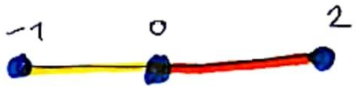
Компактификација

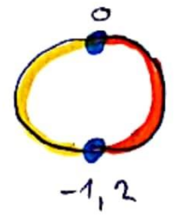
Желимо да од некомпактног направимо компактан простор додавањем тачака. То се може урадити на више начина.

$\boxed{\text{Пример}}$ $X = (-1,0)\cup(0,2)$

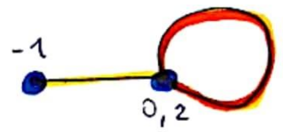
▶ додато 3 тачке: $[-1,2]$



▶ додато 2 тачке:

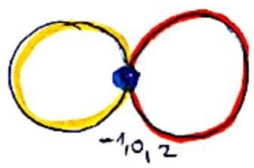


или



нису хомеоморфни

▶ додато 1 тачку:



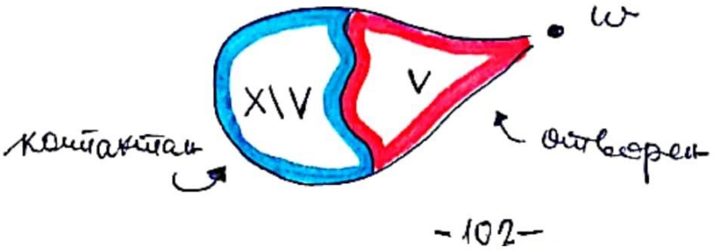
← јединствен простор (до на хомеоморфизам)

Александровљева компактификација (једном тачком)

Нека је $(X,\mathcal{T})$ тополошки простор. Правимо компактан простор $(X^*,\mathcal{T}^*)$.

$$X^* \overset{def}{=} X\cup\{\omega\} \quad (\omega \text{ – „бесконачно далека тачка"})$$

$$\mathcal{T}^* \overset{def}{=} \mathcal{T}\cup\{V\cup\{\omega\} \mid V\in\mathcal{T},\ X\setminus V\in\mathcal{K}_X\}$$



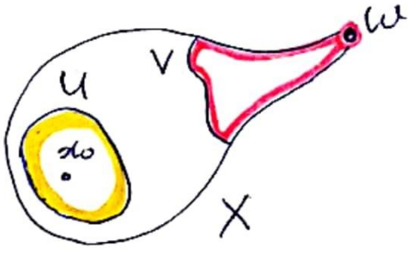
Особине:

- $(X^*, \mathcal{T}^*)$ је компактан;
- $(X, \mathcal{T}^*_X) = (X, \mathcal{T})$;
  наслеђена топологија
- $(X, \mathcal{T})$ је отворен потпростор од $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Став X^* је T_2 ако и само ако је X T_2 и локално компактан.

▲ $\Rightarrow$: T_2 је наследно својство па је X T_2. Још да се уверимо да је локално компактан. Како је X T_2, то: X је локално компактан $\overset{★}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)(\exists U \in \mathcal{O}(x))\, \overline{U} \in \mathcal{K}_X$

Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Како је X^* T_2 и $x_0 \neq \omega$, то постоје $U, V \in \mathcal{T}^*$ т.д. $x_0 \in U$, $\omega \in V$, $U \cap V = \emptyset$.



$\Rightarrow U \subseteq X^* \setminus V \in \mathcal{K}_X$.

Нека је $V = V' \cup \{\omega\}$, $V' \in \mathcal{T}$ и $X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$ (важи $X \setminus V' = X^* \setminus V$).

Тада је $U \subseteq X \setminus V' \in \mathcal{F}_X$, па $\overline{U} \subseteq X \setminus V' \in \mathcal{K}_X$, тј. $\overline{U}$ је затворен подскуп компакта, па је и он компактан. На основу ★ закључујемо да је X локално компактан.

$\Leftarrow$: Нека су $x, y \in X^*$, $x \neq y$. Желимо да их „раздвојимо".

$\boxed{1^\circ}$ $x, y \in X^* \setminus \{\omega\} \xRightarrow{X \text{ је } T_2}$ постоје $U, V \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$

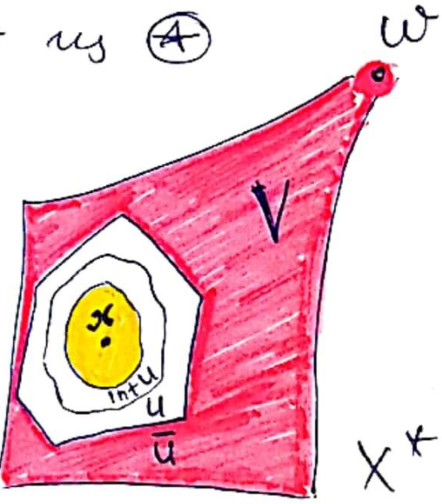
$x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$

$\boxed{2^\circ}$ $x \in X$, $y = \omega$

Како је X локално компактан то из (A)

$(\exists U \in \mathcal{O}(x))\ \overline{U} \in \mathcal{K}_X$.

Нека је $V := (\underbrace{X \setminus \overline{U}}_{\in \mathcal{T}}) \cup \{\omega\} \in \mathcal{T}^*$



Тада $x \in \operatorname{int} U$, $\omega \in V$, $(\operatorname{int} U) \cap V = \emptyset$.

Дакле, X^* је T_2. ■

$\boxed{1.}$ Ако је X локално компактан и T_2, онда је $T_{3\frac{1}{2}}$.

▲ X локално компактан и T_2

$\Rightarrow X^*$ је T_2 и компактан

$\Rightarrow X^*$ је T_4 ← није наследно

$\Rightarrow X^*$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ ← наследно

$\Rightarrow X$ је $T_{3\frac{1}{2}}$ ■

Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори и $f: X \to Y$, оно индукује $f^*: X^* \to Y^*$ са

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in X \\ \omega_Y, & x = \omega_X \end{cases}$$

Ако је f непрекидно, f^* <u>не</u> мора бити непрекидно!

$\boxed{\text{Дефиниција}}$ Пресликавање f је својствено ако је непрекидно и ако $(\forall K \in \mathcal{K}_Y)\ f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

$\boxed{2.}$ (а) f својствено $\Rightarrow$ f^* непрекидно;

(б) f^* непрекидно и Y T_2 $\Rightarrow$ f својствено.

▲ (а) Приметимо да за $B \subseteq Y$ важи:

$$(f^*)^{-1}(B) = f^{-1}(B),$$

$$(f^*)^{-1}(B \cup \{\omega_Y\}) = f^{-1}(B) \cup \{\omega_X\}.$$

Нека је $U \in \mathcal{T}_Y^*$.

$\boxed{1^\circ}$ $\omega_Y \notin U$ $\Rightarrow$ $(f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(\underset{\mathcal{T}_Y}{\underset{\cap}{U}}) \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_X^*$

$\boxed{2^\circ}$ $\omega_Y \in U$ $\Rightarrow$ $U = V \cup \{\omega_Y\}$, $V \in \mathcal{T}_Y$, $Y \setminus V \in \mathcal{K}_Y$

$$(f^*)^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in \mathcal{T}_X} \cup \{\omega_X\}$$

Још да ли је $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{K}_X$?

$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus V}_{\in \mathcal{K}_Y}) \in \mathcal{K}_X$ јер је f својствено.

$\Rightarrow (f^*)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X^*$.

Дакле, f^* је непрекидно.

(б) $f^* : X^* \to Y^*$ је непрекидно, па је и $f = f^*|_X$ непр.

Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$. Показујемо $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$.

Како је Y T_2, то је $K \in \mathcal{F}_Y$, па је $Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y$ и

одатле је $(Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\} \in \mathcal{T}_Y^*$.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{непрекидно}}}{(f^*)^{-1}}\left((Y \setminus K) \cup \{\omega_Y\}\right) = f^{-1}(Y \setminus K) \cup \{\omega_X\} \in \mathcal{T}_X^*$$

$\Rightarrow X \setminus f^{-1}(Y \setminus K) \in \mathcal{K}_X$, али

$$X \setminus f^{-1}(Y \setminus K) = \left(f^{-1}(K^c)\right)^c = f^{-1}\left((K^c)^c\right) = f^{-1}(K).$$

Дакле, $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$, па је f својствено. ■

Теорема $X \approx Y \Rightarrow X^* \approx Y^*$

▲ $h : X \to Y$ хомеоморфизам $\Rightarrow h$ је бијекција

$\Rightarrow h^*$ је бијекција

Како је h хомеоморфизам, то су h и h^{-1} својствена, па су h^* и $(h^{-1})^*$ непрекидна и међусобно инверзна. Дакле, h^* је хомеоморфизам. $\blacksquare$

3. Ако је X компактан и T_2, онда за $x_0 \in X$ је

$$\left(X \setminus \{x_0\} \right)^* \approx X .$$

Нека је $X_0 := X \setminus \{x_0\}$. Дефинишимо $f : X_0^* \to X$

са $f(x) := \begin{cases} x, & x \neq \omega \\ x_0, & x = \omega \end{cases}$

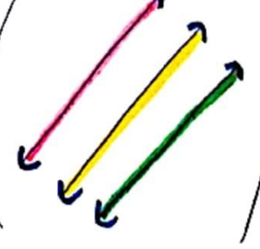
- f је бијекција
- f је непрекидно (слично као у 2. зад.)
- $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{компакт}}}{f : X_0^*} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ T_2}}{X}$ па је затворено

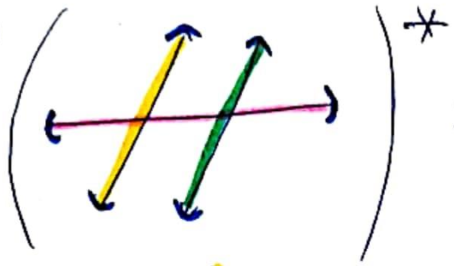
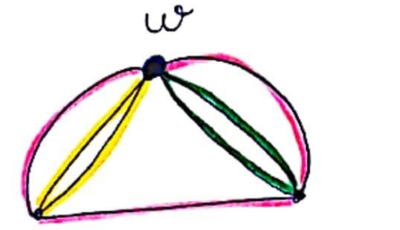
$\Big\}$ f је хомеоморфизам. $\blacksquare$

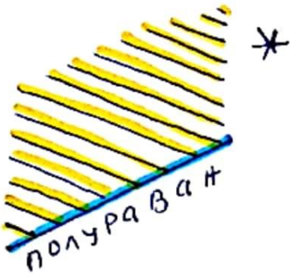
4. Наћи компактификације једном тачком следећих простора:

(а) $(\mathbb{R}^n)^* \approx (S^n \setminus \{*\})^* \approx S^n$

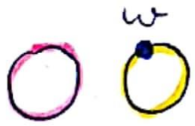
три отворене дужи

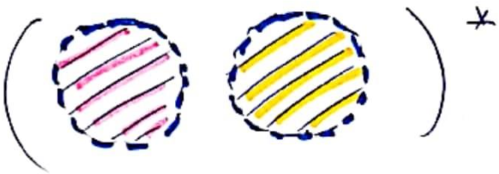
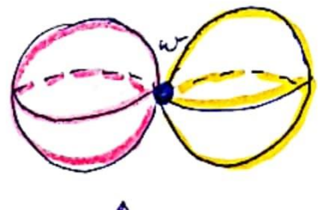
(б) $\Bigg($  $\Bigg)^* \approx$ 

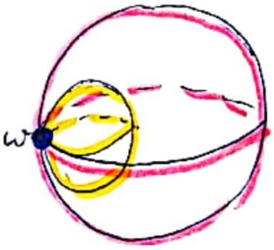
(в)  $\approx$ 

(г) 

$\approx \left(D^2 \setminus \{*\}\right)^* \approx D^2 \approx$ 

(д)  $\approx$ 

(ђ)  $\approx$ 

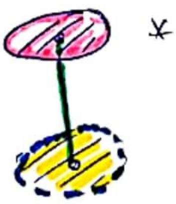
$\approx$ 

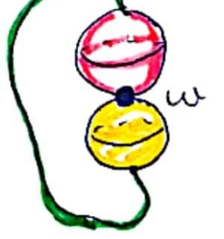
отворени дискови

приметимо да полазни простори нису хомеоморфни иако компактификације јесу.

(е) 

$\approx$ 

(ж)  $\approx$ 

(з)  $\approx$ 

(и)  $\approx$ 

бесконачан цилиндар

уштинута сфера

(ј) $\left(S^2 \setminus \{A, B, C\}\right)^* \approx$ 

различите на S^2

Линделефовост, сепарабилност, I и II аксиома пребројивости

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.

Дефиниција X је Линделефов ако сваки отворен покривач од X има пребројив потпокривач.

Став X је Линделефов акко свака фамилија $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_X$ са својством пребројивог пресека има непразан пресек.

Дефиниција X је сепарабилан постоји $D \subseteq X$ који је пребројив и свуда густ у X (тј. $\overline{D} = X$).

Дефиниција X задовољава I аксиому пребројивости ако за свако $x \in X$ постоји пребројива локална база $\mathcal{B}_x$.

($\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_x$ т.д. $(\forall U \in \mathcal{T}_x)\ x \in U \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}_x)\ x \in B \subseteq U$)

Дефиниција X задовољава II аксиому пребројивости ако има пребројиву базу.

$\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I}$

$\mathrm{II} \Rightarrow$ сепарабилност

$\mathrm{II} \Rightarrow$ Линделефовост

(нигде не важи еквиваленција, видећемо то код $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$)

$\boxed{\text{II} \Rightarrow \text{I}}$ тривијално.

$\boxed{\text{II} \Rightarrow \text{сепарабилност}}$ Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X, тј. $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и нека је $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$, произвољно. Узмимо $D := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тада је D пребројив и $\overline{D} = X$, па је X сепарабилан.

$\boxed{\text{II} \Rightarrow \text{Линделефов}}$ Нека је $\mathcal{B}$ пребројива база од X. и $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ - отворен покривач.

За $x \in X$ постоји $U_x \in \mathcal{U}$ т.д. $x \in U_x$, па постоји и $B_x \in \mathcal{B}$ т.д. $x \in B_x \subseteq U_x$. Имамо

$$X = \bigcup_{x \in X} B_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{база је} \\ \text{пребројива}}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i} \text{ - пребројив потпокривач}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је Линделефов, сепарабилан, задовољава I аксиому, али <u>не</u> задовољава II аксиому.

$\boxed{\text{I}}$ за $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ је пребројива локална база.

$\boxed{\text{сепарабилност}}$ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Није II}}$ Нека је $\mathcal{B}$ произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$.

За $x \in \mathbb{R}$ постоји $B_x \in \mathcal{B}$ т.д. $x \in B_x \subseteq [x, x+1) \in \mathcal{S}$

Нека је $F : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ дато са $F(x) := B_x$.

За $x \neq y$, БУО $x < y$ је $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ и

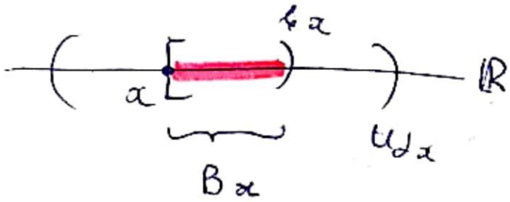
$y \in B_y \subseteq [y, y+1)$, па $x \notin B_y$, тј. $B_x \neq B_y$.

Ово управо значи да је F „1-1", па како је $\mathbb{R}$ непребројив, то је и $\mathcal{B}$ непребројив.

$\boxed{\text{Линделефовост}}$ Нека је $\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{S}$ отворен покривач.

За $x \in \mathbb{R}$ постоји $\alpha_x \in A$ т.д. $x \in U_{\alpha_x}$ као и базни $B_x = [x, b_x) \in \mathcal{S}$ т.д. $x \in B_x \subseteq U_{\alpha_x}$.

Нека је $A := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x, b_x)$.



Идеја: $\mathbb{R} = A \cup A^c$

1. корак: нађемо пребројив покривач од A
2. корак: A^c је пребројив.
3. корак покријемо посебно A и A^c пребројивим покривачима и то је тражени потпокривач од $\mathbb{R}$

1. корак: $(x, b_x) \in \mathcal{U}$ (стандардна топологија на $\mathbb{R}$)

$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ задовољава II аксиому $\Rightarrow (A, \mathcal{U}_A)$ задовољава II аксиому (јер је то наследно својство)

$\Rightarrow (A, \mathcal{U}_A)$ је Линделефов, па је

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i, b_{x_i}) \leftarrow \text{пребројив потпокривач,}$$

одакле је $\boxed{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_{x_i}}}$ (*) (јер $(x_i, b_{x_i}) \subseteq U_{\alpha_{x_i}}$)

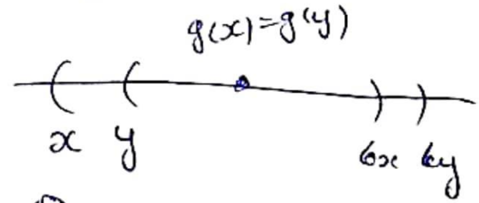
2. корак: A^c је пребројив.

Нека је $g: A^c \longrightarrow \mathbb{Q}$ дефинисано на следећи начин: за $x \in A^c$ имамо $[x, b_x)$ од раније и нека је $q_x \in (x, b_x) \cap \mathbb{Q}$ произвољно.

Дефинишимо $g(x) := q_x$.

g је „1-1": тпс. $x < y$ и $g(x) = g(y)$.

$\Rightarrow y \in (x, b_x) \subseteq A$, али $y \in A^c$ ↯



Дакле, g је „1-1", па како је $\mathbb{Q}$ пребројив, то је и A^c пребројив, одакле $\boxed{A^c \subseteq \bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha_x}}$ (**)

3. корак: Из ⊛ и ⊛⊛ имамо

$$\mathbb{R} = A \sqcup A^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\alpha x_i}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in A^c} U_{\alpha x}\right)$$ – пребројив потпокривач

пребројиве уније

Дакле, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ је Линделефов. ▨

- I и II аксиома су наследна својства;
- Линделефовост је слабо наследна:

  X Линделефов и $A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow A$ је Линделефов.