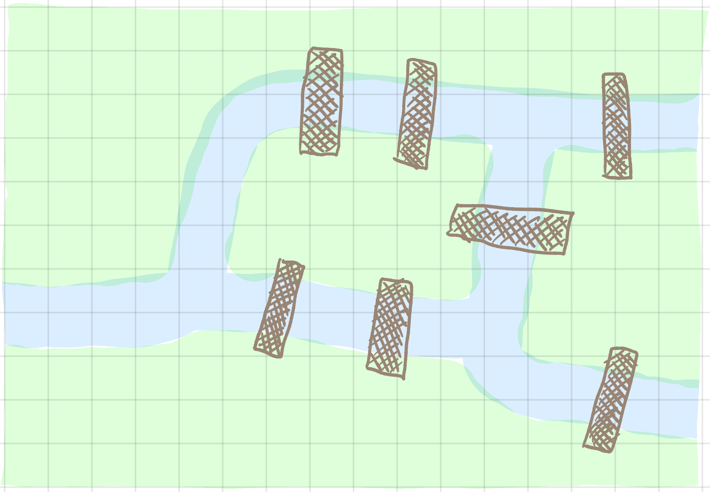
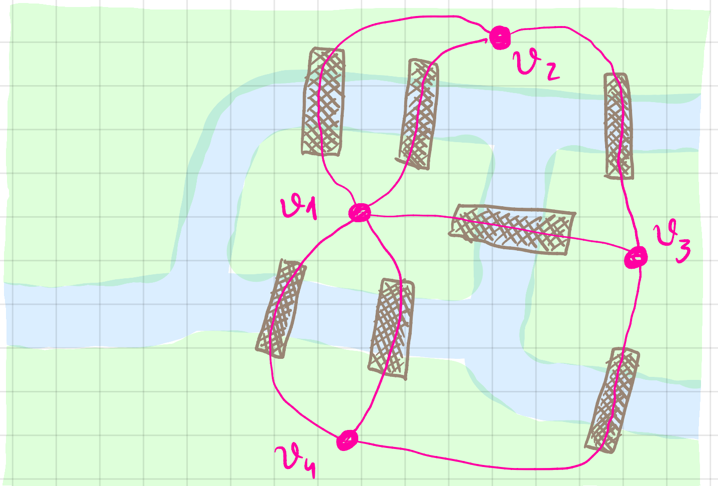
Пример Проблем 7 мостова у Кенигзбергу



Како прошетати кроз град тако да се сваки мост пређе само једном?
Ојлер је доказао да је то заправо немогуће.

Направимо граф: копна = темена, мостови = ивице



$$\left.\begin{aligned} \text{ind } v_1 &= 5 \\ \text{ind } v_2 &= 3 \\ \text{ind } v_3 &= 3 \\ \text{ind } v_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

имамо 4 темена непарног индекса, па граф није уникурсалан

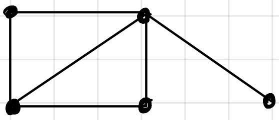
Пример K_n је уникурсалан акко је n непаран или $n=2$.

Ојлерова карактеристика графа

деф. Нека је $G=(V,E,f)$ граф. **Ојлерова карактеристика графа** G је $\chi(G) \overset{def}{=} |V|-|E|$ (тј. разлика броја темена и броја ивица).

Пример (1) K_n има n темена и $\binom{n}{2}$ ивица, па је

$$\chi(K_n) = n - \binom{n}{2}, \quad n \geq 2$$

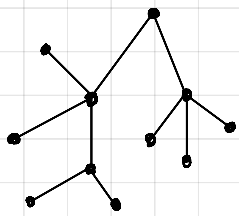
(2) $G =$  $\chi(G) = 5 - 6 = -1$

(3) $K_{m,n}$ има $m+n$ темена и $m \cdot n$ ивица

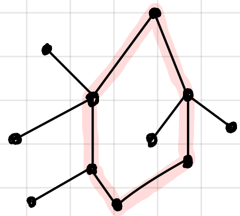
$$\chi(K_{m,n}) = m+n-mn$$

деф. Дрво је повезан граф без циклова.

Пример



јесте дрво



није дрво

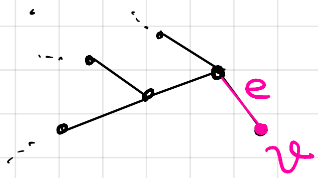
Став Ако је G дрво, онда је $\chi(G) = 1$.

доказ: Индукција по $|V|$.

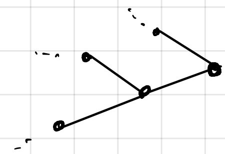
база: $|V| = 1 \Rightarrow G = \bullet \Rightarrow \chi(G) = 1$

хипотеза: Нека за свако дрво тд. $|V| < n$ важи $\chi(G) = 1$

инд. корак: Нека је G дрво са тачно n темена. Како у G нема циклова, на основу леме на стр. 48. постоји $v \in V$ тд. $\operatorname{ind} v = 1$.

G: 

$\rightsquigarrow$

G': 

Нека је e ивица чији је крај v.

Избацимо из G теме v и ивицу e и добијемо граф G' који је дрво са $n-1$ теменом, па је по и.х. $\chi(G')=1$.

Коначно, $\chi(G) = |V| - |E| = (|V'|+1) - (|E'|+1) =$

$$= |V'| - |E'| = \chi(G') = 1. \quad \blacksquare$$

Став Ако је G повезан граф, онда је $\chi(G) \leq 1$.

<u>доказ</u> (скица): 1° G дрво $\Rightarrow$ $\chi(G)=1$ ✓

2° G није дрво $\Rightarrow$ има циклове

бришемо из G ивице које праве циклове док не добијемо дрво G'.

Онда је $|V|=|V'|$ и $|E| > |E'|$, па је

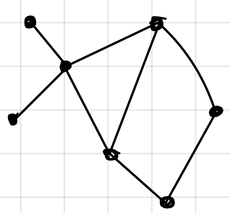
$$\chi(G) = |V| - |E| < |V'| - |E'| = \chi(G') = 1. \quad \blacksquare$$

Став Ако је G повезан граф, онда

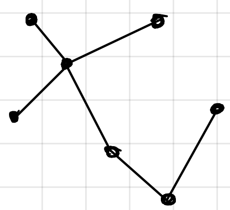
$$G \text{ је дрво} \Leftrightarrow \chi(G) = 1.$$

Пример Максимално дрво у повезаном графу је подграф који је дрво и има исти број темена као полазни граф.

G:

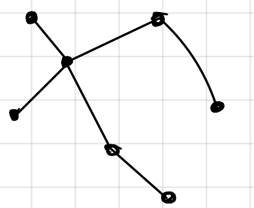


G':



макс. дрво

G''



макс. дрво

(макс. дрво није јединствено)

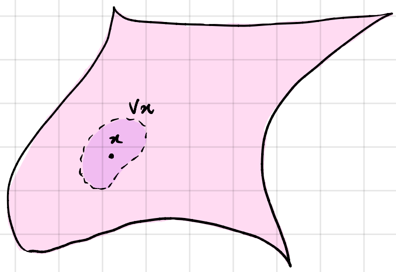
Површи

деф. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и X Хауздорфов простор. Кажемо да је X n-димензионална многострукост ако

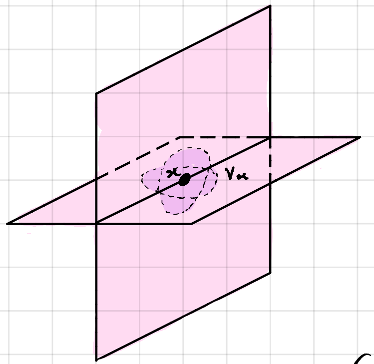
$$(\forall x \in X)(\exists V_x \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X)\ V_x \approx \operatorname{int} D^n.$$

Површ је многострукост димензије $n=2$.

Пример



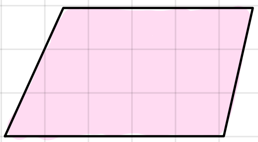
површ



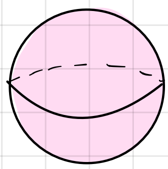
није површ ($V_x \not\approx$)

Површ је локално „равна", нема самопресека.

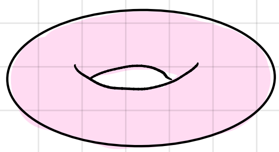
Пример Познате површи:



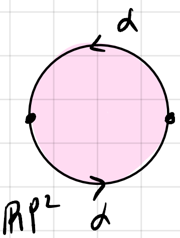
$\mathbb{R}^2$



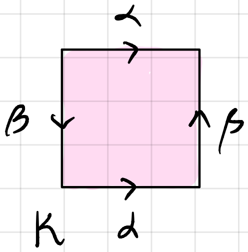
S^2



T^2



$\mathbb{RP}^2$

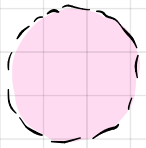


K

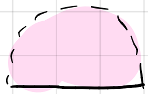
Став Ако су X и Y многострукости димензије m односно n, онда је $X \times Y$ многост. димензије $m \times n$.

Означимо $\operatorname{int} D^n_+ \overset{def}{=} \{x \in \operatorname{int} D^n \mid x_n \geq 0\}$

нпр.



$\operatorname{int} D^2$



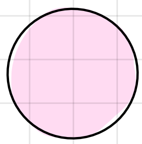
$\operatorname{int} D^2_+$

деф. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и X Хаусдорфов простор. Кажемо да је X n-димензионална многострукост са границом ако

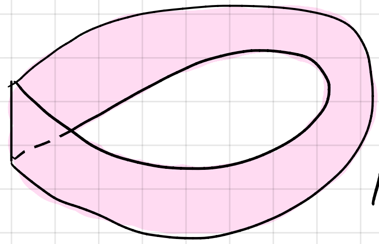
$$(\forall x \in X)(\exists V_x \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X)\ V_x \approx \operatorname{int} D^n \ \vee \ V_x \approx \operatorname{int} D^n_+$$

Граница (руб) многострукости је скуп свих тачака са околином $V_x \approx \operatorname{int} D^n_+$.

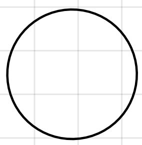
Пример $S^2, \mathbb{R}^2, T^2, \mathbb{R}P^2, K$ су површи без границе
D^2, M су површи са границом

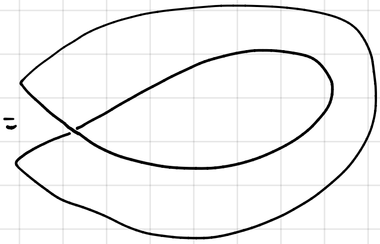


D^2



M

$\partial D^2 =$  $= S^1$

$\partial M =$  $\approx S^1$

Пример Граница многострукости и граница скупа у тополошком простору није исто.

нпр. $\partial S^2 = \emptyset$ – граница површи

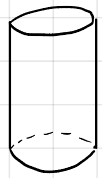
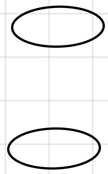
$\partial S^2 = S^2$ – граница скупа $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Став Ако су X и Y n-дим. мног. са границом и $X \approx Y$, онда је и $\partial X \approx \partial Y$.

<u>доказ</u> (скица): $h: X \to Y$ хомеоморфизам

$\Rightarrow h|_{\partial X}: \partial X \to \partial Y$ је хомеоморфизам. ∎

Пример $C \not\approx M$

$C = S^1 \times [0,1] =$  $\Rightarrow \partial C =$  $= S^1 \sqcup S^1$

$\partial C \not\approx \partial M \approx S^1 \Rightarrow C \not\approx M.$

Став Ако су X и Y мног. дим. m и n са границом, онда је $X \times Y$ мног. са границом дим. $m+n$ и

$$\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$$

Пример $C = S^1 \times [0,1]$

$\partial S^1 = \emptyset, \quad \partial [0,1] = \{0,1\}$

$\Rightarrow \partial C = (\partial S^1 \times [0,1]) \cup (S^1 \times \partial[0,1]) = \emptyset \cup S^1 \times \{0,1\} = S^1 \sqcup S^1.$

деф. Многострукост је **затворена** ако је компактна и без границе.

Пример $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2, K$ су затворене

$\mathbb{R}^2$ није затворена (јер није компактна)

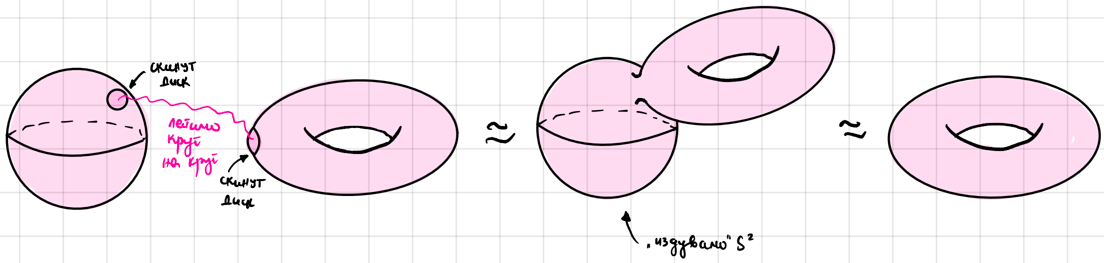
M, C нису затворене (јер имају границу)

Класификација затворених повезаних површи

За затворене повезане површи X и Y дефинишемо повезану суму X и Y (у ознаци $X \# Y$) на следећи начин:

1. са X и Y скинемо по један отворен диск
2. залепимо X и Y по хомеоморфизму граничних кружница скинутих дискова

Пример

$S^2 \# T^2 \approx$  $= T^2$

S^2 је заправо неутрал за $\#$, тј. $S^2 \# X \approx X$.

Посматрамо 2 фамилије повезаних затворених површи.

M_g површи, $g \in \mathbb{N}_0$

$M_0 \overset{\text{def}}{=} S^2$

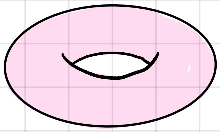
$M_1 \overset{\text{def}}{=} M_0 \# T^2 = S^2 \# T^2 \approx T^2$

$M_2 \overset{\text{def}}{=} M_1 \# T^2 \approx T^2 \# T^2$

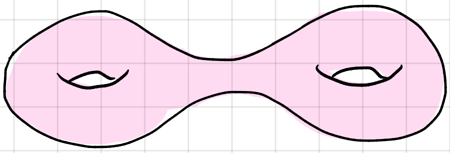
$\vdots$

$M_g \overset{\text{def}}{=} M_{g-1} \# T^2$

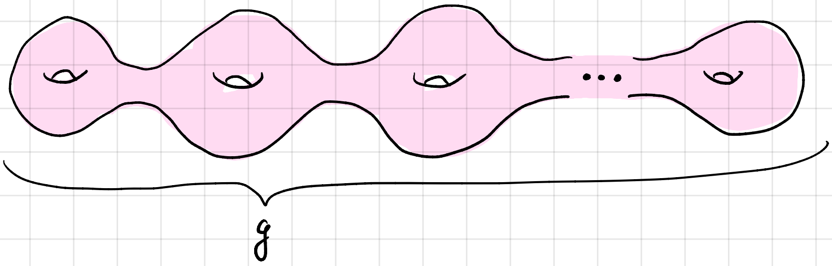
M_1 :



M_2 :

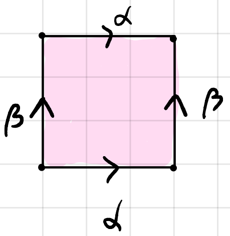


M_g :

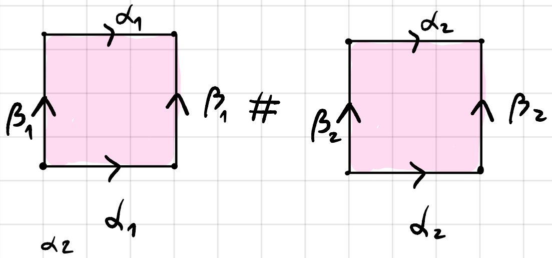


Видели смо раније количнички модел за $M_1 = T^2$ у равни:

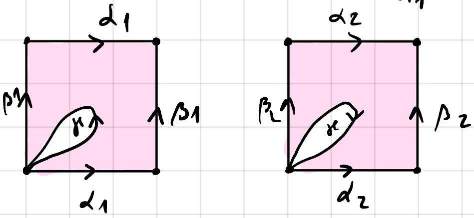
$M_1 =$



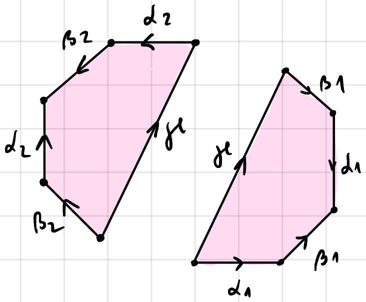
$M_2 = T^2 \# T^2 =$



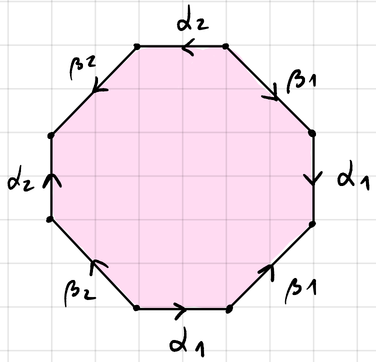
$=$



$=$

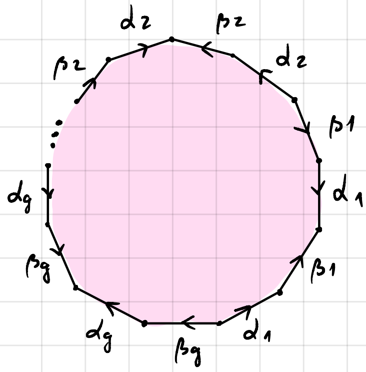


$\approx$



И генерално имамо:

$M_g \approx$



Другим речима, M_g је $4g$-тоугао са рубном идентификацијом: $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$.
Приликом ове идентификације се сва темена овог $4g$-тоугла заправо идентификују.

N_h површи, $h \in \mathbb{N}$

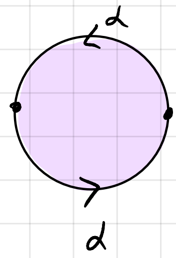
$$N_1 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}P^2$$

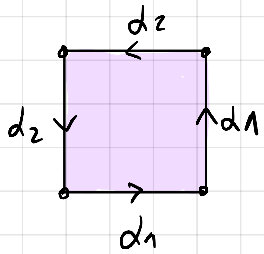
$$N_2 \overset{\text{def}}{=} N_1 \# \mathbb{R}P^2 \approx K$$

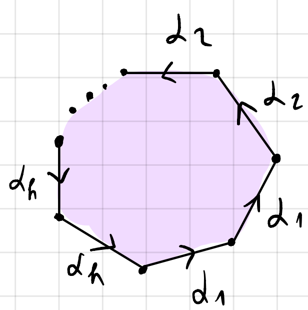
$$\vdots$$

$$N_h \overset{\text{def}}{=} N_{h-1} \# \mathbb{R}P^2$$

Површи N_h не можемо да замислимо у $\mathbb{R}^3$ као M_g, већ их представљамо количничким моделима

$N_1 =$ 

$N_2 =$ 

$N_h =$ 

тј. N_h је $2h$-тоугао са идентификацијом $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2$.
И овде се свих $2h$ темена идентификује.

Особине:

(1) површи M_g су оријентабилне

(2) површи N_h су неоријентабилне

(3) међу површима M_g и N_h нема хомеоморфних

Теорема [о класификацији повезаних затворених површи]

Нека је X повезана затворена површ. Тада

(1) X оријентабилна $\Rightarrow (\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g$,

(2) X неоријентабилна $\Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h$.