Хомеоморфизми

Дефиниција Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори. Пресликавање $f: X \to Y$ је хомеоморфизам ако важи:

(1) f је бијекција;

(2) f је непрекидно;

(3) f^{-1} је непрекидно.

Ако постоји хомеоморфизам између X и Y пишемо $X \approx Y$.

Приметимо да је $\approx$ релација еквиваленције на класи тополошких простора.

Став Нека је $f: X \to Y$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) f је хомеоморфизам;

(2) f је бијекција, непрекидно и отворено;

(3) f је бијекција, непрекидно и затворено;

(4) f је бијекција и $(\forall A \subseteq X)\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

▲ (1) ⇒ (2): f је непрекидна бијекција по дефиницији.
Још да проверимо отвореност:
нека је $U \in \mathcal{T}_X$.

$$f(U) = \underbrace{(f^{-1})}_{\substack{\text{непрекидно} \\ Y \to X}}{}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y,$$ па је f отворено.

(2) ⇒ (3): f је непрекидна бијекција, па још да проверимо затвореност:

$$F \in \mathcal{F}_X \Rightarrow F^c \in \mathcal{T}_X \overset{(2)}{\Longrightarrow} f(F^c) \in \mathcal{T}_Y \text{, али } f(F^c) = f(F)^c \text{, јер}$$

је f бијекција, па је $f(F)^c \in \mathcal{T}_Y$, тј. $f(F) \in \mathcal{F}_Y$.

Дакле, f је затворено.

(3) ⇒ (4): f је бијекција по претпоставци.

Нека је $A \subseteq X$. Показујемо $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\underset{\uparrow \atop \text{затворено}}{f}(\overset{\text{затворен} \atop \downarrow}{\overline{A}})}_{\text{затворен у } Y} = \overline{f(\overline{A})} \supseteq \overline{f(A)} \\ \\ \underbrace{f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}}_{\substack{\text{јер је } f \text{ непрекидно} \\ \text{(Теорема на стр. 34)}}} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

(4) ⇒ (1): Теорема са стр. 34 нам је дала тврђења еквивалентна непрекидности:

① $(\forall A \subseteq X)\ f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ и ② $(\forall B \subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

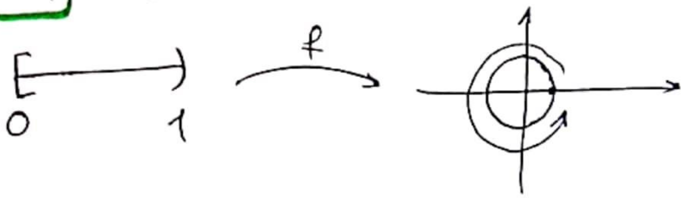
Из (4) добијамо да је f бијекција и непрекидно (због ①)

Применимо ② на f^{-1} да добијемо непрекидност од f^{-1}.

f^{-1} је непрекидно $\overset{②}{\Longleftrightarrow} (\forall A \subseteq X)\ \overline{(f^{-1})^{-1}(A)} \subseteq (f^{-1})^{-1}(\overline{A}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall A \subseteq X)\ \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ што следи из (4). Дакле, f је хомеоморфизам. ■

Пример $f : [0,1) \to S^1$ намотавање



Ово је непрекидна бијекција која није хомеоморфизам (јер f^{-1} није непрекидно).

1. Доказати да су сви коначни

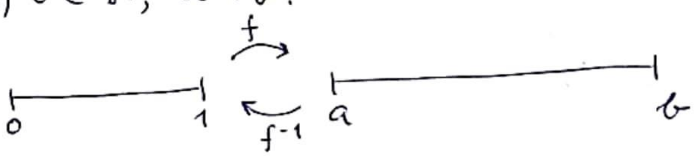
(а) затворени;

(б) отворени;

(в) полуотворени;

интервали међусобно хомеоморфни.

▲ (а) Довољно је показати да је $[0,1] \approx [a,b]$, за $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.



$f : [0,1] \to [a,b]$

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \alpha t + \beta \\ f(0) &= a \\ f(1) &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= \beta \\ \alpha + \beta &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f(t) = (b-a)t + a}$$

$f^{-1} : [a,b] \to [0,1]$

$$\boxed{f^{-1}(s) = \frac{s-a}{b-a}}$$

f и f^{-1} су један другом инверз и непрекидни су, па је f хомеоморфизам.

(б) слично.

(в) $[0,1) \approx [a,b)$, $(0,1] \approx (a,b]$ слично

$[0,1) \approx (0,1]$ дато са $f(t) = 1-t$. ▨

$\boxed{2.}$ (а) $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx (0,+\infty) \approx (-\infty,0)$;

(б) $[0,1) \approx [0,+\infty)$.

▲

(а) $(0,1) \approx \mathbb{R}$

$(0,1) \approx \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на основу претходног задатка.

Нека је $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ дато са $f(t) = \operatorname{tg} t$.

Тада је f хомеоморфизам ($f^{-1}(s) = \operatorname{arctg} s$).

Дакле,

$$(0,1) \approx \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \overset{f}{\approx} \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R} \approx (0,+\infty)$

$f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $f(t) = e^t$, $f^{-1}(s) = \ln s$

$(0,+\infty) \approx (-\infty,0)$

$f: (0,+\infty) \to (-\infty,0)$, $f(t) = -t$, $f^{-1}(s) = -s$

(б) $[0,1) \overset{\text{зад. 1.}}{\approx} [0, \frac{\pi}{2}) \overset{f}{\approx} [0,+\infty)$, где је $f(t) = \operatorname{tg} t$

II начин: $f(t) = \frac{t}{1-t}$, $f^{-1}(s) = \frac{s}{1+s}$. ▨

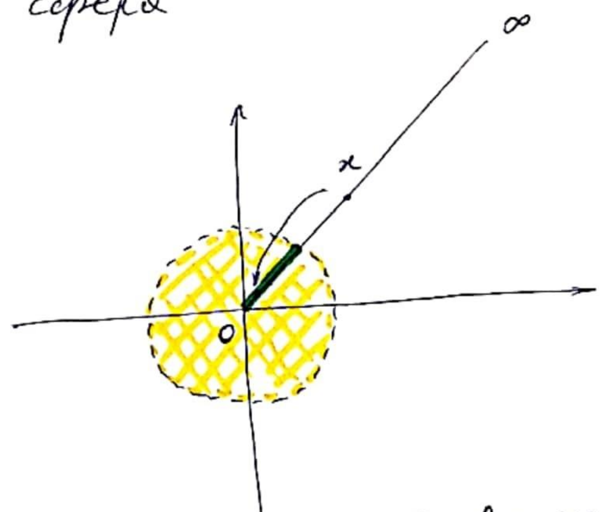
3. $\mathring{D}^2 \approx \mathbb{R}^2, \quad \mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n$.

▲ $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1 \}$ – затворен диск

$\mathring{D}^n = \operatorname{int} D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ – отворен диск

$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$ – сфера

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathring{D}^2$



$$f(x) = \underbrace{\frac{\|x\|}{1+\|x\|}}_{\text{интензитет}} \cdot \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{правац}}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{\|y\|}{1-\|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|}$$

На сваку полуправу из O применимо пресликавање $[0,+\infty) \to [0,1)$ из претходног задатка.

f и f^{-1} су непрекидна.

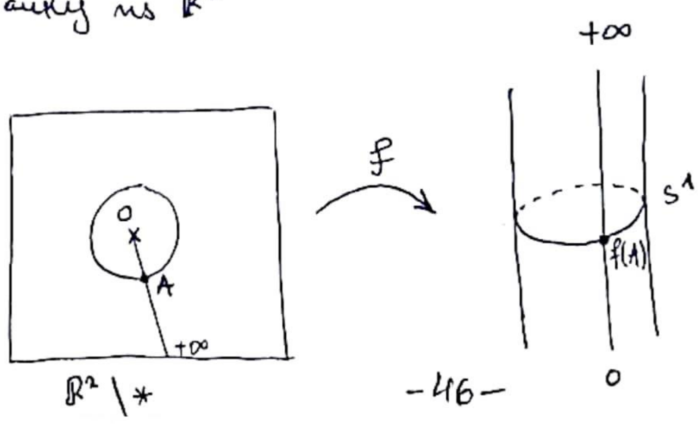
$\Rightarrow$ f је хомеоморфизам.

Слично се ради и $\mathring{D}^n \approx \mathbb{R}^n$. ■

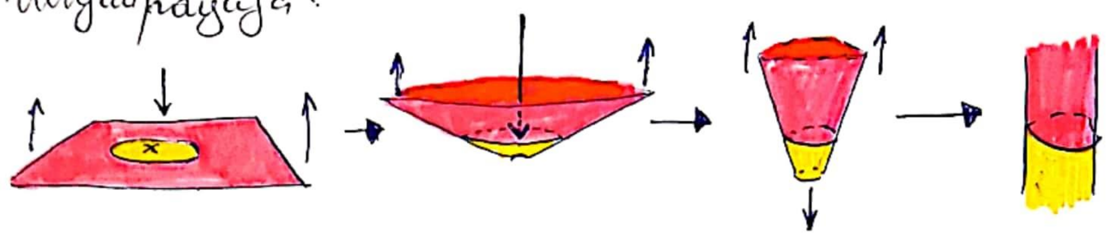
4. $\mathbb{R}^2 \setminus * \approx S^1 \times \mathbb{R}$.

$*$ – ознака за произвољну тачку из $\mathbb{R}^2$

▲



Илустрација:



Експлицитно: БУО $* = 0 \in \mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

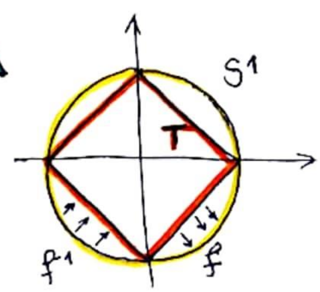
$$f(x) = \left(\frac{x}{\|x\|} , \ln \|x\| \right).$$

Из претходних пар задатака имамо:

$$\mathbb{R}^2 \setminus * \approx S^1 \times \mathbb{R} \approx S^1 \times (a, b) \approx S^1 \times (0, +\infty) \approx$$

$$\approx \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid a < \|x\| < b \} \approx \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1 \} \text{ и слично.}$$

5. $S^1 \approx T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1 \}$.



$$f : T \to S^1$$

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|} , \frac{y}{|x|+|y|} \right)$$

Лако се провери да је f хомеоморфизам.

Лема Ако је $f: X \to Y$ непрекидно, онда је

$$\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \approx X.$$

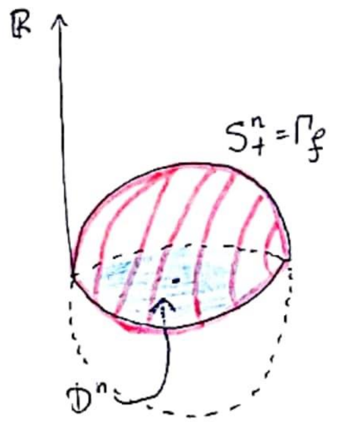
график функције f

▲ $h: X \to \Gamma_f$

$h(x) = (x, f(x))$, $h^{-1}(x, y) = x$. ■

6. $D^n \approx S^n_+$, где је $S^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ горња полусфера.

▲ Нека је $f: D^n \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$.



На основу леме је $D^n \approx \Gamma_f$.

$$\Gamma_f = \{(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{= x}, f(x)) \mid x \in D^n\} =$$

$$= \left\{ \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right) \mid x \in D^n \right\} =$$

$$= S^n_+$$

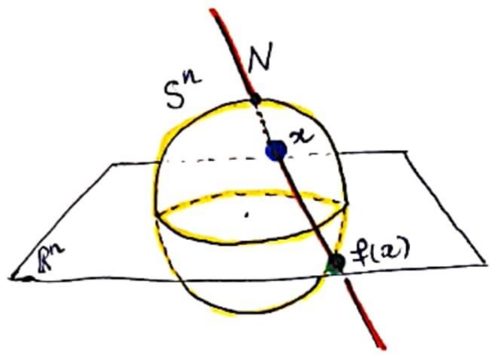
Дакле, $D^n \approx S^n_+$. ■

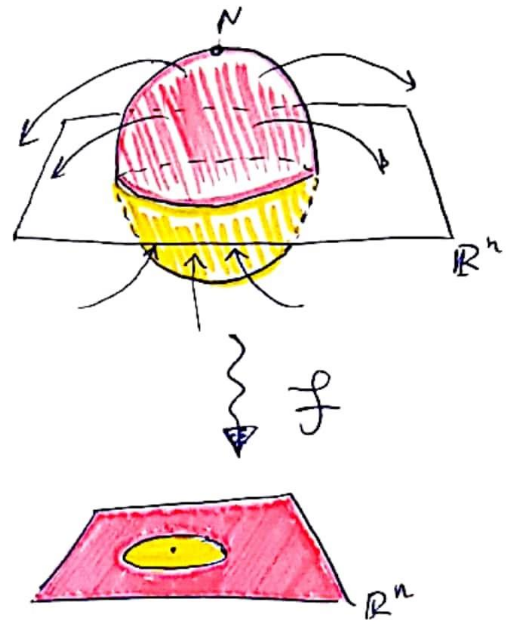
7. $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$.

▲ БУО $* = N$ (северни пол)

Уочимо $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Дефинишемо $f: S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ као стереографску пројекцију ($f(x)$ буде пресек праве кроз N и x и $\mathbb{R}^n$).





$f(x) = N + t(x - N) =$

$= (0,\dots,0,1) + t(x_1,\dots,x_n, x_{n+1} - 1) =$

$= \Big(tx_1,\dots,tx_n,\ t(x_{n+1}-1)+1\Big) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow\ t(x_{n+1}-1)+1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{1-x_{n+1}}$ – добро дефинисано јер $x_{n+1} \neq 1$ за $x \in S^n \setminus \{N\}$.

Дакле, $f(x_1,\dots,x_{n+1}) = \left(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}, 0\right)$.

Сада одређујемо $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$. Нека је $y = (y_1,\dots,y_n,0) \in \mathbb{R}^n$

$f^{-1}(y) = N + t(y - N) = \big(ty_1,\dots,ty_n, 1-t\big) \in S^n$

$\Rightarrow \|f^{-1}(y)\| = 1$, тј.

$t^2(y_1^2+\dots+y_n^2) + (1-t)^2 = 1$

$t^2(y_1^2+\dots+y_n^2) - 2t + t^2 = 0 \ \Big/ :t$

$$t(y_1^2+\dots+y_n^2+1)=2$$

$$t=\frac{2}{y_1^2+\dots+y_n^2+1}=\frac{2}{\|y\|^2+1}.$$

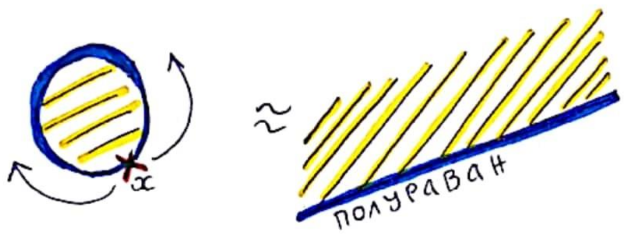
Дакле, $f^{-1}(y_1,\dots,y_n,0)=\left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1},\dots,\frac{2y_n}{\|y\|^2+1},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right)$.

f и f^{-1} су непрекидни и једно другом су инверз.

$\Rightarrow$ f је хомеоморфизам $\Rightarrow$ $S^n\setminus\{N\}\approx\mathbb{R}^n$. ■

Пример **(1)** $S^n_- = \{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1}\leq 0\}\approx S^n_+\approx D^n$;

(2) $D^2\setminus\{x\}\approx\mathbb{R}^2_+$ за $x\in\partial D^2$



Повезаност

Дефиниција За тополошки простор X кажемо да је повезан ако не постоји дисконекција тог простора

$\Leftrightarrow$ не постоје отворени (затворени) $U,V\neq\emptyset$ т.д. $U\sqcup V=X$;

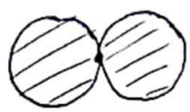
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X\cap\mathcal{F}_X=\{\emptyset,X\}$ - једини отворено-затворени скупови су $\emptyset$ и X;

$\Leftrightarrow$ ако је $f:X\to\{0,1\}$ непрекидно, онда је $f=\text{const}$.

Теорема Ако је $f:X\to Y$ непрекидно и X повезан, онда је $f(X)$ повезан.

Теорема Нека је X тополошки простор и $A\subseteq X$ повезан. Ако је $A\subseteq B\subseteq \overline{A}$, онда је и B повезан. (Специјално је и $\overline{A}$ повезан.)

Пример Ако је A повезан, $\operatorname{int}A$ и ∂A не морају бити.

A:  повезан;

$\operatorname{int}A$:  неповезан;

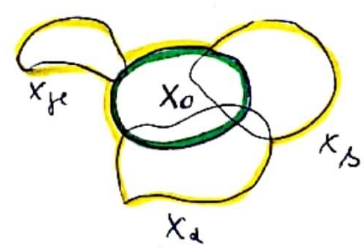
$B=(a,b)$ повезан;

$\partial B=\{a,b\}$ неповезан.

Теорема Нека су X_0, X_α, $\alpha\in\mathcal{A}$ повезани и нека је

$$(\forall\alpha\in\mathcal{A})\ X_0\cap X_\alpha\neq\emptyset.$$

Тада је и $X_0\cup\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha$ повезан.



1. Нека је X повезан и A прави подскуп од X. Доказати

(а) $\partial A\neq\emptyset$;

(б) ∂A повезан $\Rightarrow$ $\overline{A}$ повезан.

▲ (а) $X=\operatorname{int}A\sqcup\partial A\sqcup\operatorname{ext}A$

ПТС. $\partial A=\emptyset$. Тада је $X=\operatorname{int}A\sqcup\operatorname{ext}A$.

$\operatorname{int}A$ и $\operatorname{ext}A$ отворени и X повезан $\Rightarrow$ бар један од њих је празан.

1° $\mathrm{int}\, A = \emptyset \Rightarrow \mathrm{ext}\, A = X \Leftrightarrow \mathrm{int}(A^c) = X \Rightarrow A^c = X \Rightarrow A = \emptyset$ ↯

2° $\mathrm{ext}\, A = \emptyset \Rightarrow \mathrm{int}\, A = X \Rightarrow A = X$ ↯

Дакле, $\partial A \neq \emptyset$.

(б) Покажимо да ако је $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ непрекидно, онда је $f = \mathrm{const}$.

Нека је $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ непрекидно. Како је ∂A повезан, то је $f|_{\partial A} = \mathrm{const}$. Нека је БУО $f|_{\partial A} = 0$. Даље, нека је $F : X \to \{0,1\}$ дато са $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in (\overline{A})^c = \mathrm{ext}\, A \end{cases}$

Да ли је F непрекидно?

$\left.\begin{array}{l} F|_{\overline{\mathrm{ext}A}} = 0 \\ F|_{\overline{A}} = f \end{array}\right\}$ непрекидна и $\overline{\mathrm{ext}\, A}$, $\overline{A}$ су затворени, па на основу леме о лепљењу је и F непрекидно.

Како је X повезан, то је $F = \mathrm{const}$, тј. $F = 0$, па је и $f = F|_{\overline{A}} = 0$. Дакле, $\overline{A}$ је повезан. ∎

$\boxed{2.}$ Испитати повезаност простора:

(а) $(X, \mathcal{T}_a)$; (б) $(X, \mathcal{T}_d)$; (в) $(\mathbb{Q}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}})$; (г) $(\mathbb{Q}^c, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c})$;

(д) $(X, \mathcal{T}_{cf})$; (ђ) $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$; (е) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$; (ж) $(\{0,1\}, \mathcal{D}_{\{0,1\}})$.

▲ (а) $\mathcal{T}_a \cap \mathcal{F}_a = \{\emptyset, X\} \Rightarrow$ повезан;

(б) повезан $\Leftrightarrow |X| = 1$;

(в) $\mathbb{Q} = \underset{\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}}{\underset{\cap}{\left((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}\right)}} \sqcup \underset{\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}}{\underset{\cap}{\left((\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right)}} \Rightarrow$ није повезан

(г) $\mathbb{Q}^c = \underset{\mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c}}{\underset{\cap}{\left((-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}^c\right)}} \sqcup \underset{\mathcal{U}_{\mathbb{Q}^c}}{\underset{\cap}{\left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}^c\right)}} \Rightarrow$ није повезан

(д) X није повезан $\Leftrightarrow X = F \sqcup G$, $F, G \in \mathcal{F}_{cf}$ и $F, G \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ и G су коначни $\Rightarrow X$ је коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$.

Закључак:

X је повезан $\Leftrightarrow |X| = 1$ или X бесконачан

X није повезан $\Leftrightarrow 1 < |X| < \infty$

(ђ) $\mathbb{R} = \underset{\mathcal{S}}{\underset{\cap}{\underset{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, 0)}{\underset{\parallel}{(-\infty, 0)}}}} \sqcup \underset{\mathcal{S}}{\underset{\cap}{\underset{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n)}{\underset{\parallel}{[0, +\infty)}}}} \Rightarrow$ није повезан

(е) $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \Rightarrow$ повезан

(ж) $\mathcal{D}_{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\underbrace{\{0,1\} = \underset{\text{није отворен}}{\{0\}} \sqcup \underset{\text{отворен}}{\{1\}}}_{\text{једини начин да } \{0,1\} \text{ представимо као дисјунктну унију 2 непразна скупа}} \Rightarrow \{0,1\}$ је повезан. ■