Основни појмови

Познато од раније: скуп U у метричком простору (X,d) је отворен ако $(\forall x \in U)(\exists r>0)\ B(x;r) \subseteq U$.

Важи и теорема:

$\boxed{\text{Теорема}}$ Ако је (X,d) метрички простор, онда:

(1) ϕ и X су отворени;

(2) A, B отворени $\Rightarrow A \cap B$ отворен;

(3) $(\forall \alpha \in A)\ U_\alpha$ отворен $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ отворен.

Топологија се управо дефинише као фамилија скупова која испуњава претходна својства.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је X произвољан скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од X т.д. важи:

(1) $\phi, X \in \mathcal{T}$;

(2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;

(3) $(\forall \alpha \in A)\ U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада се фамилија $\mathcal{T}$ назива топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Скуп $U \subseteq X$ је отворен у тополошком простору $(X, \mathcal{T})$, ако је $U \in \mathcal{T}$.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Скуп $F \subseteq X$ је затворен у тополошком простору $(X, \mathcal{T})$, ако је $F^c \in \mathcal{T}$.

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако за сваки отворен (затворен) скуп $V \subseteq Y$ је $f^{-1}(V)$ отворен (затворен) у X.

Неке особине операција са скуповима

1. X - скуп, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - фамилија подскупова

$$\bigcup \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{ x \in X \mid (\exists A \in \mathcal{A})\ x \in A \right\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{ x \in X \mid (\forall A \in \mathcal{A})\ x \in A \right\}$$

Приметимо $\bigcup, \bigcap : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

2. Λ - скуп индекса, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Фамилија $\mathcal{A}$ може да се индексира скупом Λ ако постоји функција индексације $\varphi : \Lambda \to \mathcal{A}$, $\varphi(\lambda) := A_\lambda$, која је „на". Тада је $\mathcal{A} = \{ A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$.

3. $\mathcal{A} = \{ A_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{B} = \{ B_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$

$$(\forall \lambda \in \Lambda)\ A_\lambda \subset B_\lambda \Rightarrow \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) \wedge \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)$$

4. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \left(\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B} \right) \wedge \left(\bigcap \mathcal{A} \supseteq \bigcap \mathcal{B} \right)$

5. Де Морганови закони

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \quad ; \quad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

6. $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} \left(A_\lambda \cup B_\mu\right)$$

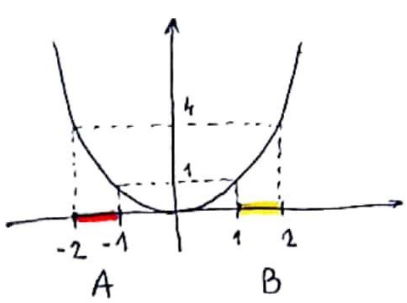
$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} \left(A_\lambda \cap B_\mu\right)$$

7. $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $f: X \to Y$

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$ (важи „=" ако је f „1-1")

нпр. $f(x) = x^2$, $A = [-2,-1]$, $B = [1,2]$



$f(A\cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A) \cap f(B) = [1,4]$

(8.) $\mathcal{B} = \{B_\mu\}_{\mu\in M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, $f: X \to Y$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\Big) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\Big) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)$$

(9.) $B \subseteq Y \Rightarrow \quad f^{-1}(B^c) = \big(f^{-1}(B)\big)^c$

(10.) $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ („=" за f „1-1")

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ („=" за f „на")

(11.) $X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$

$h\circ f = g\circ f$ и f је „на" $\Rightarrow h = g$

(сурјективне функције су регуларне здесна)

(12.) $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$

$h\circ f = h\circ g$ и h „1-1" $\Rightarrow f = g$

(инјективне функције су регуларне слева)

$\mathcal{T}_X$ – топологија на X (сви отворени скупови)

$\mathcal{F}_X$ – сви затворени скупови

Приметимо да је $\mathcal{T}_X, \mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Такође, $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{T}_X \neq \mathcal{F}_X$, тј. постоје скупови који нису ни отворени ни затворени, а и они који јесу оба.

Што је „више" отворених, то је „више" затворених.

$\boxed{\text{Теорема}}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $\mathcal{F}_X$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_X$;

(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_X$;

(3) $(\forall \alpha \in A)\ F_\alpha \in \mathcal{F}_X \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}_X$.

Нека су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на X $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{P}(X))$.

Ове две топологије могу бити:

(1) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (једнаке);

(2) $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T}_1$ је ужа, тј. грубља, а $\mathcal{T}_2$ шира, тј. финија);

(3) $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$;

(4) неупоредиве, тј. $\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}_2 \neq \emptyset \neq \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{T}_1$.

$\boxed{\text{Лема}}$ $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$.

▲ $\mathcal{F}_1 = \{U^c \mid U \in \mathcal{T}_1\} \subseteq \{U^c \mid U \in \mathcal{T}_2\} = \mathcal{F}_2$. ■

$\boxed{\text{Пример}}$ Топологије на произвољном скупу X:

(1) дискретна $\mathcal{T}_d \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(X)$ (свака тачка је отворен скуп), ово је најфинија топологија;

(2) антидискретна $\mathcal{T}_a \overset{\text{def}}{=} \{\emptyset, X\}$ – најгрубља;

(3) кофинитна $\mathcal{T}_{cf} \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq X \mid U^c \text{ коначан}\} \cup \{\emptyset\}$;

(4) копребројива $\mathcal{T}_{cc} \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq X \mid U^c \text{ пребројив}\} \cup \{\emptyset\}$;

(5) топологија уочене тачке $x_0 \in X$, $\mathcal{T}_{x_0} \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq X \mid x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$, овде је $\{x\}$ затворен за свако $x \in X \setminus \{x_0\}$.

$\boxed{\text{Пример}}$ Топологије на $\mathbb{R}$:

(1) уобичајена топологија $\mathcal{U}$ – добијена од еуклидске метрике ($B(x;r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\}$)

(2) Зоргенфрејева права $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ (Sorgenfrey)

$U \in \mathcal{S} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda, b_\lambda)$, $a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$ или $U = \emptyset$

(видећемо касније на курсу да је $\{[a_\lambda, b_\lambda)\}$ база за $\mathcal{S}$)

(3) топологија левих интервала

$$\mathcal{L} \overset{\mathrm{df}}{=} \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

ово заиста јесте топологија: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (-\infty, a_\lambda) = (-\infty, \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda) \in \mathcal{L}$;

(4) топологија десних интервала

$$\mathcal{D} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

и ово је топологија: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, +\infty) = (\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, +\infty) \in \mathcal{D}$.

$\boxed{1.}$ Доказати да $\mathcal{T}_{cc}$ јесте топологија.

▲ $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subseteq X \mid U^c \text{ пребројив}\} \cup \{\emptyset\}$

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{cc}$ ✓

(2) $U, V \in \mathcal{T}_{cc} \overset{?}{\Rightarrow} U \cap V \in \mathcal{T}_{cc}$

U^c, V^c - пребројиви $\Rightarrow U^c \cup V^c = (U \cap V)^c$ пребројив

$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{cc}$ ✓

(3) $U_\lambda \in \mathcal{T}_{cc}, \lambda \in \Lambda$, тј. U_λ^c су пребројиви

$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c \subseteq U_{\lambda_0}^c$ - пребројив ($\lambda_0 \in \Lambda$ произвољан)

$\Rightarrow \mathcal{T}_{cc}$ јесте топологија. ■

Специјално, ако је X пребројив, онда је $\mathcal{T}_{cc} = \mathcal{T}_d$, а ако је коначан, онда је $\mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$.

$\boxed{2.}$ Упоредити све поменуте топологије на $\mathbb{R}$.

▲ Упоређујемо $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_d, \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}, \mathcal{T}_{x_0}, \mathcal{U}, \mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{S}$.

- $\mathcal{T}_a$ је најгрубља, $\mathcal{T}_d$ најфинија
- $\mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{T}_{cc}$
- $\mathcal{T}_{x_0} \subseteq \mathcal{T}_d$ и ниједне више

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\subseteq \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$,

$\{x_0\}^c \in \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$, али $\{x_0\}^c \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\supseteq \mathcal{T}_{cf}, \mathcal{T}_{cc}$,

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{L}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\subseteq \mathcal{L}$,

$(-\infty, x_0-1) \in \mathcal{L}$, али $(-\infty, x_0-1) \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\supseteq \mathcal{L}$,

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{D}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\subseteq \mathcal{D}$,

$(x_0+1, +\infty) \in \mathcal{D}$, али $(x_0+1, +\infty) \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\supseteq \mathcal{D}$,

$\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, али $\{x_0\} \notin \mathcal{S}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\subseteq \mathcal{S}$,

$[x_0-1, x_0) \in \mathcal{S}$, али $[x_0-1, x_0) \notin \mathcal{T}_{x_0}$, па $\mathcal{T}_{x_0} \not\supseteq \mathcal{S}$.

Дакле, $\mathcal{T}_{x_0}$ је неупоредива са свим топологијама сем са $\mathcal{T}_a$ и $\mathcal{T}_d$.

- $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}$ су неупоредиве и $\mathcal{L}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}$.

- $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{U}$ јер $[a,b) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}$.

- $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$:

$(a,b) \in \mathcal{U}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b) \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$.

(јер је сваки $U \in \mathcal{U}$ унија интервала)

- $\mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{T}_{cf} \not\subseteq \mathcal{L}, \mathcal{D}$

- $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{U}$:

Нека је $U = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{cc}$

$0 \in U$, али не постоји $\varepsilon > 0$ т.д. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$, па $U \notin \mathcal{U}$

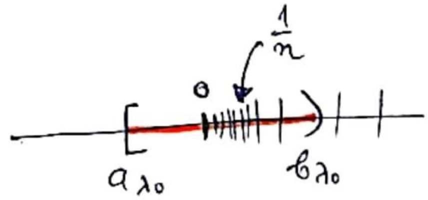
Дакле, $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{U}$.

- $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{S}$:

Нека је $U = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}_{cc}$ и претпоставимо да је $U \in \mathcal{S}$. Тада је $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda, b_\lambda)$, па

$$(\exists \lambda_0 \in \Lambda)\ 0 \in [a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}),$$

па је $[a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\lightning$



Дакле, $\mathcal{T}_{cc} \not\subseteq \mathcal{S}$.

- $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{T}_{cc}$:

$(0,1) \in \mathcal{U}$, али $(0,1)^c$ није пребројив, па $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{T}_{cc}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}_{cf} \arrow[rrr] & & & \mathcal{T}_{cc} \arrow[ddr] & \\
 & \mathcal{D} \arrow[dr] & & & & \\
\mathcal{T}_a \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \mathcal{U} \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[rr] & & \mathcal{T}_d \\
 & \mathcal{L} \arrow[ur] & & & & \\
 & & \mathcal{T}_{x_0} \arrow[uurrr] & & &
\end{tikzcd}
$$

$\blacksquare$

Дефиниција Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subseteq X$.

(1) $x_0 \in X$ је *унутрашња тачка* скупа A ако

$$(\exists U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \subseteq A.$$

Унутрашњост скупа A је

$$\boxed{\operatorname{int} A \overset{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid (\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq A \}}.$$

(2) *Околина* тачке $x_0 \in X$, тј. *околински систем* је

$$\boxed{\mathcal{O}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ A \subseteq X \mid x_0 \in \operatorname{int} A \} = \{ A \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \subseteq A \}}$$

(3) *Спољашњост* скупа A је

$$\boxed{\operatorname{ext} A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{int}(A^c)}.$$

(4) $x_0 \in X$ је *адхерентна тачка* скупа A ако

$$(\forall U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset,$$

тј. $(\forall U \in \mathcal{O}(x_0))\ U \cap A \neq \emptyset$.

Затворење скупа A је

$$\boxed{\overline{A} = \mathrm{cl}\,A \overset{\mathrm{df}}{=} \{x \in X \mid x \text{ адхерентна т. од } A\}}$$

(5) Граница (руб) скупа A је

$$\partial A \overset{\mathrm{df}}{=} \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{O}(x))\ U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A^c \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{T})\ x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A^c \neq \emptyset\}$$

(6) $x_0 \in X$ је тачка нагомилавања скупа A ако

$$(\forall U \in \mathcal{T})\ x_0 \in U \Rightarrow (U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Пример $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $A = \{a, b\}$

b је тачка нагомилавања скупа A, али не важи да је у свакој њеној околини бесконачно много тачака.

$\boxed{3.}$ (а) $\mathrm{int}\,A = \overbrace{\bigcup_{U \in \mathcal{T},\, U \subseteq A} U}^{Y}$; (б) $\overline{A} = \overbrace{\bigcap_{F \in \mathcal{F}_X,\, A \subseteq F} F}^{\Pi}$.

▲ (а) $\subseteq$: $x \in \mathrm{int}A \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq A \Rightarrow x \in Y$,

$\supseteq$: $x \in Y \Rightarrow (\exists U_1 \in \mathcal{T})\ U_1 \subseteq A \wedge x \in U_1 \Rightarrow x \in \mathrm{int}A$.

(б) $\subseteq$: $x \in \overline{A}$ и птс. $x \notin \Pi$

$\Rightarrow (\exists F \in \mathcal{F}_x)\ A \subseteq F \wedge x \notin F$

$\Rightarrow \quad x \in F^c \in \mathcal{T} \quad , \quad F^c \subseteq A^c$

$\Rightarrow \quad F^c \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \quad x \notin \overline{A}$ ↯

$\supseteq$: $x \in \Pi$ и тс. $x \notin \overline{A}$

$\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T}) \; x \in U \wedge U \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow U^c \in \mathcal{F} \, , \, A \subseteq U^c \, , \, x \notin U^c$

$\Rightarrow \quad x \notin \Pi$ ↯ $\square$

Битне последице претходног задатка:

- $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$
- $\operatorname{int} A \subseteq A$
- $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$
- $U \subseteq A \wedge U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \subseteq \operatorname{int} A$
  (int A је највећи отворен скуп у A)

- $\overline{A} \in \mathcal{F}$
- $A \subseteq \overline{A}$
- $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $F \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq F \Rightarrow \overline{A} \subseteq F$
  ($\overline{A}$ је најмањи затворен скуп који садржи A)