$\boxed{3.}$ Нека је $(M,d)$ повезан метрички простор и нека је $|M| \geq 2$. Доказати да је $M$ непребројив.

▲ Нека су $a, b \in M$, $a \neq b$ и нека је $f: M \to \mathbb{R}$

$$f(x) := d(a,x) \quad \text{(растојање је непрекидно).}$$

Приметимо $f(a) = 0$, $f(b) = d(a,b) > 0$.

$$0,\ d(a,b) \in \underbrace{f(M)}_{\text{повезан}} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [0, d(a,b)] \subseteq f(M)$$

$$\Rightarrow f(M) \text{ је непребројив.}$$

Како је $|M| \geq |f(M)|$, то је и $M$ непребројив. ■

$\boxed{4.}$ Доказати да међу следећим скуповима нема хомеоморфних:

(а) $[a,b)$, $(a,b)$, $[a,b]$, $S^1$;

(б) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ за $n>1$;

(в) $S^1$, $S^n$ за $n>1$.

▲ (а) $\underbrace{[a,b),\ (a,b)}_{\text{нису компактни}} \not\simeq \underbrace{[a,b],\ S^1}_{\text{компактни}}$

- $[a,b) \simeq (a,b)$?

ппс. да јесу хомеоморфни, тј. да постоји

$h : [a,b) \xrightarrow{\approx} (a,b)$. Тада је

$$(a,b) = [a,b) \setminus \{a\} \overset{h}{\approx} (a,b) \setminus \{h(a)\}$$

повезан

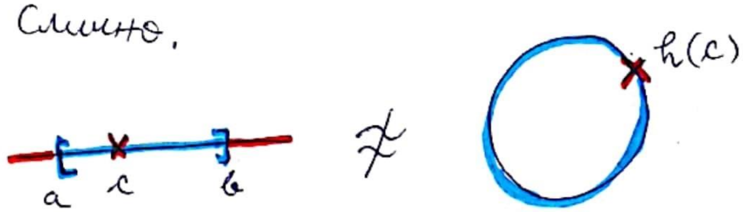
није повезан

↯


$\Rightarrow [a,b) \not\approx (a,b)$

• $[a,b] \approx S^1$ ?

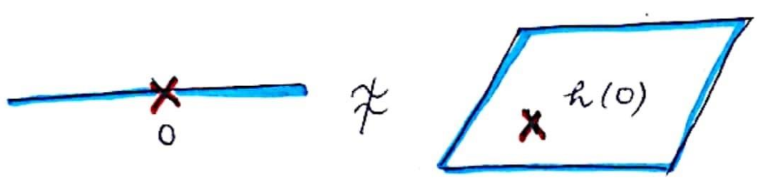
Слично.




$[a,b] \setminus \{c\}$ — није повезан

$S^1 \setminus \{h(c)\}$ — повезан

(б)




$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — није повезан

$\mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$ — повезан

(в) птс. $S^1 \approx S^n \Rightarrow \underbrace{S^1 \setminus *}_{\approx \mathbb{R}} \approx \underbrace{S^n \setminus \{h(*)\}}_{\approx \mathbb{R}^n} \Rightarrow \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$ ↯ ■

**Теорема** Ако је $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$, $V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \setminus \{\emptyset\}$ и $U \approx V$, онда је $m = n$.

# Компоненте повезаности

**Дефиниција** Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и релација $\sim$ дата са

$$(\forall x, y \in X) \quad x \sim y \iff (\exists \text{ повезан } A \subseteq X) \ x, y \in A.$$

**Теорема** $\sim$ је релација еквиваленције.

**Дефиниција** Класе $C_x$, $x \in X$ ове релације називамо компонентама повезаности од $X$.

**Теорема** $(\forall x \in X) \ C_x \in \mathcal{F}_X$.

▲ $C_x$ је повезан, па је и $\overline{C_x}$ повезан. Одавде је $\overline{C_x} \subseteq C_x$, па је $C_x = \overline{C_x}$, тј. $C_x$ је затворен. ■

**Пример** $C_x$ не мора бити отворен. Посматрајмо $X = \mathbb{Q}$, са топологијом наслеђеном од $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}$.

Свако $q \in \mathbb{Q}$ је једна компонента повезаности, тј. $q \nsim r$ за $q \neq r$. Заиста, нека је $q \neq r$. Тада постоји $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ т.д. БУО $q < x < r$. Претпоставимо супротно да је $C_q = C_r =: A$, тј. да је $q \sim r$.

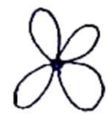
Тада су $A \cap (-\infty, x]$ и $A \cap [x, +\infty)$ затворени и дисјунктни па чине дисконекцију од $A$ ↯.

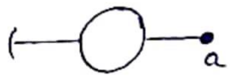
Дакле, класе су $C_q = \{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$. Са друге стране ниједна класа није отворен скуп.

**Теорема** Број компоненти повезаности је тополошка инваријанта.

**1.** Да ли су хомеоморфни простори $X$ и $Y$:

(а) $X$: 

$Y$:  ;

(б) $X$: 

$Y$:  ?

▲ (а) пп. да постоји $h: X \xrightarrow{\approx} Y$.

$X \setminus \{a\}$ има 3 компоненте повезаности

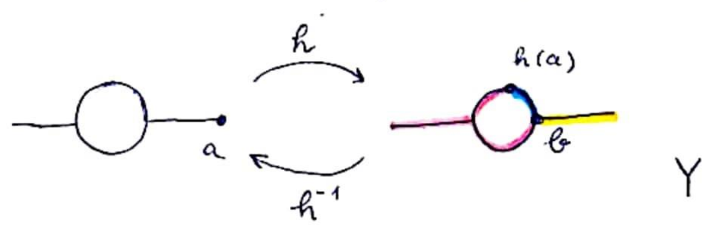
$Y \setminus \{h(a)\}$ има 1 или 4 компоненте повезаности

$\Rightarrow X \not\approx Y$

(б) пп. да постоји $h: X \xrightarrow{\approx} Y$.

$$Y \approx X \setminus \{a\} \overset{h}{\approx} Y \setminus \{h(a)\}$$

$Y$ повезан $\Rightarrow$ $Y \setminus \{h(a)\}$ повезан $\Rightarrow$ $h(a) \in$ кругу




Даље, $(Y \setminus \{h(a)\}) \setminus \{b\} \approx (X \setminus \{a\}) \setminus \{h^{-1}(b)\}$

3 компоненте повезаности — 1 или 2 компоненте повезаности ↯ ■

Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори, база од $X \times Y$ је дата са $\mathcal{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$

$\boxed{2.}$ Нека су $X$ и $Y$ тополошки простори. $C$ је компонента повезаности од $X \times Y$ ако и само ако

$$(\exists C_x \subseteq X)(\exists C_y \subseteq Y)\ C = C_x \times C_y.$$

$\Rightarrow$: У датој топологији пројекције $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ су непрекидне (топологија се управо задаје т.д. $p_X$ и $p_Y$ буду непрекидне).

$C$ је компонента повезаности па је повезан, па су и $p_X(C)$ и $p_Y(C)$ повезани.

Напомена: овде не мора бити „=". Нпр. $C = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$, а $p_X(C) \times p_Y(C) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (\exists C_x \subseteq X)\ p_X(C) \subseteq C_x$$
$$(\exists C_y \subseteq Y)\ p_Y(C) \subseteq C_y$$

Тада је $\underbrace{C}_{\text{компонента повезаности}} \subseteq p_X(C) \times p_Y(C) \subseteq \underbrace{C_x \times C_y}_{\text{повезан}}$

$\Rightarrow C = C_x \times C_y.$

$\Leftarrow$: Нека су $C_x \subseteq X$ и $C_y \subseteq Y$ две компоненте повезаности и $C = C_x \times C_y$. Тада је $C$ повезан па постоји нека компонента повезаности $K \subseteq X \times Y$ т.д. $C \subseteq K$.

Тада је $K = p_X(K) \times p_Y(K)$ (увек важи „$\subseteq$", а овде $p_X(K) \times p_Y(K)$ је повезан и $K$ компонента повезаности, па је „=")

$$\Rightarrow \underbrace{C_x}_{\text{компонента повезаности}} \subseteq \underbrace{p_X(K)}_{\text{повезан}}, \quad \underbrace{C_y}_{\text{компонента повезаности}} \subseteq \underbrace{p_Y(K)}_{\text{повезан}}$$

$\Rightarrow C_x = p_X(K)$, $C_y = p_Y(K)$, па је

$$C = C_x \times C_y = p_X(K) \times p_Y(K) = K.$$

Дакле, $C$ јесте компонента повезаности од $X \times Y$. ■

## Локална повезаност

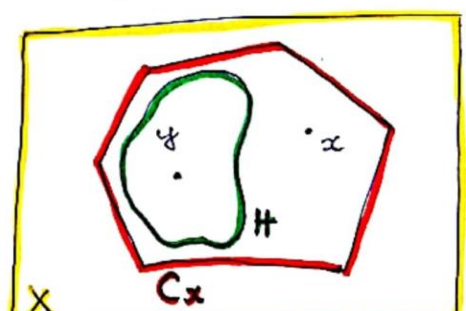
$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је локално повезан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \text{ и } H \text{ је повезан.}$$

$\boxed{1.}$ Ако је $(X, \mathcal{T})$ локално повезан и $C_x$ компонента повезаности, онда је $C_x \in \mathcal{T}$.

▲ Нека је $x \in X$, $C_x$ компонента и $y \in C_x$ произвољно.

Како је $X \in \mathcal{O}(y)$, то постоји $H \in \mathcal{O}(y)$ т.д. је повезан.




$H$ и $C_x$ су повезани и садрже $y$, а $C_x$ је највећи такав (јер је $C_x$ унија свих повезаних који садрже $y$), па је $H \subseteq C_x$, а одатле је $y \in \underbrace{\operatorname{int} H}_{\text{отворен}} \subseteq C_x$. Дакле, $C_x$ је отворен. ■

$\boxed{2.}$ Да ли су следећи простори локално повезани:

(а) $(X, \mathcal{T}_d)$; (б) $(X, \mathcal{T}_a)$; (в) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ ?

▲ (а) Нека су $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ произвољни.

узмемо $H := \{x\}$ – повезан и $H \subseteq G \Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ јесте локално повезан.

(б) Ако је $x \in X$ и $G \in \mathcal{O}(x)$ мора бити баш $G = X$, па узмемо $H := G = X$ – повезан.

(в) Тврдимо: ниједан скуп са бар 2 елемента није повезан.

$(\forall a \in \mathbb{R})$ $(-\infty, a) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [-n, a) \in \mathcal{S}$ и $[a, +\infty) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [a, n) \in \mathcal{S}$.

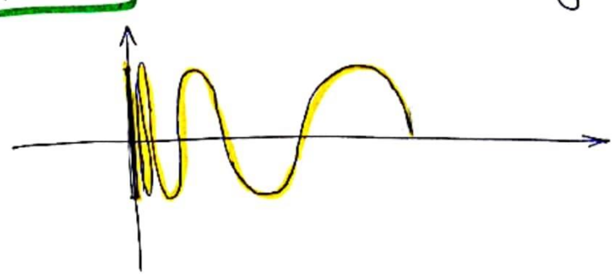
Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ произвољан и $|A| \geqslant 2$ и нека су $a, b \in A$, $b < a$. Тада је $A = \underset{\in \mathcal{S}_A}{\underbrace{(A \cap (-\infty, a))}} \sqcup \underset{\in \mathcal{S}_A}{\underbrace{(A \cap [a, +\infty))}}$,

па $A$ није повезан.

Са друге стране, $\operatorname{int}\{x\} = \phi$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

Дакле ниједан скуп не може бити она околина $H$ из дефиниције (једночлани скупови нису околине, а вишечлани нису повезани), па $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није локално повезан. ■

$\boxed{\text{Пример}}$ Тополошка синусоида није локално повезана.



$X = \left\{ (x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, +\infty) \right\} \cup$

$\cup \ \{0\} \times [-1, 1]$

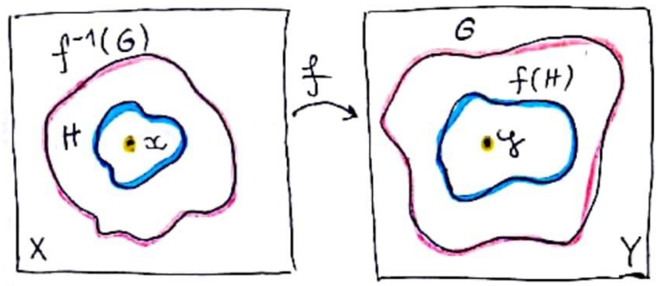
Локална повезаност није непрекидна инваријанта.

**Пример** $\mathbb{1}_X : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S})$, $\quad (\mathbb{1}_X(x) = x,\ x \in \mathbb{R})$

$\mathbb{1}$ је непрекидно и $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ је локално повезан, али $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није.

**Став** Нека је $f : X \longrightarrow Y$ непрекидно, „на" и отворено. Ако је $X$ локално повезан, онда је и $Y$ локално повезан.

▲ Нека је $y \in Y$, $G \in \mathcal{O}(y)$.




$f$ је „на", па

$(\exists x \in X)\ f(x) = y$.

$f$ је непрекидно $\Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{O}(x)$.

$X$ је локално повезан па $(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq f^{-1}(G)$ и $H$ повезан.

Тада је $f(H)$ повезан, $y \in f(H)$ и $f(H) \subseteq G$.

Још да се уверимо да је $f(H) \in \mathcal{O}(y)$, тј. да $y \in \operatorname{int}(f(H))$.

$$H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in \operatorname{int} H \Rightarrow y \in \underbrace{\underset{\text{отворено}}{f}(\underset{\text{отворен}}{\operatorname{int} H})}_{\text{отворен}} \subseteq f(H),\ \text{па}$$

заиста $y \in \operatorname{int}(f(H))$

Дакле, $Y$ је локално повезан. ■

# Путна повезаност

Дефиниција Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\sim$ релација на $X$ дата са

$$x \sim y \iff (\exists u : I \to X) \text{ и непрекидно, } u(0) = x,\ u(1) = y.$$

$\sim$ је релација еквиваленције, а класе при овој релацији називамо компонентама путне повезаности. Ако $X$ има само једну компоненту, кажемо да је путно повезан. Компоненте означавамо са $P_x$, $x \in X$.

Теорема Ако је $X$ путно повезан, онда је и повезан.

Дефиниција Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је локално путно повезан ако

$$(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))\ H \subseteq G \text{ и } H \text{ путно повезан.}$$

Теорема Ако је $X$ локално путно повезан, онда

$$(\forall x_0 \in X)\ P_{x_0} \in \mathcal{T}_X.$$

Специјално, $P_{x_0} = X \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in A} P_{x_\alpha} \right) \in \mathcal{F}_X$.

Став Ако је $X$ локално путно повезан, онда

$$X \text{ је повезан} \iff X \text{ је путно повезан.}$$

▲ $\Leftarrow$: увек важи.

$\Rightarrow$: птс. да $X$ није путно повезан, па имамо бар две компоненте путне повезаности, тј. нека је $\emptyset \neq P_{x_0} \neq X$ компонента. Тада $X = P_{x_0} \sqcup (X \setminus P_{x_0})$,

отворени и непразни

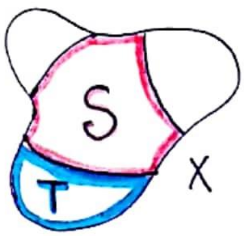
па је $X$ неповезан. ↯ ■

**Лема** Ако је $A \subseteq Y$, онда $x \sim_A y \Rightarrow x \sim_Y y$.

($\sim_A$ значи „спојени путем у $A$")

**1.** Нека је $X$ путно повезан, $\emptyset \neq S \in \mathcal{F}_X$ путно повезан и $T$ нека компонента путне повезаности од $X \setminus S$. Тада је $T \cup S$ путно повезан.

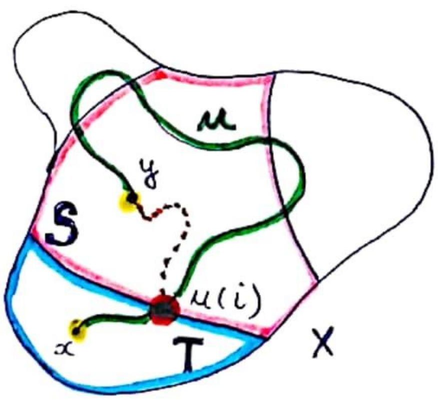
▲ Нека су $x, y \in T \cup S$.




1° $x, y \in T \Rightarrow x \sim_T y \Rightarrow x \sim_{T \cup S} y$;

2° $x, y \in S \Rightarrow x \sim_S y \Rightarrow x \sim_{T \cup S} y$.

3° $x \in T, y \in S$. $X$ је путно повезан па постоји $u : [0,1] \to X$ непрекидно т.д. $u(0) = x$, $u(1) = y$.




Нека је $i := \inf(u^{-1}(S))$. Како је $S$ затворен, то $u^{-1}(S) \in \mathcal{F}_{[0,1]}$, па $i \in u^{-1}(S)$, тј. $u(i) \in S$. При том $i \neq 0$ јер $u(0) = x \notin S$.

Приметимо да је $u([0,i)) \subseteq T$.

Заиста, ако тпс. да $(\exists t \in (0,i))\ u(t) \in X \setminus (S \cup T)$, онда $u([0,t]) \subseteq X \setminus S$, па је $u|_{[0,t]}$ пут који спаја $u(0) \in T$ и $u(t)$ из неке друге компоненте. ↯

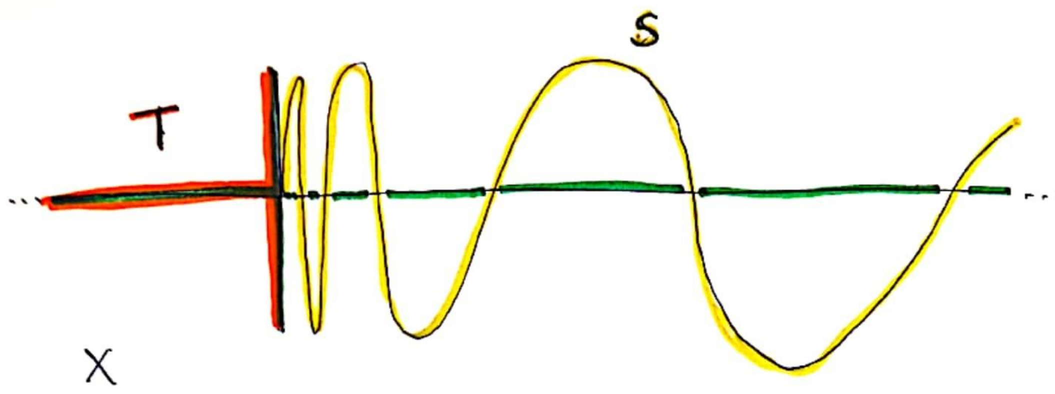
Дакле, $u([0,i)) \subseteq T$.

Сада имамо: $\left.\begin{array}{l} x \sim_{T \cup S} u(i) \ \text{(путем } u\text{)} \\ u(i) \sim_S y \ \text{(било којим путем)} \end{array}\right\} x \sim_{T\cup S} y$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Примедба}}$. Поставља се питање да ли је било неопходно да је $S \in \mathcal{F}_X$ у претходном задатку. Тај услов смо користили једино кад смо закључили да је $i \in u^{-1}(S)$ јер је и $u^{-1}(S)$ затворен. Јасно, ако $S \notin \mathcal{F}_X$ онда не мора бити $i \in u^{-1}(S)$, али ће бити у $\overline{u^{-1}(S)}$. И да ли се онда $u(i) \in \overline{S}$ може спојити путем са $y$? То питање се своди на питање да ли је затворење путно повезаног простора путно повезано? Одговор је НЕ. Пример за то је $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\}$. То мотивише овај контрапример:

$$X = \mathbb{R}\times\{0\} \cup \{(x,\sin\tfrac{1}{x}) \mid x\in(0,+\infty)\} \cup (\{0\}\times[-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$S = \{(x,\sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in (0,+\infty)\}, \quad T = (\{0\}\times[-1,1]) \cup ((-\infty,0]\times\{0\})$$




$X, S$ јесу путно повезани, $T$ јесте компонента од $X \setminus S$, али $T \cup S$ није путно повезан!
Суштински разлог је то што $\overline{S} = S \cup \{0\} \times [-1,1]$ није путно повезан.

$\boxed{2.}$ Не постоји простор $X$ т.д. је $\mathbb{R} \approx X \times X$.

▲ Пп. да постоји такав $X$ и $h : \mathbb{R} \xrightarrow{\approx} X \times X$.

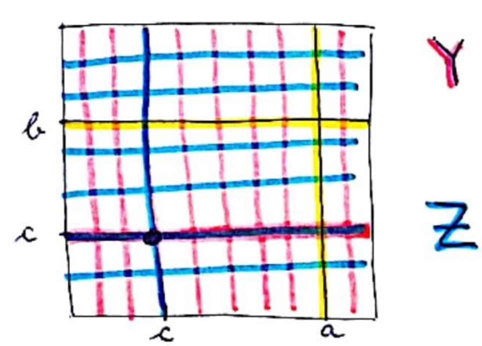
$\mathbb{R}$ повезан $\Rightarrow$ $X \times X$ је повезан $\Rightarrow$ $p_1(X \times X) = X$ је повезан.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ није повезан $\Rightarrow$ $(X \times X) \setminus \{h(0)\}$ није повезан.

Нека је $h(0) = (a, b) \in X \times X$, затим $c \in X \setminus \{a, b\}$ и

$$Y := \left( \bigcup_{\alpha \in X \setminus \{a\}} \{\alpha\} \times X \right) \cup \left( X \times \{c\} \right)$$

$$Z := \left( \bigcup_{\beta \in X \setminus \{b\}} X \times \{\beta\} \right) \cup \left( \{c\} \times X \right)$$




На основу последње теореме на стр. 51, $Y$ и $Z$ су повезани.
Из исте теореме, како је $(c, c) \in Y \cap Z \neq \emptyset$, то је и

$Y \cup Z = X \times X \setminus \{(a, b)\}$ повезан. ↯ ■