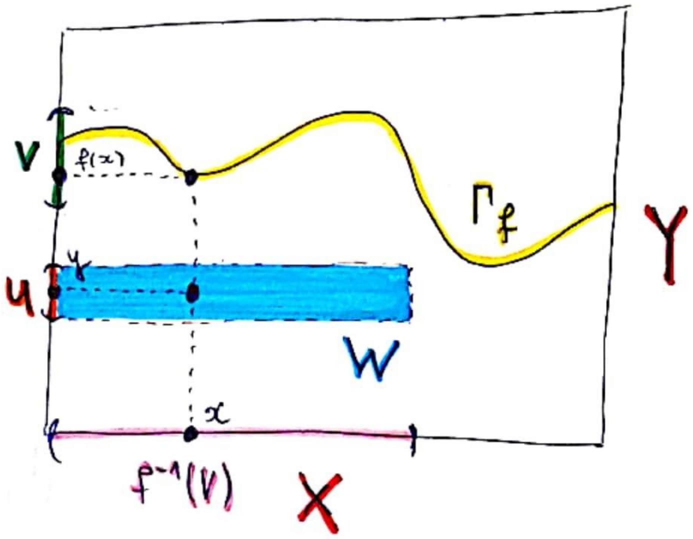
- $f(n) = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n} = n \cdot f(1)$, $n \in \mathbb{N}$
- $0 = f(n-n) = f(n) + f(-n) \Rightarrow f(-n) = (-n) \cdot f(1)$, $n \in \mathbb{N}$
- за $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$m \cdot f(1) = f(m) = f(n \cdot \underbrace{\tfrac{m}{n}}_{q}) = n \cdot f(q) \Rightarrow f(q) = q \cdot f(1)$$

функције $f(x)$ и $x\cdot f(1)$ се поклапају на $\mathbb{Q}$ који је густ у $\mathbb{R}$, па је $f(x)=x\cdot f(1)$ за свако $x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2.}$ Нека је $f: X\to Y$ непрекидно и Y T_2. Онда је $\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y}$.

▲ $\Gamma_f = \{(x,f(x)) \mid x\in X\} \subseteq X\times Y$



$$\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X\times Y} \iff \Gamma_f^c \in \mathcal{T}_{X\times Y}$$

Нека је $(x,y)\in\Gamma_f^c$. Тада је $y\neq f(x)$ па како је Y T_2, то постоје $U,V\in\mathcal{T}_Y$, $U\cap V=\emptyset$

$y\in U$, $f(x)\in V$.

Узмимо $W := f^{-1}(V)\times U \in \mathcal{T}_{X\times Y}$. Тада је W тражена околина. Заиста, $W\cap\Gamma_f=\emptyset$. Птс. $(\exists (\tilde{x}, f(\tilde{x}))\in f^{-1}(V)\times U)$, тј. $f(\tilde{x})\in U\cap V$ ↯.

Дакле, Γ_f^c је отворен, па је Γ_f затворен. ■

$\boxed{3.}$ Нека је $f:X\to Y$ непрекидно, „на“ и отворено. Ако је $\Gamma_f\in\mathcal{F}_{X\times Y}$, онда је Y T_2.

▲ Y је $T_2 \iff \Delta_Y\in\mathcal{F}_{Y\times Y} \iff \Delta_Y^c \in \mathcal{T}_{Y\times Y}$

Посматрајмо пресликавање $f\times \mathbb{1}_Y : X\times Y \longrightarrow Y\times Y$

$$(x,y) \longmapsto (f(x),y)$$

f и $\mathbb{1}_Y$ су отворена, па је и $f\times \mathbb{1}_Y$ отворено, па

$$(f\times \mathbb{1}_Y)(\underbrace{\Gamma_f^c}_{\in \mathcal{T}_{X\times Y}}) \in \mathcal{T}_{Y\times Y}$$

Показујемо да је $(f\times \mathbb{1}_Y)(\Gamma_f^c) = \Delta_Y^c$.

$\subseteq$: $(x,y)\in \Gamma_f^c \Leftrightarrow y \neq f(x)$

$\Rightarrow (f\times \mathbb{1}_Y)(x,y) = (f(x),y) \notin \Delta_Y \Rightarrow (f(x),y)\in \Delta_Y^c$

$\supseteq$: $(y_1,y_2)\in \Delta_Y^c$, тј. $y_1 \neq y_2$.

f је „на" па постоји $x\in X$ т.д. $f(x)=y_1$.

Тада је $(y_1,y_2) = (f(x),y_2) = (f\times \mathbb{1}_Y)(\underbrace{x,y_2}_{\in \Gamma_f^c})$

Дакле, $\Delta_Y^c \in \mathcal{T}_{Y\times Y}$, па је Y T_2. ■

Дефиниција $(X,\mathcal{T}_X)$ је регуларан простор ако

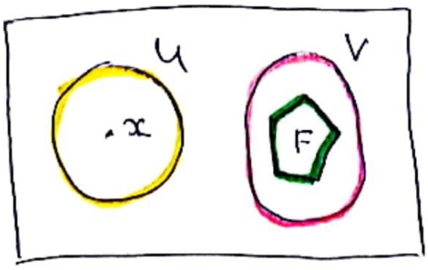
$$(\forall x\in X)(\forall F\in \mathcal{F}_X)\ x\notin F \Rightarrow (\exists U,V\in \mathcal{T}_X)\ U\cap V=\emptyset \wedge x\in U \wedge F\subseteq V.$$

Дефиниција X је T_3 простор ако је T_1 и регуларан.

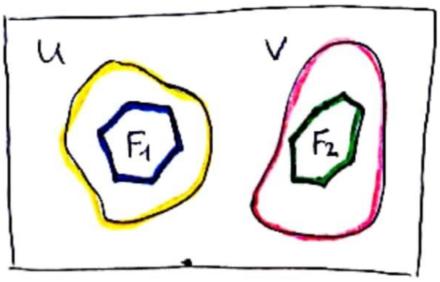
Дефиниција $(X,\mathcal{T}_X)$ је нормалан простор ако

$$(\forall F_1,F_2\in \mathcal{F}_X)\ F_1\cap F_2=\emptyset \Rightarrow (\exists U,V\in \mathcal{T}_X)\ U\cap V=\emptyset \wedge F_1\subseteq U \wedge F_2\subseteq V.$$

Дефиниција X је T_4 простор ако је T_1 и нормалан.



T_3



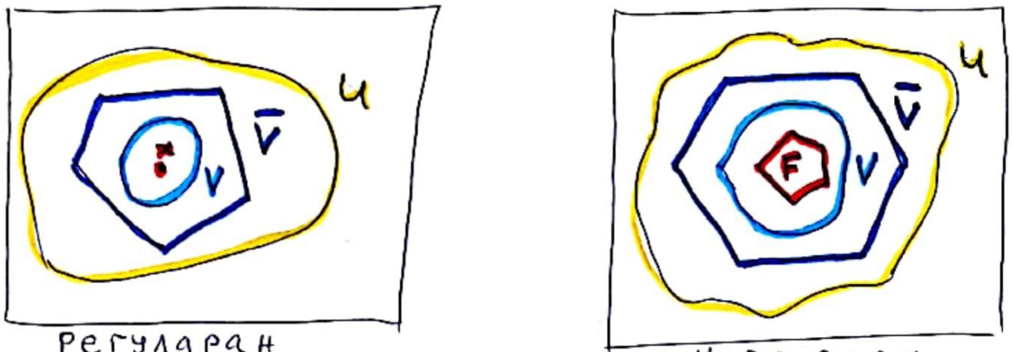
T_4

Теорема X је регуларан ако и само ако

$$(\forall x\in X)(\forall U\in \mathcal{O}(x))(\exists V\in \mathcal{T}_X)\ x\in V\subseteq \overline{V}\subseteq U.$$

Теорема X је нормалан ако и само ако

$$(\forall F\in \mathcal{F}_X)(\forall U\in\mathcal{O}(F))(\exists V\in\mathcal{T}_X)\ F\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U.$$



РЕГУЛАРАН НОРМАЛАН

Пример T_3 и T_4 нису непрекидне инваријанте.

$(\mathbb{R},\mathcal{U}) \xrightarrow{\mathbb{1}} (\mathbb{R},\mathcal{D})$ је непрекидно

јесте T_3, T_4 није ни T_1

Пример Сваки метрички простор је T_4.

$$\boxed{M \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3\Rightarrow T_2\Rightarrow T_1}$$

Наследност: Ако је X регуларан, онда је и $A\subseteq X$ рег.

Нормалност није наследна, али је слабо наследна, тј. преносе се на затворене потпросторе.

X нормалан и $A\in\mathcal{F}_X \Rightarrow A$ је нормалан.

$\boxed{4.}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_4.

▲ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је T_1

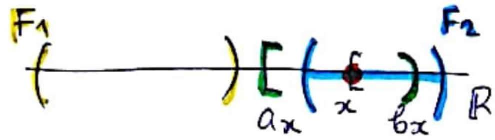
Нека су $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ и Б.У.О. $x < y$.
Узмимо $U := [x, y)$, $V := [y, y+1)$.
Тада $U, V \in \mathcal{S}$, $U \cap V = \emptyset$ и $x \in U$, $y \in V$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је нормалан

Нека су $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Ако $x \in F_2 \Rightarrow x \in F_1^c$, па постоји базни $[a_x, b_x)$ т.д.

$$x \in [a_x, b_x) \subseteq F_1^c,$$



одакле је $x \in [x, b_x) \subseteq F_1^c$.

Слично за $x \in F_1$ постоји c_x т.д. $[x, c_x) \subseteq F_2^c$.

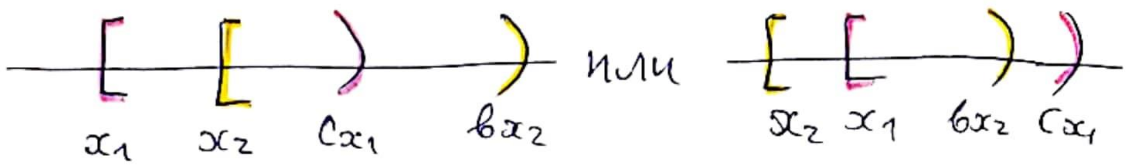
Нека је
$$U_1 := \bigcup_{x \in F_1} [x, c_x),$$
$$U_2 := \bigcup_{x \in F_2} [x, b_x).$$

Тада је $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$.

Још да проверимо да ли су U_1 и U_2 дисјунктни.

тј. $(\exists \alpha \in U_1 \cap U_2)$

$$\Rightarrow (\exists x_1 \in F_1)(\exists x_2 \in F_2)\ \alpha \in \underbrace{[x_1, c_{x_1})}_{\subseteq F_2^c} \cap \underbrace{[x_2, b_{x_2})}_{\subseteq F_1^c}$$



Тада или $x_2 \in [x_1, c_{x_1}) \subseteq F_2^c$ ↯

или $x_1 \in [x_2, b_{x_2}) \subseteq F_1^c$ ↯

Дакле, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, па је $(\mathbb{R}, S)$ нормалан.

Коначно, $(\mathbb{R}, S)$ је T_4. ■

Пример $(\mathbb{R}, S)$ је T_4, али $(\mathbb{R}, S) \times (\mathbb{R}, S)$

није T_4 јер није нормалан.

(Ово ћемо доказати касније)