4. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\emptyset \neq A \subseteq X$. Доказати да је $X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$.

▲
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{int} A \subseteq A \\ \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c \subseteq A^c \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \emptyset$$

Још треба показати да је $X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A) = \partial A$.

Нека је $x \notin \operatorname{int} A$ и $x \notin \operatorname{ext} A$.

$$\left.\begin{array}{l} x \notin \operatorname{int} A \Rightarrow (\forall U \in \mathcal{O}(x))\ U \cap A^c \neq \emptyset \\ x \notin \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c \Rightarrow (\forall U \in \mathcal{O}(x))\ U \cap \underbrace{(A^c)^c}_{= A} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \partial A.$$

Дакле, $X = \operatorname{int} A \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{ext} A$. ■

Слично се показује да је $\overline{A} = \partial A \sqcup \operatorname{int} A$. (за вежбу)

5. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A, B \subseteq X$.

(а) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$;

(б) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;

(в) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

▲ (а) $\operatorname{int} A \overset{\text{зад. 3.}}{=} \bigcup\limits_{U \in \mathcal{T}, U \subseteq A} U \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{T}, U \subseteq B} U \overset{\text{зад. 3.}}{=} \operatorname{int} B$

(б) $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A, B \overset{(а)}{\Rightarrow} \operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} A, \operatorname{int} B$

$$\Rightarrow \operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$$

$\supseteq$: $x \in \operatorname{int}A \cap \operatorname{int}B \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq A,\ x \in V \subseteq B$

$\Rightarrow x \in U \cap V \subseteq A \cap B$ и $U \cap V \in \mathcal{T} \Rightarrow x \in \operatorname{int}(A \cap B)$

(в) $\supseteq$: $A, B \subseteq A \cup B \overset{(a)}{\Rightarrow} \operatorname{int}A, \operatorname{int}B \subseteq \operatorname{int}(A \cup B) \Rightarrow \operatorname{int}A \cup \operatorname{int}B \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$

$\subseteq$: Не важи увек.

Контрапример:

1. пример	2. пример
$A = [0,1)$	$A = \mathbb{Q}$
$B = [1,2]$	$B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\operatorname{int}(A \cup B) = (0,2)$	$\operatorname{int}(A \cup B) = \mathbb{R}$
$\operatorname{int}A \cup \operatorname{int}B = (0,2) \setminus \{1\}$	$\operatorname{int}A \cup \operatorname{int}B = \emptyset$

$\boxed{6.}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A, B \subseteq X$.

(а) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(в) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

▲ (а) $\overline{A} \overset{\text{зад } 3}{=} \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}, A \subseteq F} F \subseteq \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}, B \subseteq F} F \overset{\text{зад } 3.}{=} \overline{B}$

(б) $\subseteq$: $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

$\supseteq$: $A, B \subseteq A \cup B \overset{(a)}{\Rightarrow} \overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

(в) $\subseteq$: $A\cap B \subseteq A, B \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}, \overline{B} \Rightarrow \overline{A\cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

$\supseteq$: Не важи увек.

Контрапример:

$A = (0,1)$, $B = (1,2)$

$\overline{A\cap B} = \emptyset$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$ ▨

7. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, $A \subseteq X$.

Доказати да је $(\operatorname{int} A)^c = \overline{A^c}$.

▲ $x \in (\operatorname{int} A)^c \Leftrightarrow \neg (\exists U \in \mathcal{O}(x))\, U \subseteq A$

$\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{O}(x))\, U \cap A^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$. ▨

Специјално, када у задатку 7. ставимо A^c уместо A, добијамо $\operatorname{int} A^c = (\overline{A})^c$.

8. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, $A, B \subseteq X$.

(а) $\partial \overline{A} \subseteq \partial A$;

(б) $\partial(\operatorname{int} A) \subseteq \partial A$;

(в) $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$

(г) $\partial(A\cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

▲ (а) $\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{(\overline{A}^c)} = \overline{A} \cap \overline{(\overline{A}^c)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

јер $\overline{A}^c \subseteq A^c$

Контрапример за $\supseteq$:

$A = (1,2) \cup (2,3)$

$\partial \overline{A} = \{1,3\}$

$\partial A = \{1,2,3\}$

(б) $\partial(\mathrm{int} A) = \overline{\mathrm{int} A} \cap \overline{(\mathrm{int} A)^c} \overset{\boxed{\text{зад. 7.}}}{=} \overline{\mathrm{int} A} \cap \overline{\overline{A^c}} =$

$= \overline{\mathrm{int} A} \cap \overline{A^c} \subseteq \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

Контрапример за $\supseteq$:

$A = (0,1) \cup \{2\}$

$\partial(\mathrm{int} A) = \partial((0,1)) = \{0,1\}$

$\partial A = \{0,1,2\}$

(в) Ако је скуп B затворен, онда

$B = \overline{B} = \mathrm{int} B \sqcup \partial B \Rightarrow \partial B \subseteq B$

Специјално, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ је затворен, па је $\partial\partial A \subseteq \partial A$.

(г) $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} \overset{\boxed{\text{зад. 6.}}}{=} (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A^c \cap B^c} \subseteq$

$\overset{\boxed{\text{зад. 6.}}}{\subseteq} (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c} =$

$$= (\underbrace{\overline{A} \cap \overline{A^c}}_{\partial A} \cap \overline{B^c}) \cup (\underbrace{\overline{B} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}}_{\partial B}) \subseteq \partial A \cup \partial B.$$

Контрапример за $\supseteq$:

$A = [1,2)$

$B = [2,3]$

$\partial(A \cup B) = \{1,3\}$

$\partial A \cup \partial B = \{1,2,3\}$ $\blacksquare$

$\boxed{9.}$ Одредити руб, унутрашњост и затворење скупова $\mathbb{Q}$, (a,b), $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ у топологијама $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}_{cf}$, $\mathcal{T}_{cc}$.

▲ Подсетник:

$\mathcal{U}$ – стандардна топологија индукована метриком

$\mathcal{T}_{cf} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U^c \text{ коначан} \} \cup \{\emptyset\}$

$\mathcal{T}_{cc} = \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid U^c \text{ највише пребројив} \} \cup \{\emptyset\}$

$\boxed{\mathcal{U}}$

(1) $\mathbb{Q}$:

$\mathrm{int}\,\mathbb{Q} = \emptyset$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathrm{int}\,\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(2) (a,b):

$\mathrm{int}\,(a,b) = (a,b)$

$\overline{(a,b)} = [a,b]$

$\partial (a,b) = \{a, b\}$

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\mathrm{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$\boxed{\mathcal{T}_{cf}}$

(1) $\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$ јер ако $x \in \operatorname{int}\mathbb{Q}$, онда $(\exists U \in \mathcal{T}_{cf})\ x \in U \subseteq \mathbb{Q}$,

али онда је U^c коначан и $U^c \supseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\lightning$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (јер су затворени скупови или коначни, или $\mathbb{R}$)

$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(2) (a,b):

$\operatorname{int}(a,b) = \emptyset$

$\overline{(a,b)} = \mathbb{R}$

$\partial(a,b) = \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$\boxed{\mathcal{T}_{cc}}$

(1) $\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$ (као за $\mathcal{T}_{cf}$)

Свакако је $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, са друге стране, $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{cc}$, па је $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^c)^c \in \mathcal{F}_{cc}$, па $\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}}$.

$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

(2) (a,b):

$\operatorname{int}(a,b) = \emptyset$

$\overline{(a,b)} = \mathbb{R}$

$\partial(a,b) = \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{cc}$

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (затворени скупови су највише пребројиви или $\mathbb{R}$)

$\partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. ■

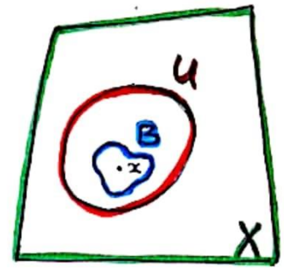
База и предбаза топологије

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ је база топологије $\mathcal{T}$

$$\Longleftrightarrow$$

$(\forall U \in \mathcal{T})$ U је унија елемената из $\mathcal{B}$



$$\Longleftrightarrow$$

$(\forall U \in \mathcal{T}) (\forall x \in U) (\exists B \in \mathcal{B}) \ x \in B \subseteq U$

$\boxed{\text{Примери}}$ **(1)** $(X, \mathcal{T}_d)$ има базу $\mathcal{B} = \mathcal{T}_d$;

(2) За $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ најмања база је $\mathcal{B} = \{\{x_0\}\} \cup \{\{x_0, x\} \mid x \in X \setminus \{x_0\}\}$;

(3) За (M, d), тј. $(M, \mathcal{U})$ база је:

$$\mathcal{B} = \{ B(x, r) \mid x \in M, r > 0 \},$$

отворене кугле

мања база: $\mathcal{B} = \{ B(x, r) \mid x \in M, r \in \mathbb{Q}^+ \}$,

још мања база: $\mathcal{B} = \{ B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in M, n \in \mathbb{N} \}$;

(4) За $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ база је $\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$,

мања база: $\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b \}$;

(5) За $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ база је $\mathcal{B} = \{ [a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$,

ово није база: $\{ [a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b \}$ јер тс.

$[\sqrt{2}, 3) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda, b_\lambda)$, $a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow (\exists \lambda_0 \in \Lambda)\ \sqrt{2} \in [\underset{\overset{\cap}{\mathbb{Q}}}{a_{\lambda_0}}, b_{\lambda_0}) \Rightarrow \sqrt{2} > a_{\lambda_0}$ ↯

Став Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Ако је $\mathcal{B}$ база, онда важи:

(1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists B \in \mathcal{B})\ x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

За сваку фамилију $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ за коју важи (1) и (2), постоји топологија $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ на X којој је $\mathcal{B}$ база:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{ U \subseteq X \mid U \text{ је унија елемената из } \mathcal{B} \}$$

- Ако је $\mathcal{B}$ база топологије $\mathcal{T}$, онда је $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$.
- Ако је $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ и важи (1) и (2), онда је $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}$. (тј. $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ је најмања топологија којој је $\mathcal{B}$ база)

1. (а) Показати да је фамилија свих аритметичких прогресија база неке топологије на $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{ A_{a,d} \mid a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} \}, \text{ где је}$$

$$A_{a,d} = \{ a + nd \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

(б) Показати да је $A_{a,d}$ и отворен и затворен у тој топологији.

(в) Показати да постоји бесконачно много простих бројева.

▲ (а) Треба показати (1) и (2) из става одозго.

(1) $A_{1,1} = \mathbb{Z}$, па је $\bigcup\limits_{a\in\mathbb{Z},\, d\in\mathbb{N}} A_{a,d} = \mathbb{Z}$.

(2) Нека је $x \in A_{a,d_1} \cap A_{b,d_2}$

$$x \in A_{a,d_1} \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ x = a + nd_1 \Rightarrow d_1 \mid x-a,$$

$$x \in A_{b,d_2} \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N})\ x = b + md_2 \Rightarrow d_2 \mid x-b.$$

Тада је за $d := НЗС(d_1, d_2)$

$$A_{x,d} = \{ x + nd \mid n \in \mathbb{Z} \} \subseteq A_{a,d_1} \cap A_{b,d_2}.$$

Заиста $x + nd = a + \underbrace{x - a + nd}_{\text{дељиво са } d_1} = a + k \cdot d_1 \in A_{a,d_1}$

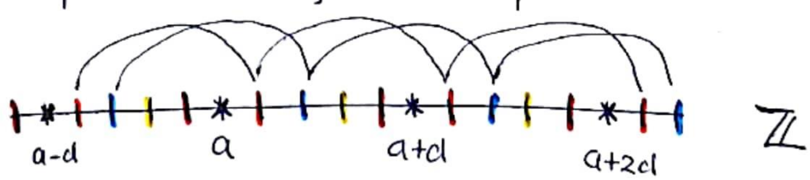
и слично $x + nd \in A_{b,d_2}$.

Дакле, ово јесте база топологије $\mathcal{T}_B$

(б) $A_{a,d}$ је отворен јер је у бази.

$A_{a,d}$ затворен $\Leftrightarrow$ $A_{a,d}^c$ отворен

$A_{a,d}^c$:



$$A_{a,d}^c = A_{a+1,d} \cup A_{a+2,d} \cup \dots \cup A_{a+d-1,d} \in \mathcal{T}_B$$

Дакле, $A_{a,d}$ је и затворен.

(в) Пп. да има коначно много простих бројева $p_1, \dots, p_n$.

Нека је $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_{0,p_i} = \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$

(Сви из $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ су дељиви неким p_i па су у A_{0,p_i})

A је отворен $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ је отворен, а и затворен

као коначна унија затворених, па је $\{-1,1\} = A^c$ отворен,

али он није унија елемената из базе $\lightning$ ▨

$\boxed{2.}$ Нека је $\mathcal{B} = \{[a,+\infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

(а) Доказати да је $\mathcal{B}$ база неке топологије на $\mathbb{R}$;

(б) Упоредити $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$;

(в) Одредити $\operatorname{int}\big((-\infty,0) \cup [\pi,+\infty)\big)$.

▲

(а) Проверавамо (1) и (2) из става.

(1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \mathbb{R}$ ✓

(2) $[a,+\infty) \cap [b,+\infty) = [\max\{a,b\}, +\infty) \in \mathcal{B}$ ✓

Дакле, $\mathcal{B}$ јесте база од $\mathcal{T}_\mathcal{B}$.

б) $\mathcal{D} = \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$?

$(a,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n,+\infty)$, где је $r_n > a$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_{n\to\infty} r_n = a$.

Дакле, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$.

$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{D}$?

Не важи јер $[a,+\infty) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{D}$.

(в) $\operatorname{int}\underbrace{\left((-\infty,0)\cup[\pi,+\infty)\right)}_{A}$ у $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?

$(\pi,+\infty)\subset A$ и отворен јер $(\pi,+\infty)\in\mathcal{D}\subseteq\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, па

$(\pi,+\infty)\subseteq \operatorname{int}A$. Ово ће бити цео интериор!

Ако $x\in \operatorname{int}A$, онда $(\exists U\in\mathcal{T}_{\mathcal{B}})\ x\in U\subseteq A$

$\Updownarrow$ ← корисно!

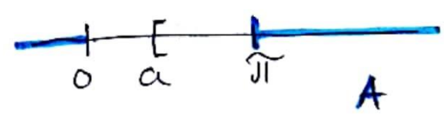
$(\exists B\in\mathcal{B})\ x\in B\subseteq A$

Тврдимо $\operatorname{int}A=(\pi,+\infty)$. Птс. $(\exists x\leq\pi)\ x\in\operatorname{int}A$

$\Rightarrow (\exists B\in\mathcal{B})\ x\in B\subseteq A$. Али, $B=[a,+\infty)$, $a\in\mathbb{Q}$, па

$x\in[a,+\infty)\subseteq A$.

Како је $a\leq\pi$ и $a\in\mathbb{Q} \Rightarrow a<\pi \Rightarrow [a,+\infty)\not\subseteq A$ ↯



Дакле, $\operatorname{int}A=(\pi,+\infty)$. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор и $A\subseteq X$. Кажемо да је A свуда густ у X ако је $\overline{A}=X$, а нигде густ у X ако је $\operatorname{int}(\overline{A})=\emptyset$.

3. Описати све свуда и нигде густе скупове у $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_d$, као и скупове тачака нагомилавања.

$\mathcal{T}_a$

$\mathcal{T}_a = \mathcal{F}_a = \{\emptyset, X\}$

(1) A је свуда густ $\Leftrightarrow$ $\overline{A} = X$

$\overline{A}$ - најмањи затворен који садржи A, па је

$$\overline{A} = X \Leftrightarrow A \neq \emptyset.$$

(2) A је нигде густ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$

$$\overline{A} = \begin{cases} X, & A \neq \emptyset \\ \emptyset, & A = \emptyset \end{cases}$$ и $\operatorname{int} X = X$, па је једино $A = \emptyset$ нигде густ.

(3) A' - тачке нагомилавања

$$x_0 \in A' \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{T}_a)\ x_0 \in U \Rightarrow (U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

1° $A = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset$

2° $|A| = 1$, тј. $A = \{a\} \Rightarrow A' = X \setminus \{a\}$

3° $|A| \geq 2 \Rightarrow A' = X$.

$\mathcal{T}_d$

$\mathcal{T}_d = \mathcal{F}_d = \mathcal{P}(X)$

(1) A свуда густ $\Leftrightarrow \overline{A} = X \Leftrightarrow A = X$ (јер $\overline{A} = A$)

(2) A нигде густ $\Leftrightarrow \operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$

(3) $A' = \emptyset$ јер $(\forall x \in X)$ $\{x\} \in \mathcal{T}_d$ и $(\underbrace{\{x\}}_{U} \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$.