ТОПОЛОГИЈА А

2020/2021.

Обавезе на курсу:

1. колоквијуи
2. домаћи
3. писмени испит
4. усмени испит

асистент: Милица Јовановић

e-mail: milica_jovanovic@matf.bg.ac.rs

сајт: poincare.matf.bg.ac.rs/~milica_jovanovic

кабинет: 824

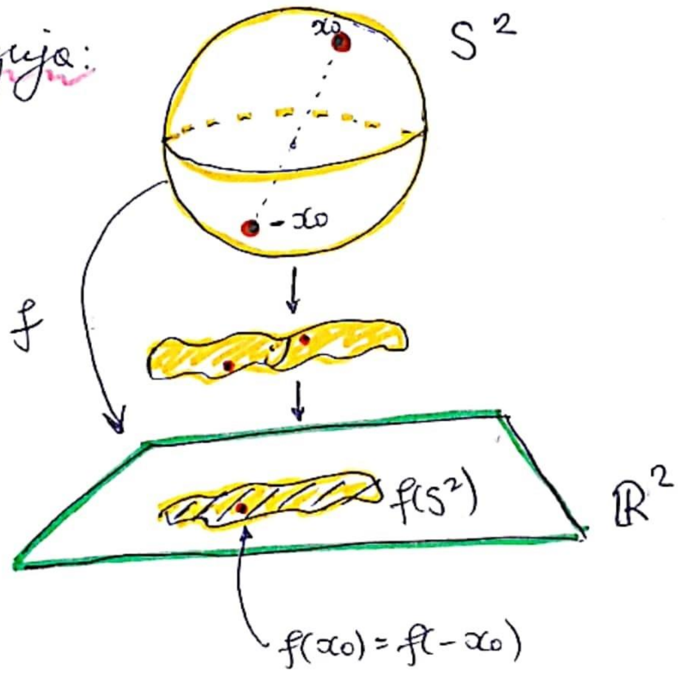
Увод

Неке познате теореме у топологији: **БУТ1**

Теорема (Борсук-Уламова т.) Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидна. Тада постоји тачка $x_0 \in S^2$ т.д.

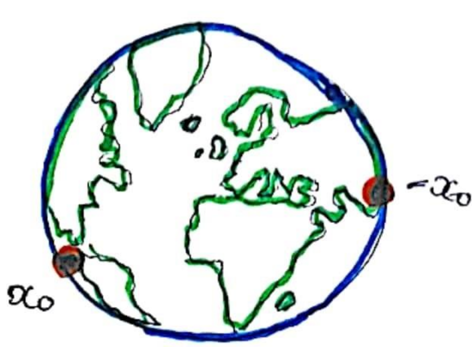
$$f(-x_0) = f(x_0).$$

Илустрација:



x_0 и $-x_0$ се зову „антиподалне" тачке

Пример У сваком тренутку на Земљи постоји пар антиподалних тачака које имају исту температуру и ваздушни притисак.



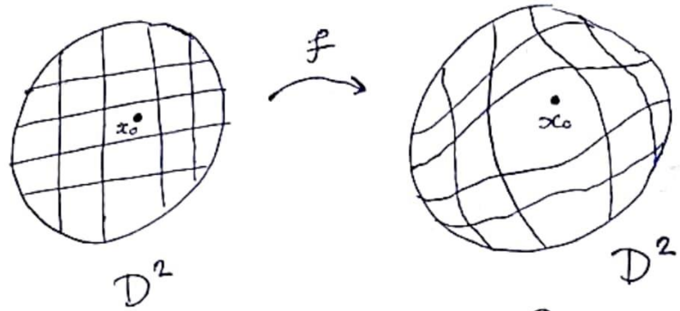
$$f: S^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \big(\underset{\text{температура}}{t(x)}, \underset{\text{притисак}}{p(x)}\big)$$

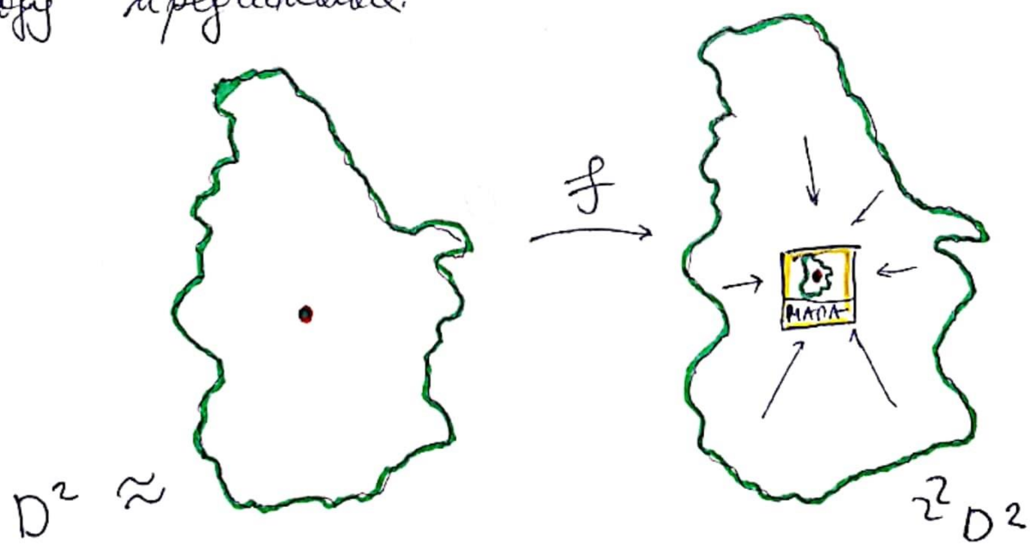
$$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$$

Теорема (Брауерова т.) Нека је $f: D^2 \to D^2$ непрекидно. Тада f има фиксну тачку (тј. постоји $x_0 \in D^2$ т.д. $f(x_0) = x_0$).

Илустрација:



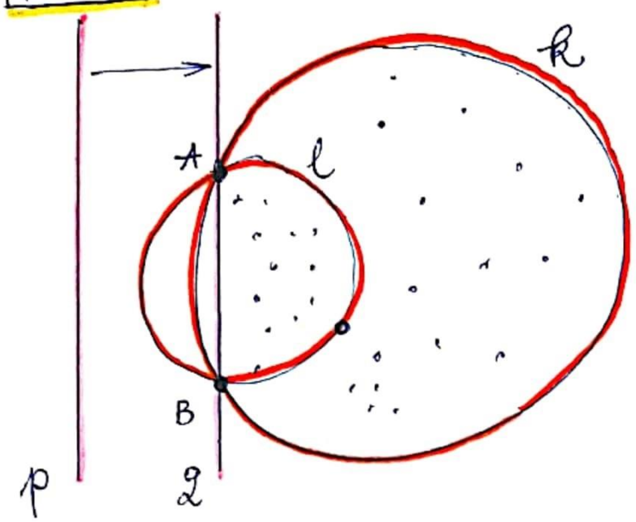
Пример Ако спустимо мапу Србије на сто, увек ће постојати тачка на мапи која је управо на локацији коју представља.



У топологији територија Србије је исто што и диск, тј. те две области су хомеоморфне

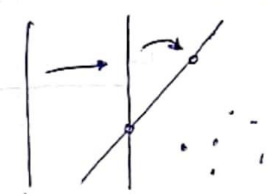
1. Дат је скуп од 2020 тачака у равни у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису коцикличне). Доказати да постоји кружница т.д. је тачно 1712 тачака унутар ње и тачно 305 ван.

решење



I корак: бирамо праву p т.д. су све тачке са исте стране ове праве.

II корак: трансламо p ка тачкама док не дохвати 2 тачке (евентуално транслацију + ротацију)



III корак: бирамо кружницу k т.д. $A, B \in k$ и све остале тачке су унутар ње.

IV корак: смањујемо k до тражене кружнице l.

(прво је 0 тачака кан, па 1, 2, 3, итд. дођемо до 305.) ▨

Теорема (Борсук - Уламова т.) Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно и антиподално (тј. $(\forall x \in S^2)\ f(-x) = -f(x)$). Тада постоји $x_0 \in S^2$ т.д. $f(x_0) = 0$.

БУТ 2

Став БУТ1 $\Leftrightarrow$ БУТ2.

▲ $\Rightarrow$: Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и антипод. Тада на основу БУТ1: $(\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$,

али $f(-x_0) = -f(x_0)$, па је $f(x_0) = -f(x_0)$

$\Rightarrow\ 2f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0.$

$\Leftarrow$: Нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и нека је $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(-x).$$

Тада је g непр. и антип. $(g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x))$, па на основу БУТ2: $(\exists x_0 \in S^2)\ g(x_0) = 0$, тј.

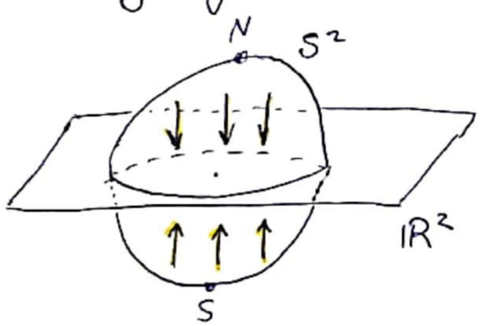
$$f(x_0) = f(-x_0). \blacksquare$$

Скица доказа БУТ2:

Комплетан доказ у: Using the Borsuk–Ulam Theorem, Jiří Matoušek

Нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ непр. и антиподално и прп. да f нема нула.

Нека је $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ пројекција дата са

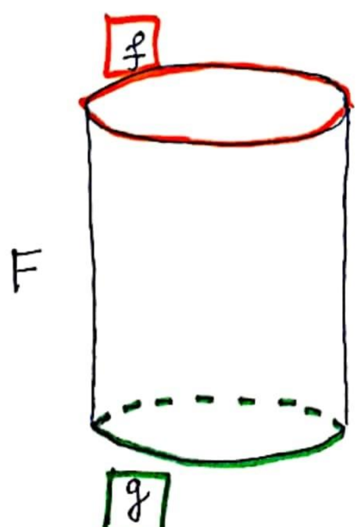


$$g(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{def}}{=} (x_1, x_2).$$

Примећујемо да g има тачно 2 нуле $g(N) = g(S) = 0$.

Даље, нека је $F : S^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$F(x,t) \overset{\text{def}}{=} (1-t)\,g(x) + t\,f(x).$$



Видимо да је $F(x,0) = g(x)$, $F(x,1) = f(x)$.

Антиподалност се са f проширује на F, тј. важи

$$F(-x,t) = F(x,t).$$

(тј. $(\forall t \in [0,1])$ $F(x,t)$ је антиподално)

Посматрајмо $Z \overset{def}{=} F^{-1}(\{0\})$. Када је f „довољно лепо“ (што је могуће постићи), скуп Z је 1-димензиона компактна многострукост, тј. састоји се од затворених путања или од путева чији је и почетак и крај на неком од кругова $S^2\times\{0\}$ или $S^2\times\{1\}$.
Такође, због антиподалности F, скуп Z мора бити симетричан.

Како g има тачно 2 нуле, то је $|Z\cap(S^2\times\{0\})|=2$, а како f нема нула, то је $Z\cap(S^2\times\{1\})=\phi$.
Једино је могуће да се путање које крећу из N и S споје, али то је неизводљиво јер због антиподалности F, оне стално „беже“ једна од друге.
Дакле, дошли смо до контрадикције па закључујемо да f мора имати нулу. ■

$\boxed{\text{Напомена}}$ Све претходно важи и за пресликавања
$$f: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$