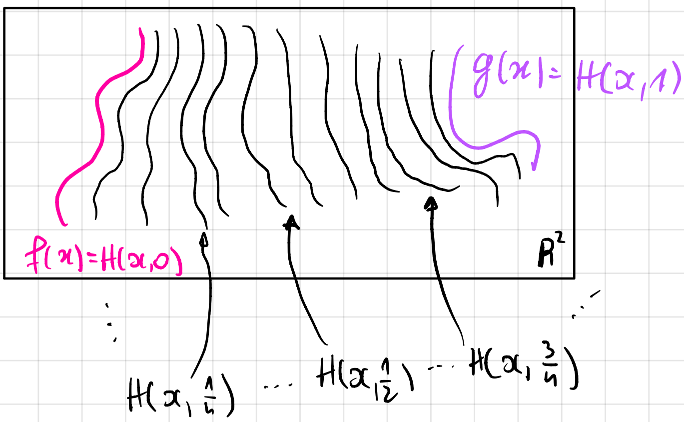
Хомотопија

деф. Нека су $f, g: X \to Y$ непр. пресликавања. Кажемо да је f хомотопно са g ако постоји непр. пресликавање $H: X \times I \to Y$ (где је $I = [0,1]$) тд.

$$H(x,0) = f(x) \quad и \quad H(x,1) = g(x),$$

за свако $x \in X$. Пресликавање H називамо хомотопијом између f и g и пишемо $f \simeq g$ или $H: f \simeq g$.

Пример H је „непрекидна трансформација f у g". То се најбоље види кад су f и g путеви.
Нпр. $f, g: I \to \mathbb{R}^2$ (тј. $X = I$, $Y = \mathbb{R}^2$) и $H: f \simeq g$, тј. $H: I \times I \to \mathbb{R}^2$.



Означимо са $C(X,Y)$ скуп свих непрекидних функција из X у Y.

Став $\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$.

доказ: (Р) За $f: X \to Y$ нека је $H(x,t) := f(x)$. Тада $H: f \simeq f$

(С) Нека је $H: f \simeq g$. Дефинишемо $F: X \times I \to Y$ са

$$F(x,t) = H(x, 1-t).$$

$$\left.\begin{aligned} F(x,0) &= H(x,1) = g(x) \\ F(x,1) &= H(x,0) = f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g \simeq f$$

(Т) Нека је $H: f\simeq g$ и $F: g\simeq h$, $f,g,h: X\to Y$. Дефинишемо $G: X\times I\to Y$ са

$$G(x,t)=\begin{cases} H(x,2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ F(x,2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

Тада $G: f\simeq h$ ∎

Став Нека су $f,g: X\to Y$ непр. и $f\simeq g$.

(1) Ако је $\varphi: Y\to Z$ непр., онда $\varphi\circ f\simeq \varphi\circ g$.

(2) Ако је $\psi: W\to X$ непр., онда $f\circ\psi\simeq g\circ\psi$.

доказ: (1) $H: f\simeq g \Rightarrow \varphi\circ H: \varphi\circ f\simeq\varphi\circ g$

(2) $H: f\simeq g \Rightarrow$ дефинишемо $G: W\times I\to Y$ са

$G(w,t)=H(\psi(w),t) \Rightarrow G: f\circ\psi\simeq g\circ\psi$. ∎

Пример Ако је $n\in\mathbb{N}$ и $K\subseteq\mathbb{R}^n$ конвексан и $f,g: X\to K$ непр. онда $f\simeq g$. Специјално за $K=\mathbb{R}^n$,

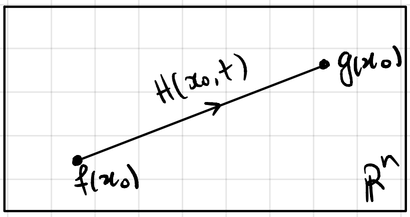
$$f,g: X\to\mathbb{R}^n \text{ непр.} \Rightarrow f\simeq g.$$

У овом случају хомотопију $H: f\simeq g$ можемо дефинисати на следећи начин: $H: X\times I\to\mathbb{R}^n$ дато са

$$H(x,t):=(1-t)f(x)+t\,g(x)$$

H је непр. и $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$

Дакле, кад фиксирамо $x_0\in X$, $H(x_0,t)$, $t\in I$ буде дуж од $f(x_0)$ до $g(x_0)$.



Пример Ако је $Y \subseteq \mathbb{R}$ и $f,g: X \to Y$ непр. за хомотопију не можемо увек узети $H: X \times I \to Y$ дато са

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + t\,g(x).$$

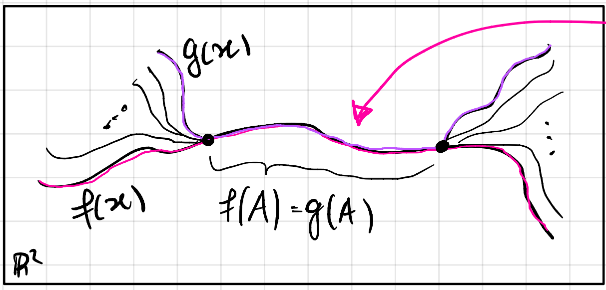
У чему је проблем? H јесте непр., $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$, АЛИ $(1-t)f(x)+t\,g(x)$ не мора припадати Y. Због тога нам је потребно да је Y конвексан у претходном примеру.

деф. Нека су $f,g: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$. Кажемо да је f хомотопно са g релативно A (пишемо $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A)$) ако постоји непр. $H: X \times I \to Y$ тд.

$$H(x,0) = f(x), \quad x \in X$$
$$H(x,1) = g(x), \quad x \in X$$
$$H(a,t) = f(a) = g(a), \quad a \in A,\ t \in I$$

Другим речима, $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A)$ ако је $f \simeq g$ и при тој хомотопији се слика од A „не померa".

Пример $f,g: I \to \mathbb{R}^2$, $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $H: f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A)$



слика од A је фиксирана за свако t, тј. $H(a,t) = f(a) = g(a)$, $t \in I$, $a \in A$

Став $\simeq (\mathrm{rel}\ A)$ је рел. екв.

Став (1) $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A) \Rightarrow \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g \ (\mathrm{rel}\ A)$

(2) $\psi: W \to X$ и $B \subseteq W$ тд. $\psi(B) \subseteq A$, онда

$$f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A) \Rightarrow f \circ \psi \simeq g \circ \psi \ (\mathrm{rel}\ B)$$

Хомотопски тривијалне пресликавање

деф. Константно пресликавање $X \to Y$ које све слике у $y \in Y$ означавамо са $c_y : X \to Y$, тј. $c_y(x) = y$, за свако $x \in X$.

деф. Пресликавање $f : X \to Y$ је хомотопски тривијално ако постоји $y \in Y$ тд. $f \simeq c_y$. Пишемо $f \simeq const.$

Пример Ако је $f : X \to \mathbb{R}^n$, онда $f \simeq const.$
Заиста, нека је $y \in \mathbb{R}^n$ и $c_y : X \to \mathbb{R}^n$ дато са $c_y(x) = y$, $\forall x$.
Дефинишемо $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ са

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + ty$$

H је непр. и $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = y = c_y(x)$, па је $H : f \simeq c_y$.

Став Константне пресликавање $c_{y_1}, c_{y_2} : X \to Y$ су хомотопне ако и само ако постоји пут од y_1 до y_2.

доказ: $\Rightarrow$: Нека је $H : c_{y_1} \simeq c_{y_2}$, тј. $H : X \times I \to Y$ непр. и

$$H(x,0) = c_{y_1}(x) = y_1, \quad H(x,1) = c_{y_2}(x) = y_2.$$

Нека је $x_0 \in X$ произвољно и $u : I \to Y$ дато са $u(t) = H(x_0, t)$.
Тада је u пут од y_1 до y_2.
$\Leftarrow$: Нека је $u : I \to Y$ пут од y_1 до y_2, тј. u је непр. и $u(0) = y_1$, $u(1) = y_2$. Дефинишемо $H : X \times I \to Y$ са

$$H(x,t) = u(t).$$

$\Rightarrow H : c_{y_1} \simeq c_{y_2}$. ▨

Теорема Нека је $f: X \to Y$ непр. Пресликавање f је хомотопски тривијално ако и само ако се може проширити на конус CX, тј. акко постоји $\bar{f}: CX \to Y$ непр. тд.

$$(\forall x \in X)\ \bar{f}(x) = f(x).$$

Другим речима, акко комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\ X \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Специјално, за $X = S^{n-1}$ је $CX = D^n$, па дијаграм изгледа овако:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\ S^{n-1} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Хомотопска еквиваленција простора

деф. Кажемо да су топ. простори X и Y **хомотопски еквивалентни** ако постоје $\varphi: X \to Y$ и $\psi: Y \to X$ непр. тд. $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y$ и $\psi \circ \varphi \simeq 1_X$. Пишемо $X \simeq Y$.

Очигледно $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Став $\simeq$ је рел. екв. на скупу свих тополошких пр.

доказ: (Р) узмемо $\varphi = \psi = 1_X$

(С) $X \simeq Y \iff X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y,\ \varphi \circ \psi \simeq 1_Y,\ \psi \circ \varphi \simeq 1_X \iff Y \simeq X$

(Т) $X \simeq Y$ и $Y \simeq Z$

$\Rightarrow X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} Z$ и $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y,\ \psi \circ \varphi \simeq 1_X,\ \sigma \circ \tau \simeq 1_Z,\ \tau \circ \sigma \simeq 1_Y$

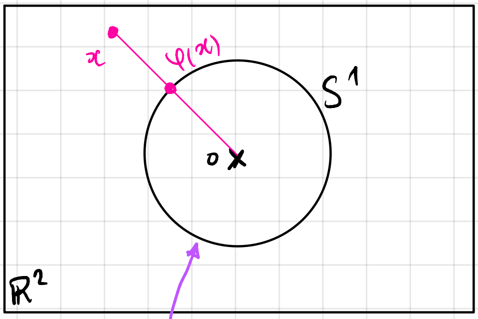
$\Rightarrow X \underset{\psi \circ \tau}{\overset{\sigma \circ \varphi}{\rightleftarrows}} Z \qquad (\sigma \circ \varphi) \circ (\psi \circ \tau) = \sigma \circ \underbrace{(\varphi \circ \psi)}_{\simeq 1_Y} \circ \tau \simeq \sigma \circ \tau \simeq 1_Z$

и слично $(\psi \circ \tau) \circ (\sigma \circ \varphi) \simeq 1_X \Rightarrow X \simeq Z.$ ∎

Пример $\mathbb{R}^n \setminus * \simeq S^{n-1}$ ($*$ = било које тачка у $\mathbb{R}^{n}$)

Нека је $n=2$ ($n \geq 3$ се слично показује)

БУО. нека је $*=0$, тј. показујемо $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$



јединични круг у $\mathbb{R}^2$

Дефинишемо пресликавања

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \arrow[r, bend left, "\varphi"] & S^1 \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\psi(y) \overset{\text{def}}{=} y, \quad y \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(\varphi \circ \psi)(y) = \varphi(\psi(y)) = \varphi(y) = \frac{y}{\|y\|} = y = \mathbb{1}_{S^1}(y) \quad (y \in S^1, \text{ па је } \|y\| = 1)$$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{x}{\|x\|}$$

Нека је $H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ дато са

$$H(x,t) = (1-t) \cdot (\psi \circ \varphi)(x) + tx = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$$

H је непр. и добро деф. јер су тачке $(1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$, $t \in I$ елементи дужи од $\frac{x}{\|x\|}$ до x, а та дуж не пролази кроз 0, па заиста $H(x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Такође,

$$H(x,0) = (\psi \circ \varphi)(x)$$

$$H(x,1) = x = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(x)$$

Коначно, $H : \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ и $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_{S^1}$ (па је и $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_{S^1}$)

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$.

Контрактибилни простори

деф. Кажемо да је X контрактибилан ако је $X \simeq *$.
($*$ = топ. пр. који се састоји од само једне тачке)

Пример (1) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан $\Rightarrow K \simeq *$

(2) $D^n \simeq *$ (диск димензије n), $n \geq 1$

(3) $\mathbb{R}^n \simeq *$, $n \geq 1$

(4) $S^n \not\simeq *$, $n \geq 0$

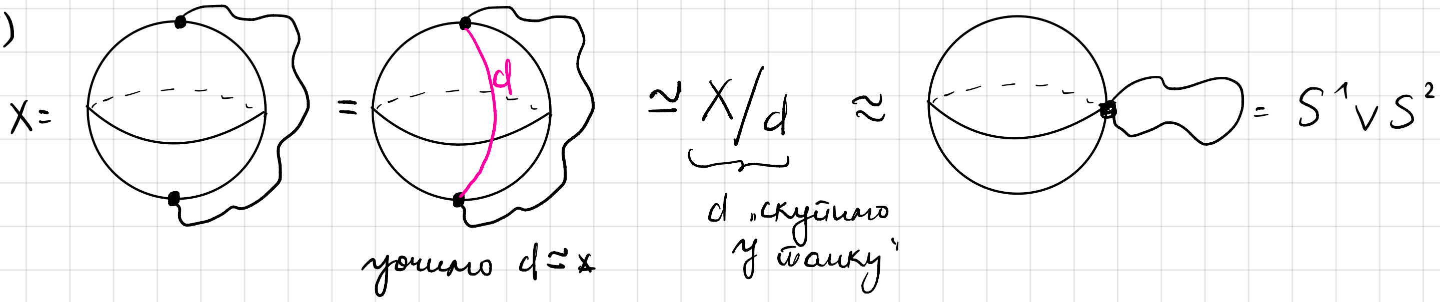
Став Ако је X топ. пр. и $A \subseteq X$ тд. пар (X, A) задовољава својство проширења хомотопије и ако је $A \simeq *$, онда $X \simeq X/A$.

Коментар Нисмо дефинисали својство проширења хомотопије, али сви простори са којима радимо ће имати то својство, па само памтимо:

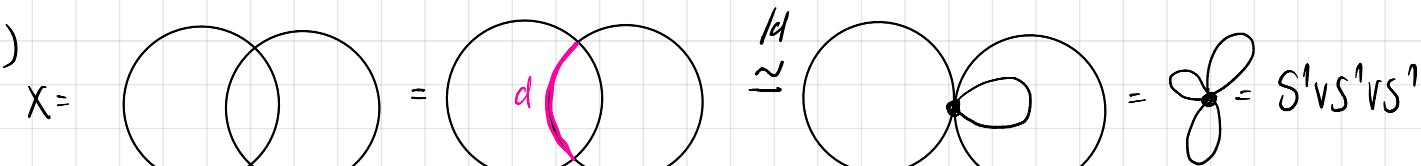
$$A \simeq * \Rightarrow X \simeq X/A$$

Пример Претходни став користимо често за $A = D^1 =$ дуж и $A = D^2 =$ диск

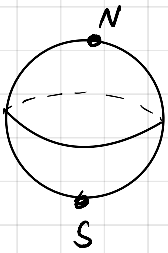
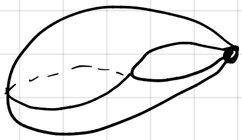
(1)



(2)

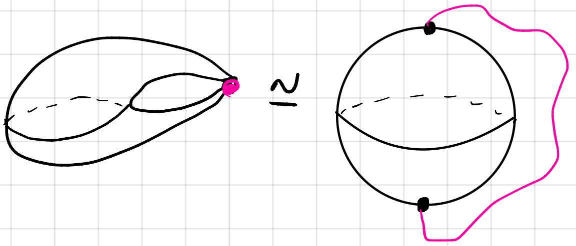


(3) $X = S^2/_{N\sim S}$ – на сфери идентификујемо северни и јужни пол.

$X =$  $/_{N\sim S} \approx$ 

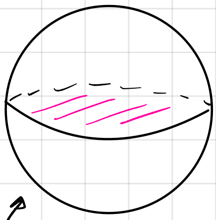
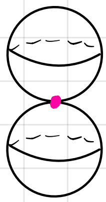
Став користимо на два начина:

- D^1 и D^2 скупљамо у $*$
- $*$ ширимо до D^1 или D^2

$X \approx$  $\simeq S^1 \vee S^2$

пример (1)

Простор X се зове уштинута сфера.

(4) $X =$  $/D^2 \simeq$  $\approx S^2 \vee S^2$

сфера са диском по средини