**4.** Описати све свуда и нигде густе скупове у $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$.

▲ $$\mathcal{T}_{cf} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U^c \text{ коначан} \} \cup \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{F}_{cf} = \{ F \subseteq \mathbb{R} \mid F \text{ коначан} \} \cup \{\mathbb{R}\}$$

- $A$ је свуда густ $\Leftrightarrow \overline{A} = \mathbb{R}$

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & A \text{ коначан} \\ \mathbb{R}, & A \text{ бесконачан} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A \text{ је свуда густ} \Leftrightarrow A \text{ је бесконачан}}$$

- $A$ је нигде густ $\Leftrightarrow \operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$

$$\operatorname{int}(\overline{A}) = \begin{cases} \emptyset, & A \text{ коначан} \\ \mathbb{R}, & A \text{ бесконачан} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A \text{ је нигде густ} \Leftrightarrow A \text{ је коначан}}$$

▨

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ је предбаза топологије $\mathcal{T}$ ако је фамилија свих коначних пресека елемената из $\mathcal{S}$ база од $\mathcal{T}$

Дакле, $\mathcal{B} = \{ U_1 \cap \dots \cap U_n \mid U_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \}$ – база

$$\mathcal{T} = \{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{B} \} =$$

$$= \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left( \bigcap_{i=1}^{n_\lambda} U_{\lambda, i} \right) \mid U_{\lambda,i} \in \mathcal{S}, n_\lambda \in \mathbb{N} \right\}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ Неке предбазе на $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$ ← (ово је и база)

$$\mathcal{S}_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

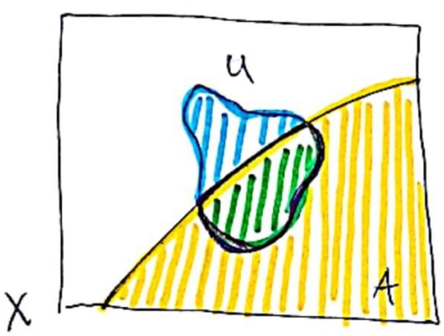
$$\mathcal{S}_3 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{S}_4 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$$

## Наслеђена топологија

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subseteq X$.

Наслеђена топологија на $A$ је $\mathcal{T}_A \overset{def}{=} \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$




Ако је $i_A : A \hookrightarrow X$ инклузија, $\mathcal{T}_A$ је најмања топологија т.д. је $i_A$ непрекидно.
(Могло би се дефинисати и као
$$\mathcal{T}_A = \{i_A^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}\}\ )$$

Како изгледају затворени скупови у $A$?

$$F \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow (F)^c_A \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\,(F)^c_A = U \cap A \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\, F = U^c \cap A \Leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{F})\, F = A \cap G$$

Дакле, $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}_X\}$.

Приметимо да не мора да важи $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$, тј.

$U \in \mathcal{T}_A \not\Rightarrow U \in \mathcal{T}_X$.

$\boxed{\text{Пример}}$ $[0,+\infty) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ и имамо да је $[0,1)$ отворен у $[0,+\infty)$, а није у $\mathbb{R}$ нити у $\mathbb{R}^2$.

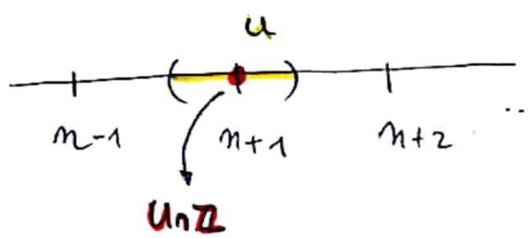
Обрнуто увек важи. Ако је $U \subseteq A \subseteq X$ и $U \in \mathcal{T}_X$, онда $U \in \mathcal{T}_A$.

Специјално, ако је $\underline{A \in \mathcal{T}_X}$, онда $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$.

Слично, ако је $A \in \mathcal{F}_X$, онда $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_X$.

$\boxed{1.}$ Нека је $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_{\mathbb{Z}})$ тополошки простор са топологијом наслеђеном од $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Одредити $\partial\{n^3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и $\operatorname{int}\{17,12\}$.

$\Delta$




$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{T}_d$ јер су сви једночлани скупови отворени.

Дакле, сваки скуп је и отворен и затворен, па је

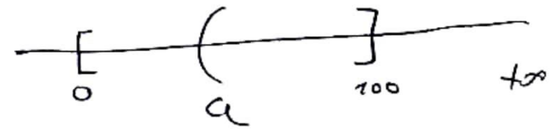
$\operatorname{int}\{17,12\} = \{17,12\}$

Даље, $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{\overline{A}}} = \underset{A}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{int} A}} \sqcup \partial A$ па је $\partial A = \emptyset$ за сваки $A \subseteq \mathbb{Z}$,

па је и $\partial\{n^3 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$. ■

**2.** Нека је $\left([0,100], \mathcal{D}_{[0,100]}\right)$ тополошки простор са топологијом наслеђеном од $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$.
Одредити $\overline{\{10\}}$, $\operatorname{int}[1,2]$, $\operatorname{int}[99,100]$, $\partial[1,2]$.

▲ $\mathcal{D} = \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$




$$\mathcal{D}_{[0,100]} = \{(a,100] \mid 0 \le a \le 100\} \cup \{[0,100]\}$$

$$\mathcal{F}_{[0,100]} = \{[0,a] \mid 0 \le a \le 100\} \cup \{\emptyset\}$$

$\overline{\{10\}} = [0,10]$ (најмањи затворен који садржи $\{10\}$)

$\operatorname{int}[1,2] = \emptyset$ (највећи отворен у $[1,2]$)

$\operatorname{int}[99,100] = (99,100]$

$\partial[1,2] = \overline{[1,2]} \setminus \operatorname{int}[1,2] = [0,2] \setminus \emptyset = [0,2]$. ■

# Непрекидност

Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y,\mathcal{T}_Y)$ два тополошка простора.

**Дефиниција** Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако
$$(\forall U \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

**Дефиниција** $f: X \to Y$ је непрекидно у $x_0 \in X$ ако
$$(\forall U \in \mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(x_0).$$

**Став** $f$ је непрекидно на $X$ ако и само ако је непрекидно у свакој тачки.

**Примери** (1) $f:(X,\mathcal{T}_d)\to(Y,\mathcal{T})$ је увек непрекидно;

(2) $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_a)$ је увек непрекидно;

(3) $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ и $f=\mathrm{const}\Rightarrow f$ је непрекидно;

(4) $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ и $f=\mathbb{1}_X$ $\quad(\mathbb{1}_X(x)=x)$

$f$ је непрекидно $\Leftrightarrow \mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_1$.

**Теорема** Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(а) $f$ је непрекидно;

(б) $(\forall F\in\mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$;

(в) $(\forall B\in\mathcal{B}_Y)\ f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_X$, где је $\mathcal{B}_Y$ база од $\mathcal{T}_Y$;

(г) $(\forall U\in\mathcal{S}_Y)\ f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_X$, где је $\mathcal{S}_Y$ предбаза од $\mathcal{T}_Y$;

(д) $(\forall A\subseteq X)\ f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$;

(ђ) $(\forall B\subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

$\blacktriangle$ Доказујемо само (б)$\Leftrightarrow$(д)$\Leftrightarrow$(ђ).

(б) $\Rightarrow$ (д): Како је $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})\overset{(б)}{\in}\mathcal{F}_X$, то је $\overline{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Када применимо $f$ добијамо

$$f(\overline{A})\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)}))\subseteq\overline{f(A)}$$

(д) $\Rightarrow$ (ђ): Нека је $B \subseteq Y$ и $A := f^{-1}(B)$ и применимо (д) на $A$:

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{\underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\subseteq B}} \subseteq \overline{B}$$

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

(ђ) $\Rightarrow$ (б): Нека је $F \in \mathcal{F}_Y$ (хоћемо $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$).

$$f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)} \overset{(ђ)}{\subseteq} f^{-1}(\underset{= F}{\overline{F}}) = f^{-1}(F)$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X. \ \blacksquare$$

1. Нека је $p : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ полином. Доказати да је $p$ непрекидно.

▲ $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

Ако је $p = \text{const}$, онда је очигледно непрекидно.

Нека је $F \in \mathcal{F}_{cf}$, тј. $F$ је коначан или $\mathbb{R}$.

1° $F = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ коначан

$p^{-1}(\{y_i\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = y_i\}$ = број нула полинома $p(x) - y_i$, тј. ово је коначан скуп

$$\Rightarrow \quad p^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{k} p^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{F}_{cf} \text{ (јер је коначан).}$$

$\boxed{2^\circ}$ $F = \mathbb{R}$

$$p^{-1}(F) = \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{cf}.$$

Дакле, $p$ је непрекидно. ■

Неке особине непрекидних пресликавања:

① $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z,\mathcal{T}_Z)$

$f, g$ непрекидна $\Rightarrow$ $g \circ f$ је непрекидно

② $i_A : (A,\mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X,\mathcal{T}_X)$, $A \subseteq X$

$i_A$ је непрекидно.

③ $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$, $A \subseteq X$, $\mathcal{T}_A$ - наслеђена топ.

Нека је $f|_A : A \to Y$ рестрикција, тј. $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$.

Ако је $f$ непрекидно, онда је и $f|_A$ непрекидно.

Ово следи из ① и ②:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f|_A"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$f|_A = f \circ i_A$

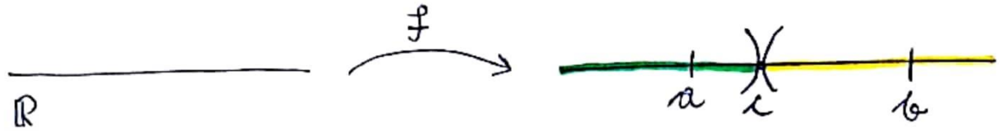
непрекидна

$\boxed{2.}$ Нека је $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{U})$. $f$ је непрекидно ако и само ако је $f = \text{const}$.

▲ Пп. $f \neq \text{const}$. (Смер „$\Leftarrow$" тривијално важи)

Тада $(\exists a,b\in\mathbb{R})$ $a\neq b \wedge a,b\in f(\mathbb{R})$. БУО $a<b$.

Нека је $c\in\mathbb{R}$ т.д. $a<c<b$




Нека је $A := f^{-1}((c,+\infty)) \in \mathcal{T}_{cf}\setminus\{\emptyset\} \Rightarrow A^c$ је коначан

отворен у $\mathcal{U}$ — јер $b\in A$

$B := f^{-1}((-\infty,c)) \in \mathcal{T}_{cf}\setminus\{\emptyset\} \Rightarrow B^c$ је коначан

Тада је $A^c\cup B^c$ коначан, али $A^c\cup B^c = (A\cap B)^c = \emptyset^c = \mathbb{R}$ ↯ ■

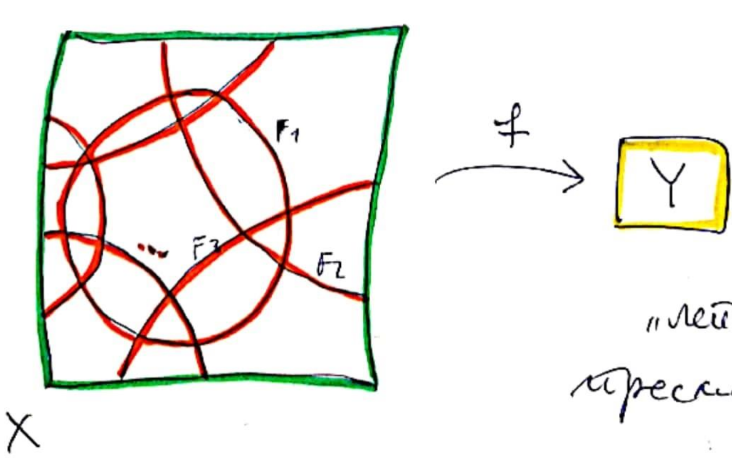
**Лема** (о лепљењу) Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$

**(1)** $U_\lambda\in\mathcal{T}_X$, $\lambda\in\Lambda$ и $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. Тада

$f$ је непрекидно $\Leftrightarrow (\forall\lambda\in\Lambda)$ $f|_{U_\lambda}$ је непрекидно.

**(2)** $F_1,\dots,F_n\in\mathcal{F}_X$ и $X=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$. Тада

$f$ је непрекидно $\Leftrightarrow (\forall 1\leq i\leq n)$ $f|_{F_i}$ је непрекидно.




„лепимо" непрекидна пресликавања $f|_{F_i}$

# Отворена и затворена пресликавања

**Дефиниција** Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$.

(1) $f$ је отворено ако $(\forall U\in\mathcal{T}_X)\ f(U)\in\mathcal{T}_Y$;

(2) $f$ је затворено ако $(\forall F\in\mathcal{F}_X)\ f(F)\in\mathcal{F}_Y$.

- (1) $\Leftrightarrow$ $(\forall U\in\mathcal{B}_X)\ f(U)\in\mathcal{T}_Y$

- Ако је $i_A: A\hookrightarrow X$ инклузија

  $i_A$ је отворено $\Leftrightarrow$ $A\in\mathcal{T}_X$

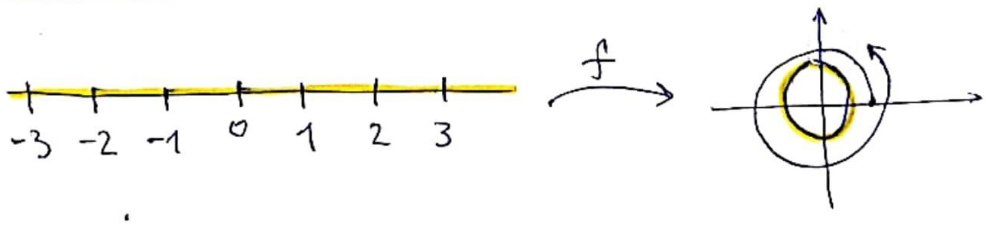
  $i_A$ је затворено $\Leftrightarrow$ $A\in\mathcal{F}_X$

- $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$, $A\subseteq X$

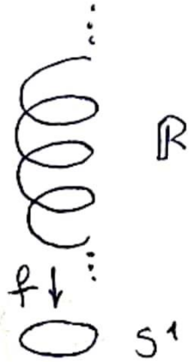
  $A\in\mathcal{T}_X$ и $f$ отворено $\Rightarrow$ $f|_A$ отворено (јер је тад $\mathcal{T}_A\subseteq\mathcal{T}_X$)

  $A\in\mathcal{F}_X$ и $f$ затворено $\Rightarrow$ $f|_A$ затворено (јер је тад $\mathcal{F}_A\subseteq\mathcal{F}_X$)

**Примери** (1) $f:\mathbb{R}\to S^1$, $f(x)=(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$



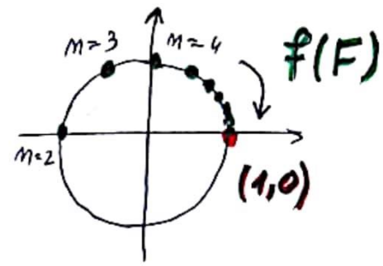

„намотавање" праве на кружницу




$f$ је непрекидно и отворено, али није затворено.

Нека је $F = \{ n + \frac{1}{n} \mid n \geq 2 \}$

$f(F) = \{ (\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}) \mid n \geq 2 \}$



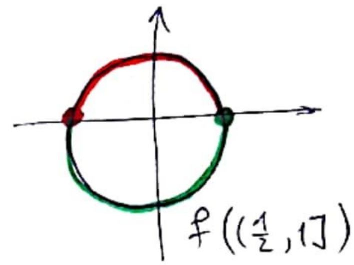

$(1,0) \in \overline{f(F)} \setminus f(F) \Rightarrow f(F)$ није затворен

**(2)** $g : [0,1] \to S^1$, $g = f|_{[0,1]}$ ($f$ из примера (1))

$g$ је затворено, а није отворено

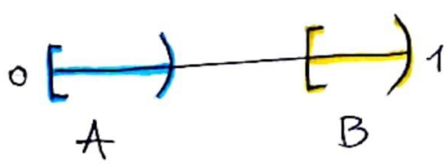
$f((\frac{1}{2}, 1])$ – није отворен у $S^1$

↑
отворен
у $[0,1]$




**(3)** $h : [0,1) \to S^1$, $h = f|_{[0,1)}$ ($f$ из примера (1))

$h$ није ни отворено ни затворено.




$A \in \mathcal{T}_{[0,1)}$, $f(A) \notin \mathcal{T}_{S^1}$

$B \in \mathcal{F}_{[0,1)}$, $f(B) \notin \mathcal{F}_{S^1}$

$\boxed{1.}$ Нека је $f : [0,4) \to [0, +\infty)$ пресликавање дато са

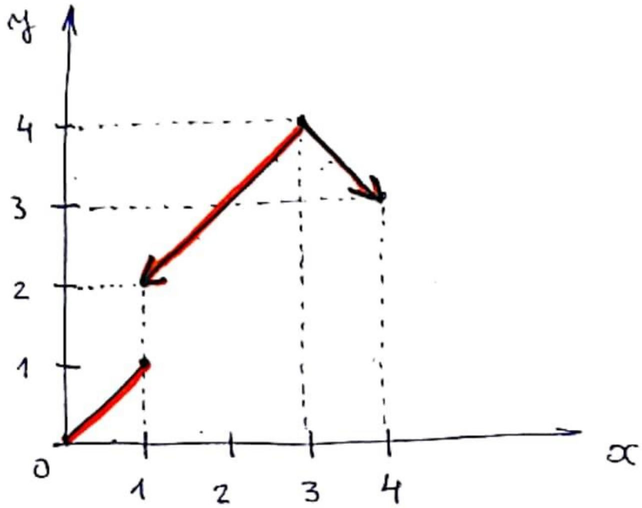
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & 1 < x \leq 3 \\ 7-x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Испитати непрекидност и отвореност у случајевима:

(а) $\mathcal{U}_{[0,4)} \to \mathcal{U}_{[0,+\infty)}$;

(б) $\mathcal{U}_{[0,4)} \to \mathcal{D}_{[0,+\infty)}$

▲




(а) $f$ није непрекидно јер $f^{-1}(\underset{\mathcal{U}_{[0,4)}}{\underset{\cap}{[0, \tfrac{3}{2})}}) = [0,1] \notin \mathcal{U}_{[0,+\infty)}$

$f$ није отворено јер $f(\underset{\mathcal{U}_{[0,4)}}{\underset{\cap}{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})}}) = (\tfrac{1}{2}, 1] \cup (2, \tfrac{5}{2}) \notin \mathcal{U}_{[0,+\infty)}$

(б) $f$ није отворено јер $f((\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})) = (\tfrac{1}{2}, 1] \cup (2, \tfrac{5}{2}) \notin \mathcal{D}_{[0,+\infty)}$

$f$ јесте непрекидно:

$$f^{-1}(\underset{\mathcal{D}_{[0,+\infty)}}{\underset{\cap}{(a,+\infty)}}) = \begin{cases} \emptyset, & a \geq 4 \\ (a-1, 7-a), & 3 \leq a < 4 \\ (a-1, 4), & 2 < a \leq 3 \\ (1,4), & 1 < a \leq 2 \\ (a,4), & 0 \leq a < 1 \end{cases} \in \mathcal{U}_{[0,4)}$$

и наравно $f^{-1}([0,+\infty)) = [0,4)$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

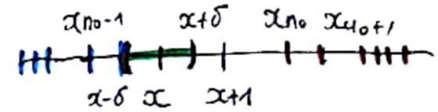
$\Rightarrow$ $f$ је заиста непрекидно. ■

$\boxed{\text{Лема}}$ Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

Тада је $F = \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

▲ Показујемо $F^c \in \mathcal{U}$. Нека је $x\in F^c$ фиксирано.
БУО $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow x_n > x+1$.




Нека је $\delta = \min\left\{|x-x_1|, |x-x_2|, \dots, |x-x_{n_0}|, 1\right\}$

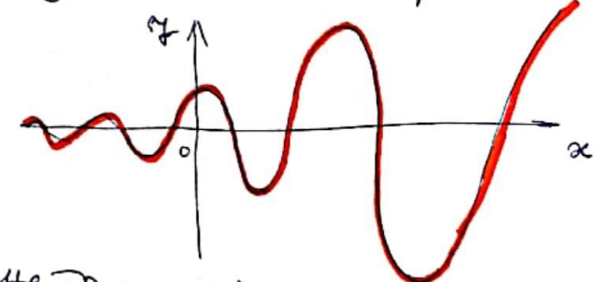
Тада је $(x-\delta, x+\delta)\in F^c$, па је $F^c\in\mathcal{U}$, тј. $F\in\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$. ◪

$\boxed{2.}$ Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дато са $f(x)=e^x\cos x$.

Испитати непрекидност и затвореност:

(а) $\mathcal{U}\to\mathcal{U}$;

(б) $\tau_{cf}\to\tau_{cf}$.




▲ (а) $f$ је очигледно непрекидно.

Нека је $x_n = -2n\pi$, $n\in\mathbb{N}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, па је

$F = \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

$f(F) = \{e^{-2n\pi} \mid n\in\mathbb{N}\}\not\ni 0$, али $e^{-2n\pi}\to 0$, па $f(F)\notin\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.

Дакле, $f$ није затворено.

(б) Нека је $F\in\mathcal{F}_{cf}$, тј. $F$ је коначан или цео $\mathbb{R}$, па је $f(F)$ коначан или $\mathbb{R}$, тј. $f(F)\in\mathcal{F}_{cf} \Rightarrow f$ је затворено

$f^{-1}(\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \mathcal{F}_{cf}}}{\{0\}}) = \{k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}\notin\mathcal{F}_{cf} \Rightarrow f$ није непрекидно. ◪