3. корак: Из ⊛ и ⊛⊛ имамо

$$\mathbb{R} = A \sqcup A^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha x_i}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha x}\right) - \text{пребројив потпокривач}$$

пребројиве уније

Дакле, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је Линделефов. ■

- I и II аксиома су наследна својства;
- Линделефовост је слабо наследна:

  X Линделефов и $A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow A$ је Линделефов.

Став Ако је (M, d) метрички простор, онда

M је сепарабилан $\Leftrightarrow$ M задовољава II аксиому.

▲ $\Leftarrow$: увек важи.

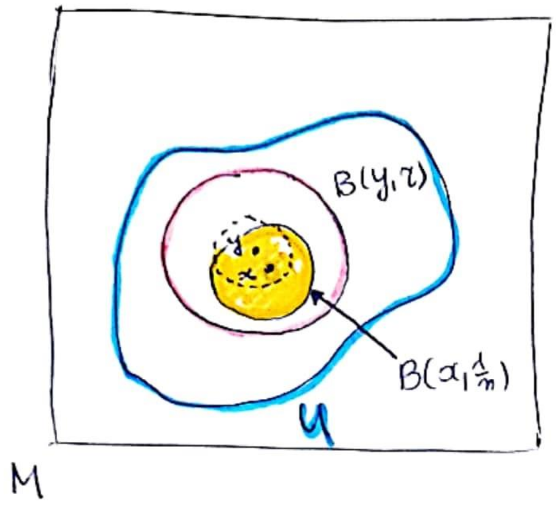
$\Rightarrow$: Нека је $D \subseteq M$ пребројив и $\overline{D} = M$ и нека је

$$\mathcal{B} = \{ B(x, \tfrac{1}{n}) \mid x \in D, n \in \mathbb{N} \}.$$

Показујемо да је $\mathcal{B}$ база од M.

Нека је $U \in \mathcal{T}_M$ и $y \in U$. Тада постоји $r > 0$ т.д.

$B(y, r) \subseteq U$. Б.У.О. нека је $r < 1$.



Како је D свуда густ, то $(\exists x\in D)\ x\in B(y,\frac{r}{3})$. Даље, постоји $n\in\mathbb{N}$ т.д. $d(x,y) < \frac{1}{n} < \frac{2r}{3}$, па је $y\in B(x,\frac{1}{n}) \subseteq U$, одакле закључујемо да $\mathcal{B}$ јесте база и то пребројива, па је M заиста сепарабилан. $\blacksquare$

- $\mathbb{R}^n$ није компактан али јесте Линделефов јер је метрички и сепарабилан $(\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n)$
- $(\mathbb{R}, S)$ није метризабилан.

Заиста, ако ттс. да јесте метрички и знамо да је сепарабилан, онда на основу става знамо да задовољава II аксиому пребројивости ↯
(Дакле, није метрички али јесте T_4).

$\boxed{1.}$ Нека је метрички простор (M,d) Линделефов. Доказати да онда он задовољава II аксиому пребројивости.

▲ Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада је $M = \bigcup_{x \in M} B(x, \frac{1}{n})$, па како је M Линделефов, постоји пребројив потпокривач

$$M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B(x_{n,m}, \frac{1}{n}).$$

Лако се покаже да је

$$\mathcal{B} = \{ B(x_{n,m}, \frac{1}{n}) \mid n, m \in \mathbb{N} \}$$

пребројива база од M, па M задовољава II аксиому. ■

$\boxed{\text{Лема}}$ Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, $x \in X$ и нека је $\mathcal{B}_x$ локална база у x. Тада

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ x \in U}} U .$$

$\boxed{2.}$ Ако је X непребројив, онда $(X, \mathcal{T}_{cc})$ не задовољава I аксиому пребројивости.

▲ Пп. $(\forall x \in X)$ имамо пребројиву локалну базу $\mathcal{B}_x$. Тада је

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B \overset{\text{лема}}{=} \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T}_{cc} \\ x \in U}} U = \{x\} \quad \text{јер за } y \neq x \text{ је } \{y\}^c \in \mathcal{T}_{cc}$$

$$\underbrace{\bigcup_{B \in \mathcal{B}_x} \underbrace{B^c}_{\text{пребројив}}}_{\substack{\text{пребројива унија} \\ \text{ПРЕБРОЈИВО}}} = \underbrace{X \setminus \{x\}}_{\text{непребројив}} \quad ↯ \quad ■$$

$\boxed{3.}$ Нека је X тополошки простор и $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ две топологије на њему т.д. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

(а) $(X, \mathcal{T}_1)$ сепарабилан $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ сепарабилан

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ јесте, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ није;

(б) $(X, \mathcal{T}_2)$ сепарабилан $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ сепарабилан

(в) $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава I акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава I акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ не;

(г) $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава I акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава I акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cc})$ не;

(д) $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава II акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава II акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ не;

(ђ) $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава II акс. $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава II акс.

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cf})$ не;

(е) $(X, \mathcal{T}_1)$ је Линделефов $\not\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ је Линделефов

нпр. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ јесте, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ није;

(ж) $(X, \mathcal{T}_2)$ је Линделефов $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ је Линделефов. ▨

$\boxed{4.}$ Ако је X регуларан и Линделефов, онда је нормалан.

▲ Нека су $A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$ и $A \cap B = \emptyset$. Желимо да направимо дисјунктне околине ова два скупа.

Ако је $x \in A$, онда $x \in B^c$, па из регуларности имамо

$$(\exists U_x \in \mathcal{T}_X)\ x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq B^c.$$

Слично за $y \in B \subseteq A^c$ имамо

$$(\exists V_y \in \mathcal{T}_X)\ y \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq A^c.$$

Како је Линделефовост слабо наследна и $A, B \in \mathcal{F}_X$, то су A и B Линделефови, па

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

пребројиви потпокривачи

$$B \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y \Rightarrow B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

Нека је $Y_1 := U_1 \setminus \overline{V_1} \in \mathcal{T}_X$

$$Y_2 := U_2 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2}) \in \mathcal{T}_X$$

$$\vdots$$

$$Y_k := U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_k}) \in \mathcal{T}_X$$

$$\vdots$$

и нека је $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k \in \mathcal{T}_X$.

Тада $A \subseteq U$ јер $\overline{V_k} \cap A = \emptyset$, за свако k.

Слично, нека је $W_k := V_k \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \ldots \cup \overline{U_k}) \in \mathcal{T}_X$,

и $V := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k \in \mathcal{T}_X$. Јасно, $B \subseteq V$.

Остаје још да покажемо да је $U \cap V = \emptyset$.

Пп, $a \in U \cap V \Rightarrow (\exists k, l \in \mathbb{N})\ a \in Y_k \wedge a \in W_l$.

Б.У.О. $k \geq l$. Тада је

$$a \in Y_k = U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_l} \cup \ldots \cup \overline{V_k}) \Rightarrow a \notin \overline{V_l}$$

$$a \in W_l = V_l \setminus (\overline{U_1} \cup \ldots \cup \overline{U_l}) \Rightarrow a \in V_l \quad \lightning$$

Дакле, $U \cap V = \emptyset$, па је X нормалан. ■

Количнички простори

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Пресликавање $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ је количничко ако је „на" и за свако $B \subseteq Y$ важи:

$$B \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(или, еквивалентно, $B \in \mathcal{F}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$).

Пример $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ је непрекидно и „на", али није количничко.

Став Нека су дата пресликавања $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ и нека је f количничко. Тада:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

количничко

g је непрекидно $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ је непрекидно.

1. Нека су $p: X \to Y$, $f: Y \to X$ непрекидна т.д. је $p \circ f = \mathbb{1}_Y$. Тада је p количничко.

▲ ▸ $\mathbb{1}_Y$ је „на" $\Rightarrow$ p је „на"

▸ p је непрекидно ✓

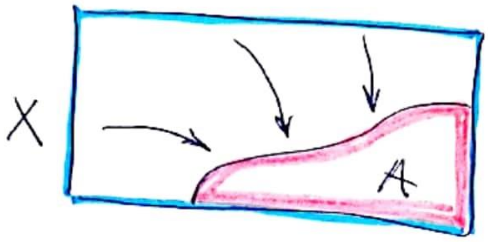
▸ $B \subseteq Y$, $p^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \overset{?}{\Rightarrow} B \in \mathcal{T}_Y$

$$B = \mathbb{1}_Y^{-1}(B) = (p \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(\underbrace{p^{-1}(B)}_{\in \mathcal{T}_X}\big) \in \mathcal{T}_Y .$$

Дакле, p је количничко. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је $A \subseteq X$. Пресликавање $r: X \to A$ је ретракција ако је непрекидно и $(\forall a \in A)\ r(a) = a$.

Приметимо:



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

тј. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A \xRightarrow{\text{зад. 1}}$ r је количничко

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ $A \subseteq X$ је ретракт ако постоји ретракција $r: X \to A$.

$\boxed{2.}$ Нека је $p: X \to Y$ количничко, Y повезан и

$$(\forall y \in Y)\ p^{-1}(\{y\}) \text{ је повезан.}$$

Тада је X повезан.

▲ Нека је $f: X \to \{0,1\}$ непрекидно. Показаћемо да је f константно. Нека је $y \in Y$. p је количничко па је „на", па постоји $x \in X$ т.д. $p(x) = y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \{0,1\} \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Нека је $g(y) := f(x)$.

Да ли је g добро дефинисано?

$p^{-1}(\{y\})$ је повезан, па је $f|_{p^{-1}(\{y\})} = const$, па јесте добро дефинисано.

Како је p количничко и f непрекидно, то је на основу става на стр. 119. и g непрекидно.

Како је Y повезан, мора бити $g = const$, а из $f = g \circ p$ закључујемо да је и $f = const$.

Дакле, X је повезан. ■

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Нека је X тополошки простор, Y скуп и $f: X \longrightarrow Y$ „на". Количничка топологија на Y је $\mathcal{T}_Y \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$. (То је најфинија топологија т.д. је f непрекидно.)

▶ Ако је $\sim$ релација еквиваленције на тополошком простору X, имамо природну пројекцију $\pi: X \xrightarrow{\text{на}} X/\sim$
$x \mapsto [x]$

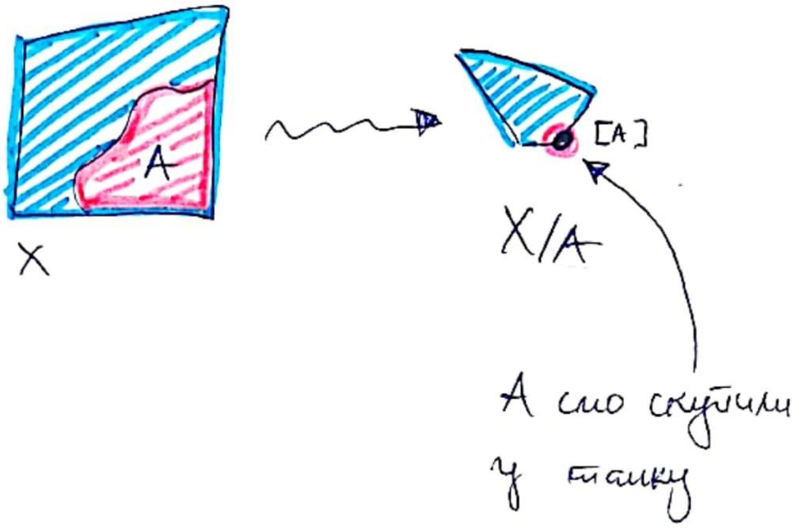
На $X/\sim$ дефинишемо топологију

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \overset{\text{def}}{=} \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$$

$X/\sim$ је количнички простор.

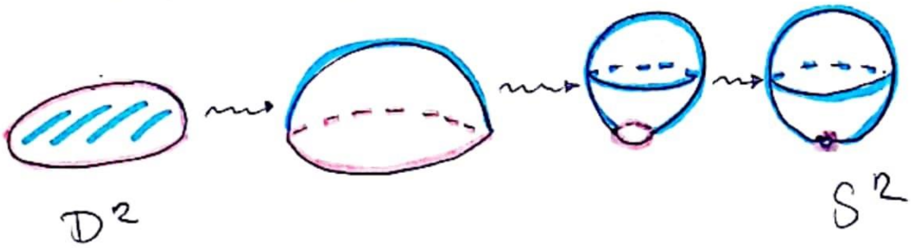
▶ Ако је X тополошки простор и $A \subseteq X$, имамо релацију еквиваленције: $x \sim y \iff x = y \vee x, y \in A$

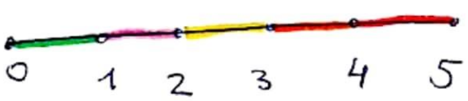
Тада је $X/A \overset{\text{df}}{=} X/\sim$.



Пример (1) $X/X \approx *$

(2) $D^2/S^1 \approx S^2$



(3) 

$/\{1,2,3,4,5\} \approx$ 

▶ Ако су X, Y тополошки простори и $f: X \to Y$ непрекидно. Онда $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ задаје релацију еквиваленције, па дефинишемо $X/f \overset{\text{df}}{=} X/\sim$.

За размишљање: Ако је $\sim$ релација на $\mathbb{R}^2$ дата са $(x,y) \sim (z,t) \iff x - z, y - t \in \mathbb{Z}$, како изгледа $\mathbb{R}^2/\sim$?

Крај