Особине:

(1) површи M_g су оријентабилне

(2) површи N_h су неоријентабилне

(3) међу површима M_g и N_h нема хомеоморфних

Теорема [о класификацији повезаних затворених површи]
Нека је X повезана затворена површ. Тада

(1) X оријентабилна $\Rightarrow (\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g$,

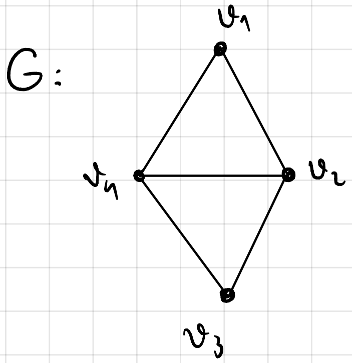
(2) X неоријентабилна $\Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h$.

Мапе на површима

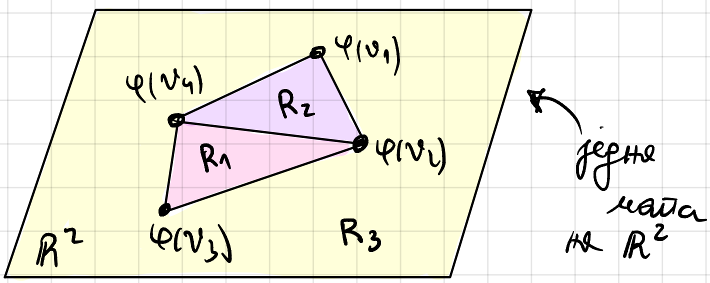
У овом делу посматрамо повезане површи без границе.

деф. Нека је S површ. Утапање $\varphi: G \to S$, где је $G = (V, E, f)$ неки граф, називамо мапом на површи S. Тачке $\varphi(v)$, $v \in V$ су темена ове мапе, $\varphi(e)$, $e \in E$ су ивице, док су компоненте повезаности од $S \setminus \varphi(G)$ региони мапе.

Пример

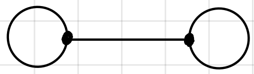


$S = \mathbb{R}^2$

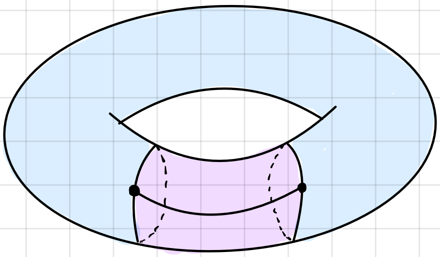


3 региона: R_1, R_2, R_3

Пример Мапа не зависи само од графа G и површи S, већ и од утапања. Граф G можемо утопити у $S = T^2$ на 2 различита начина.

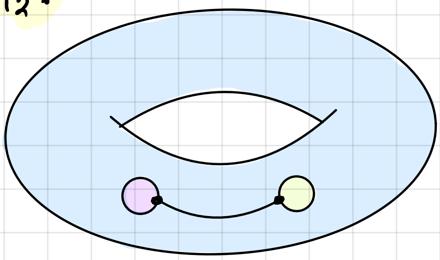
G: 

φ_1:



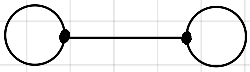
2 региона

φ_2:



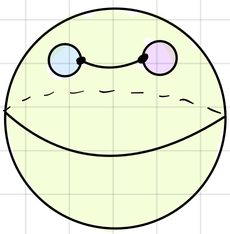
3 региона

деф. Мапа је регуларна ако је сваки њен регион хомеоморфан отвореном диску.

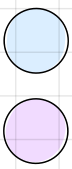
Пример $G =$  утапано у сферу и торус.

$S_1 = S^2$

φ_1:

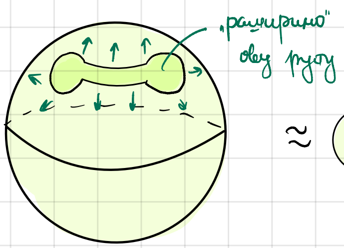


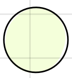
региони:



$\approx \operatorname{int} D^2$

$\approx \operatorname{int} D^2$

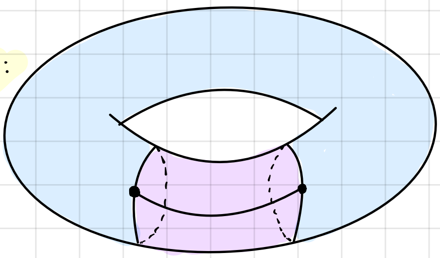


$\approx$  $\approx \operatorname{int} D^2$

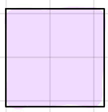
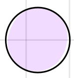
$\Rightarrow \varphi_1$ је регуларна

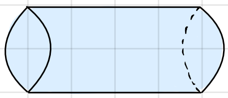
$S_2 = T^2$

φ_2:



региони:

 $\approx$  $\approx \operatorname{int} D^2$

 $\approx C \not\approx \operatorname{int} D^2$

цилиндар

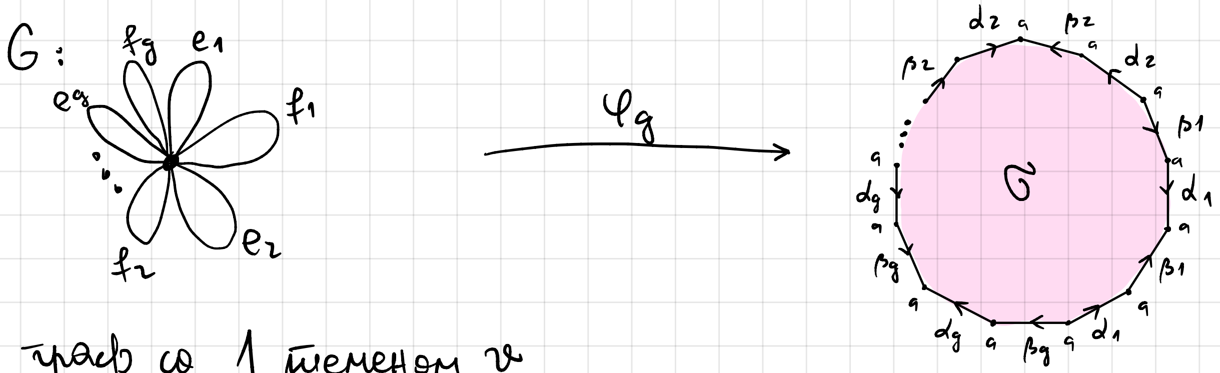
$\Rightarrow \varphi_2$ није регуларна

Став На свакој затвореној повезаној површи постоји регуларна мапа.

<u>доказ</u>: На основу теореме о класификацији знамо да су све затворене повезане површи облика или M_g, $g \in \mathbb{N}_0$ или N_h, $h \in \mathbb{N}$, па је довољно да конструишемо по једну регуларну мапу на свакој од њих.

1° $M_0 = S^2$: видели смо регуларну мапу у претходном примеру.

2° M_g, $g \geq 1$:

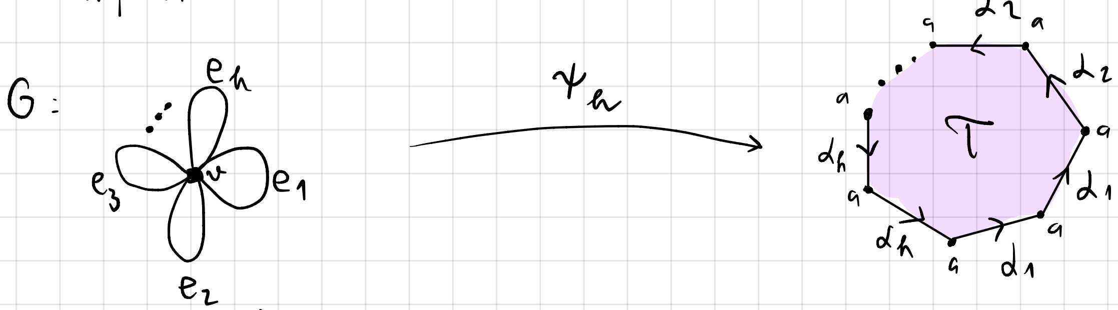


граф са 1 теменом v
и $2g$ ивица $e_1, f_1, \dots, e_g, f_g$

φ_g дефинисано са: $\varphi_g(v) = a$, $\varphi_g(e_i) = \alpha_i$, $\varphi_g(f_i) = \beta_i$

Ова мапа има само 1 регион $\sigma \approx \operatorname{int} D^2$, па је регуларна

3° N_h, $h \geq 1$:



граф са 1 теменом v
и h ивица $e_1, e_2, \dots, e_h$

$\psi_h(v) = a$

$\psi_h(e_i) = \alpha_i$

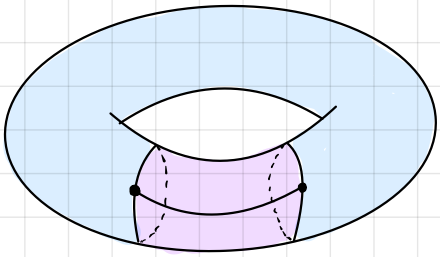
Поново имамо само 1 регион $\tau \simeq \operatorname{int} D^2$, па је и ова мапа регуларна. ∎

деф. Нека је $\varphi : G \to S$ мапа на површи S. Ако су V, E и R скупови темена, ивица и региона мапе φ, онда је Ојлерова карактеристика мапе φ дата са

$$\chi(\varphi) = |V| - |E| + |R|.$$

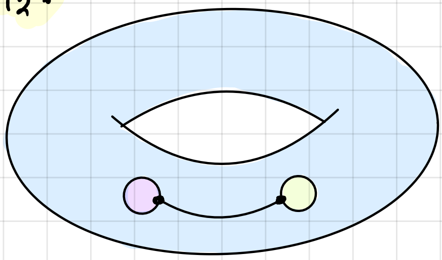
Пример Имали смо раније 2 мапе на T^2:

φ_1:



$$\chi(\varphi_1) = 2 - 3 + 2 = 1$$

φ_2:



$$\chi(\varphi_2) = 2 - 3 + 3 = 2$$

Теорема Ако су $\varphi_1 : G_1 \to S$ и $\varphi_2 : G_2 \to S$ две регуларне мапе на S, онда је

$$\chi(\varphi_1) = \chi(\varphi_2).$$

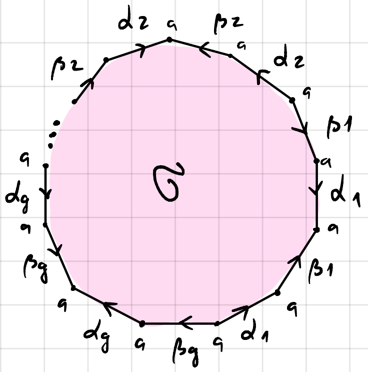
Ојлерова карактеристика површи

деф. Нека је S повезана затворена површ. Ојлерова карактеристика површи S је

$$\chi(S) \overset{def}{=} \chi(\varphi),$$

где је φ било која регуларна мапа на S.

M_g:



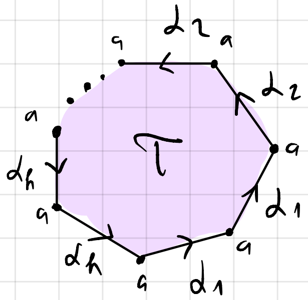
1 теме: a

$2g$ ивица: $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$

1 регион: σ

$$\Rightarrow \quad \chi(M_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

N_h:



1 теме: a

h ивица: $\alpha_1, \dots, \alpha_h$

1 регион: τ

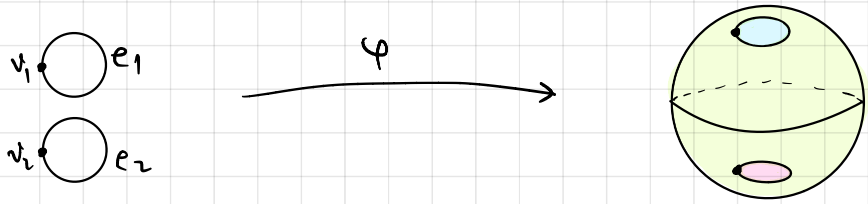
$$\Rightarrow \quad \chi(N_h) = 1 - h + 1 = 2 - h$$

Став Ако је $\varphi : G \to S$ мапа на S, онда

$$\chi(\varphi) \geq \chi(S).$$

Пример $\chi(S^2) = \chi(M_0) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$

G:



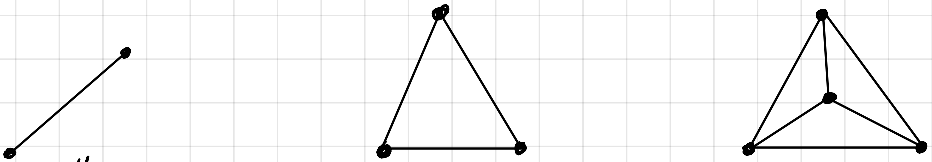
2 темена
2 ивице
3 региона

$$\Rightarrow \chi(\varphi) = 2 - 2 + 3 = 3 > \chi(S^2).$$

Планарни графови

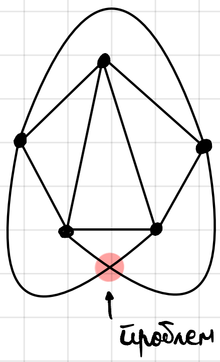
деф. Граф G је планаран ако се може реализовати у $\mathbb{R}^2$, тј. ако постоји утапање (тј. непрекидна инјекција) $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$.

Пример K_2, K_3 и K_4 јесу планарни (тј. могу се нацртати у равни без самопресека)

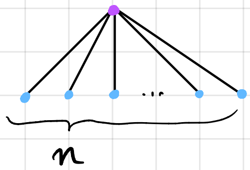


K_2 K_3 K_4

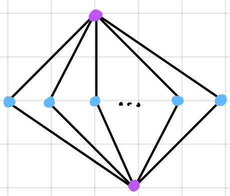
K_5 није планаран (ни K_n, $n \geq 6$)



Пример $K_{1,n}$ и $K_{2,n}$ су планарни



$K_{1,n}$



$K_{2,n}$

Став (1) Планаран граф се може реализовати на свакој површи.

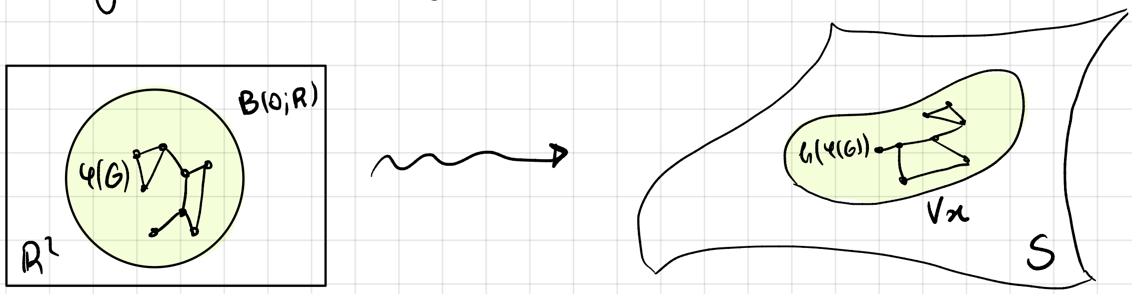
(2) Граф је планаран ако и само ако се може реализовати на S^2.

<u>доказ</u> (скица) (1) Нека је S површ и $x \in S$. По деф. постоји околина V_x тачке x тд. $V_x \approx \operatorname{int} D^2$.

Нека је G планаран и $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ утапање.

G је компактан, па је и $\varphi(G)$ компактан, па и ограничен $\Rightarrow$ постоји $B(0;R)$ тд. $\varphi(G) \subseteq B(0;R) \approx \operatorname{int} D^2$

Нека је $h : B(0;R) \to V_x$ хомеоморфизам, одакле је $h \circ \varphi$ утапање G у S:



(2) $\Rightarrow$: директно из (1)

$\Leftarrow$: Нека је $\varphi : G \to S^2$ утапање

може се показати да φ није „на", тј.

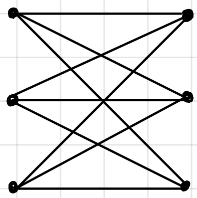
$(\exists y \in S^2) \; y \notin \varphi(G)$

$\Rightarrow$ добијамо $\varphi : G \to S^2 \setminus \{y\} \overset{h}{\approx} \mathbb{R}^2$

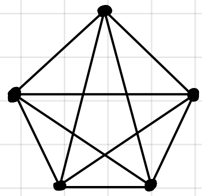
$\Rightarrow$ $h \circ \varphi$ је утапање G у $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ G је планаран. $\blacksquare$

Теорема Графови K_5 и $K_{3,3}$ нису планарни.



$K_{3,3}$



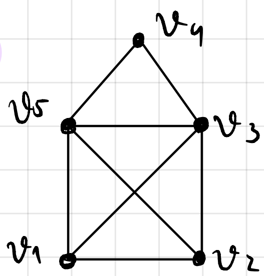
K_5

Последица Сваки граф који има подграф хомеоморфан са $K_{3,3}$ или K_5 није планаран.

Штавише, важи и обрнуто:

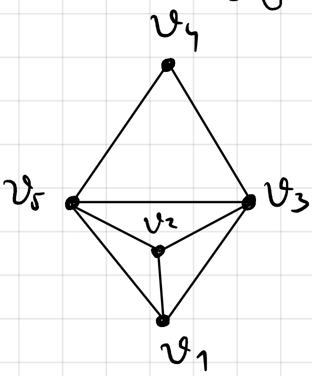
Теорема Граф је планаран ако и само ако нема подграф хомеоморфан са $K_{3,3}$ или K_5.

Пример



јесте планаран јер не садржи ни K_5 ни $K_{3,3}$

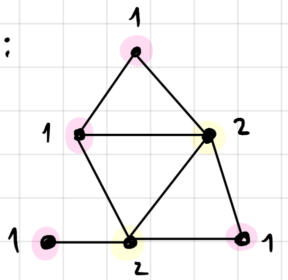
једна реализација у $\mathbb{R}^2$:



Хроматски број графа, мапе и површи

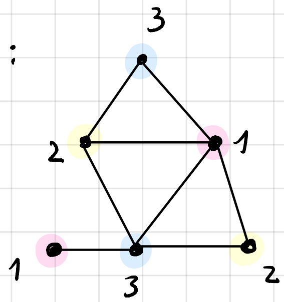
деф. Бојење графа $G=(V,E,f)$ је било која функција $c: V \to \mathbb{N}$ ($c(v)$ - боја темена v). Ако је $|c(V)|=d$, кажемо да је c бојење графа G са d боја.
Бојење c је правилно ако су свака два суседна темена обојена различитим бојама.

Пример G:



неправилно бојење

G:



правилно бојење

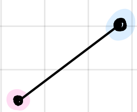
деф. Хроматски број графа G је најмање $d \in \mathbb{N}$ тд. се G може правилно обојити са d боја. Прецизније,

$$col(G) \overset{def}{=} \min\{d \in \mathbb{N} \mid G \text{ се може обојити правилно са } d \text{ боја}\}$$

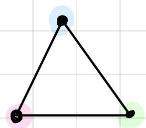
Сваки граф можемо правилно обојити са $|V|$ боја (свако теме обојимо другом бојом), па је $col(G) \leq |V|$.

Пример $col(K_n) = n$

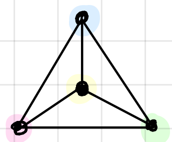
У K_n су свака два темена спојена, па свако теме мора бити друге боје.



K_2

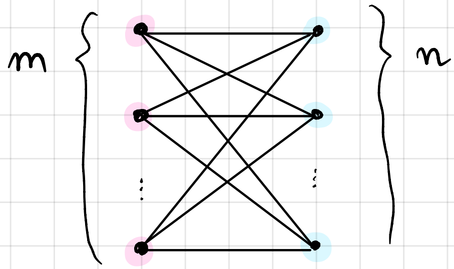


K_3

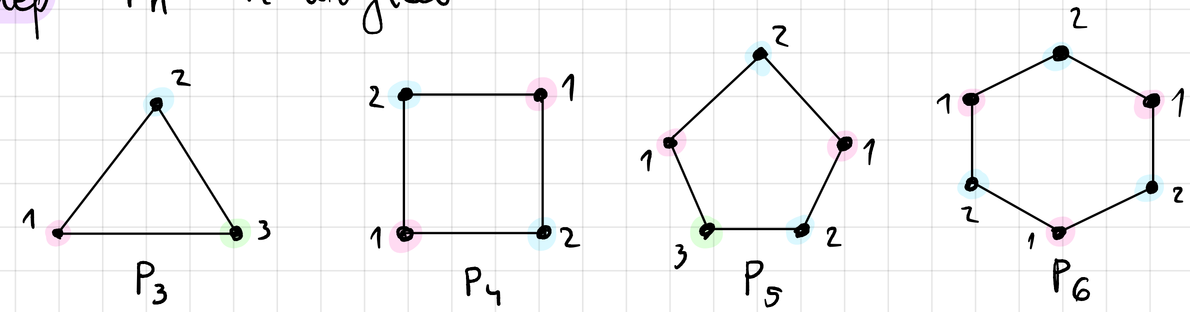


K_4

Пример $col(K_{m,n}) = 2$



Пример P_n = n-тоугао



Примећујемо $col(P_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ парно} \\ 3, & n \text{ непарно} \end{cases}$

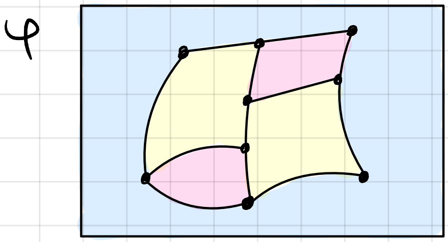
Став Ако је G' подграф од G, онда
$$col(G') \leq col(G)$$

Овај став користимо на следећи начин:
- нађемо у G подграф G' за који знамо $col(G')$
- закључимо $col(G) \geq col(G')$

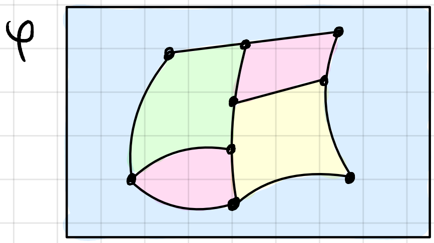
Нпр. ако у G имамо троугао, онда је $col(G) \geq 3$.

деф. Бојење мапе $\varphi: G \to S$ је било која функција $c: R \to \mathbb{N}$ (где је R скуп свих региона ове мапе). Ако је $|c(R)| = d$, кажемо да је c бојење мапе помоћу d боја. Бојење c је правилно ако су свака два суседна региона обојене различитим бојама (а региони су суседни ако имају заједничку ивицу.

Пример $\varphi: G \to \mathbb{R}$ мапе у раван



неправилно бојење



правилно бојење

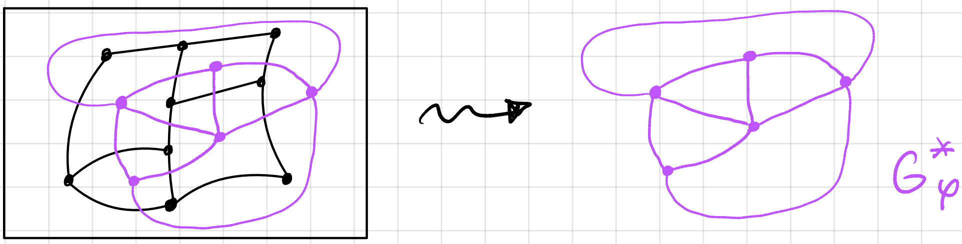
деф. Хроматски број мапе је најмањи број d помоћу којег се мапа може правилно обојити, тј.

$$col(\varphi) \overset{def}{=} \min\{d \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ се може обојити правилно са } d \text{ боје}\}$$

деф. Мапи $\varphi: G \to S$ придружујемо дуални граф G_φ^*:

- темена од G_φ^* има колико и региона у φ
- два темена су спојена ако су одговарајући региони суседни.

Пример φ



G_φ^*

Приметимо да је бојење мапе φ еквивалентно бојењу дуалног графа. Прецизније имамо следећи став.

Став $col(\varphi) = col(G_\varphi^*)$.

деф. Нека је S површ. Хроматски број површи S је најмањи број $d \in \mathbb{N}$ т.д. се <u>свака</u> мапа $\varphi : G \to S$ може правилно обојити са d (или мање) боја.

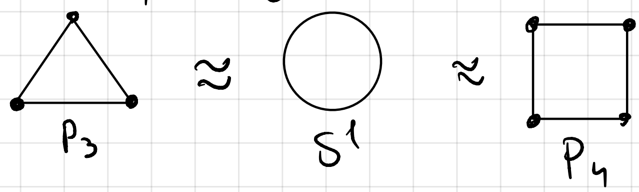
Став Нека је S површ. Тада $col(S)$ постоји ако и само ако је $\{col(\varphi) \mid \varphi \text{ мапа на } S\}$ ограничен одозго. Притом

$$col(S) = \max\{col(\varphi) \mid \varphi \text{ мапа на } S\}$$

Став Ако су S_1 и S_2 површи и $S_1 \approx S_2$, онда

$$col(S_1) = col(S_2).$$

Пример Претходни став не важи за графове:



али $\quad 3 = col(P_3) \neq col(P_4) = 2.$

Теорема $col(\mathbb{R}^2) = 4$ (тј. свака мапа у равни се може правилно обојити са 4 или мање боја).

деф. Хивудов број повезане затворене површи S је

$$H(S) \overset{def}{=} \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\,\chi(S)}}{2} \right]$$

Теорема (1) Ако је K Клајнова боца, онда $col(K) = 6$.
(2) Ако је $S \neq K$ повезана затворена површ, онда $col(S) = H(S)$.

Пример $H(M_g) = \left[\dfrac{7+\sqrt{49-24\chi(M_g)}}{2}\right] = \left[\dfrac{7+\sqrt{49-24(2-2g)}}{2}\right] =$

$$= \left[\dfrac{7+\sqrt{1+48g}}{2}\right]$$

$$H(N_h) = \left[\dfrac{7+\sqrt{49-24\chi(N_h)}}{2}\right] = \left[\dfrac{7+\sqrt{49-24(2-h)}}{2}\right] = \left[\dfrac{7+\sqrt{1+24h}}{2}\right]$$

$$\operatorname{col}(S^2) = \operatorname{col}(M_0) = H(M_0) = 4$$

$$\operatorname{col}(T^2) = \operatorname{col}(M_1) = H(M_1) = 7$$

$$\operatorname{col}(\mathbb{R}P^2) = \operatorname{col}(N_1) = H(N_1) = 6$$