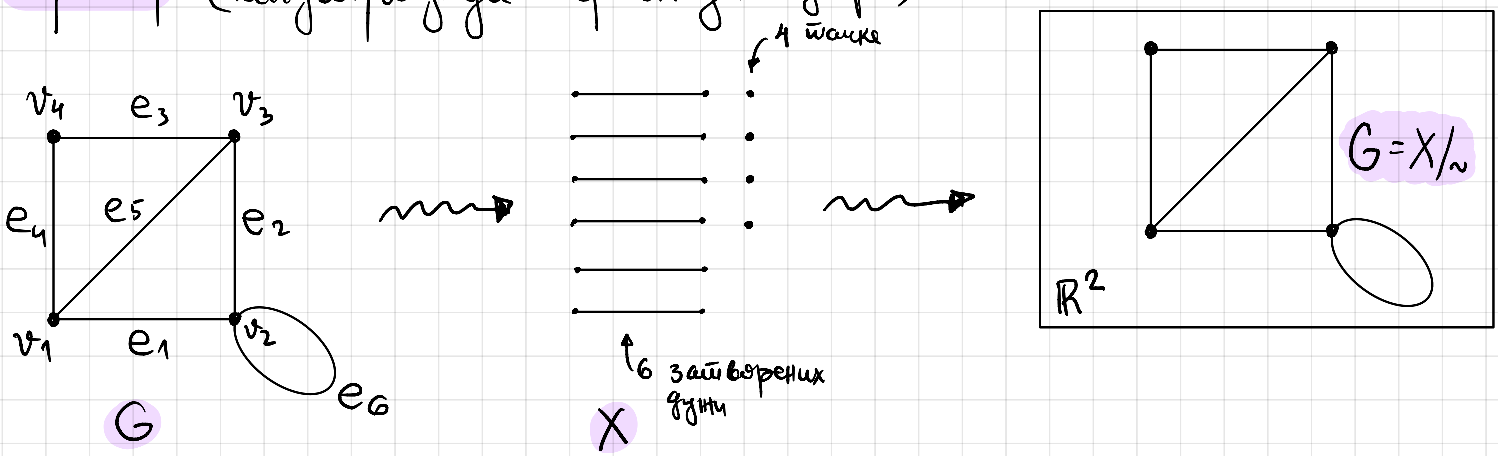
Пример (илустрација претходне деф.)

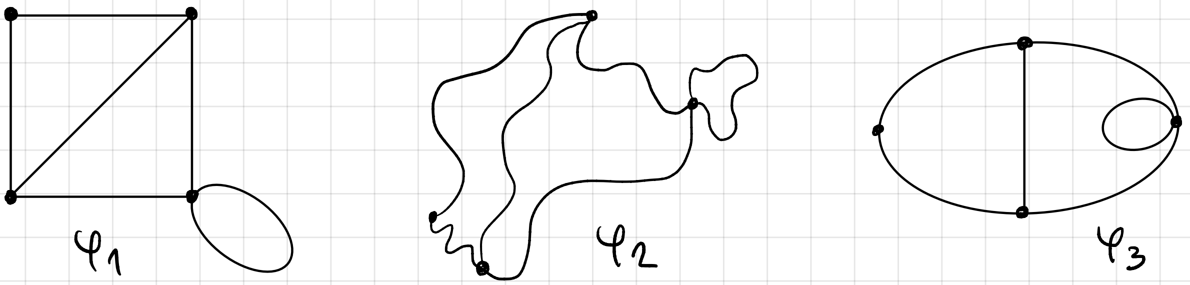


$|V| = 4, \ |E| = 6$

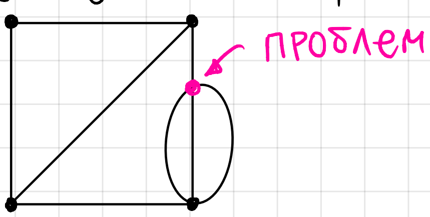
Геометријска реализација графа

деф. Геометријска реализација графа је утапање (тј. непр. и „1-1" пресликавање) тог графа у $\mathbb{R}^n$. Ако постоји утапање $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$, кажемо да се G може реализовати у $\mathbb{R}^n$.

Пример Граф се може на разне начине утопити у $\mathbb{R}^n$. нпр. за $n=2$ и G из претходног примера имамо утапања:

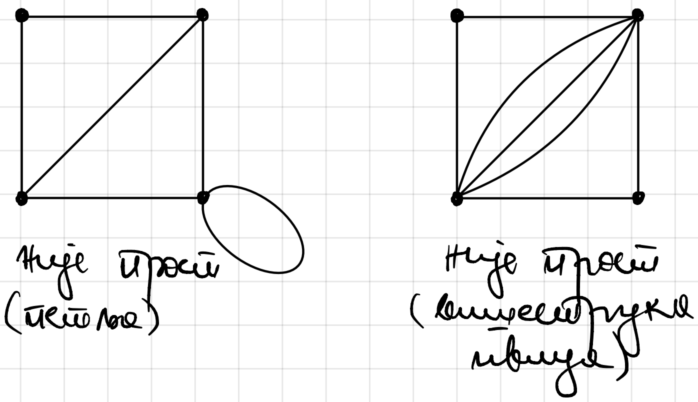


ово __није__ утапање графа G:



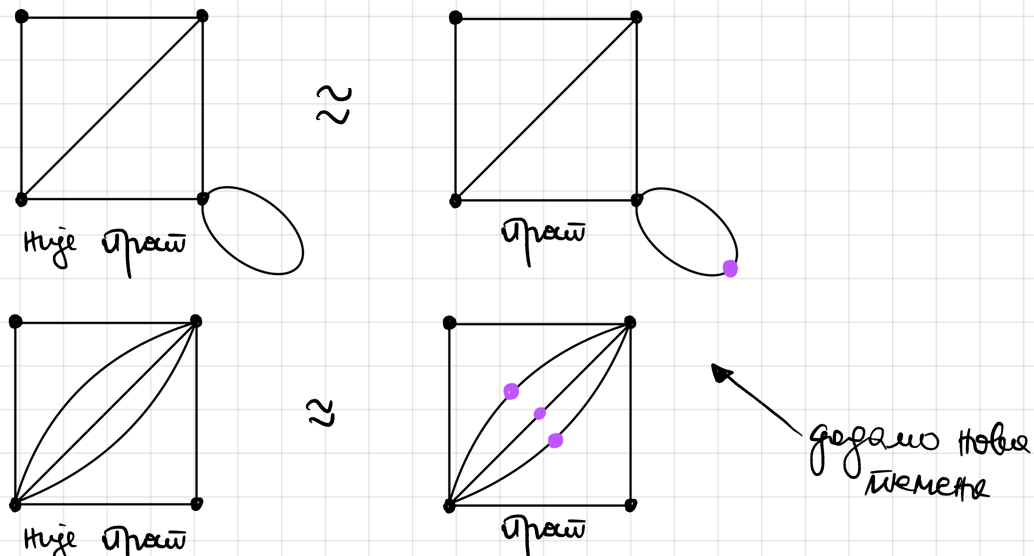
деф. Граф је **прост** ако нема петљи ни вишеструких ивица (тј. 2 темена су спојена највише једном ивицом).
Формално, $G=(V,E,f)$ је прост ако је f „1-1" и $|f(e)|=2$ за свако $e \in E$.

Пример



Лема Сваки граф је хомеоморфан неком простом графу

Пример

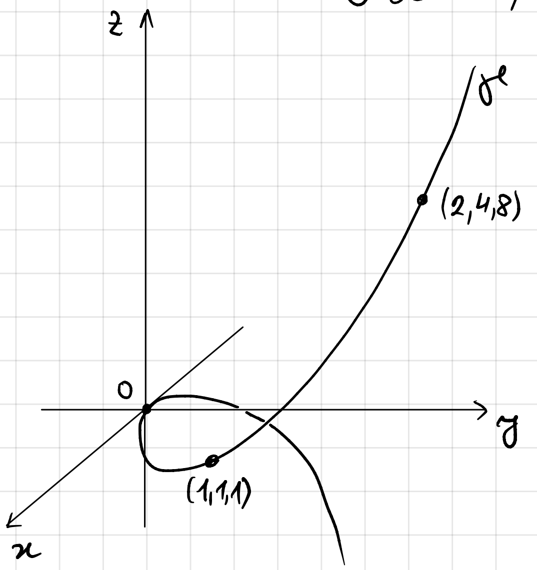


Теорема Сваки граф се може реализовати у $\mathbb{R}^3$.

доказ (скица): Нека је $G=(V,E,f)$ граф, $|V|=n$ и $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. За $i\in\{1,\dots,n\}$ уочимо тачке (i,i^2,i^3), тј.

$$(1,1,1),\ (2,4,8),\ (3,9,27),\ \dots,\ (n,n^2,n^3).$$

Ове тачке припадају кривој $\mathcal{K} = \{(t,t^2,t^3) \mid t\in\mathbb{R}\}$



Нека је $\varphi: G \to \mathbb{R}^3$ дато са

$$\varphi(v_i) := (i, i^2, i^3), \quad i=\overline{1,n}.$$

Може се показати да су сваке три тачке облика (i,i^2,i^3) неколинеарне, а сваке четири некомпланарне.

Ивицу $e\in E$ т.д. је $f(e)=\{v_i,v_j\}$ сликамо у дуж од (i,i^2,i^3) до (j,j^2,j^3). φ ће бити једно утапање, па се G може утопити у $\mathbb{R}^3$. ▨

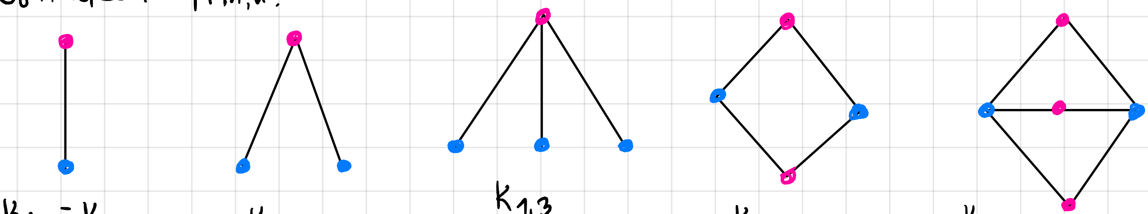
деф. Нека је $n\in\mathbb{N}$. Потпун (комплетан) граф над n темена је граф коме су сваке два темена суседна. Ознака: K_n.

Пример

K_2 K_3 K_4

деф. Нека је $m,n\in\mathbb{N}$. Бипартитни граф реда (m,n) је граф са $m+n$ темена подељених у две групе са m односно n темена. Свако теме је суседно са сваким из друге групе, док темена унутар исте групе нису суседна. Ознака: $K_{m,n}$.

Пример



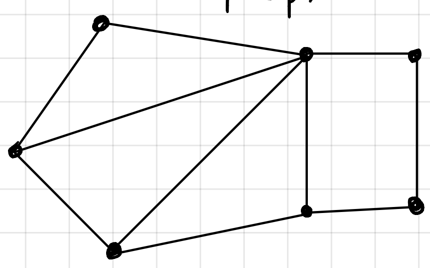
$K_{1,1}=K_2$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$

Уникурсални графови

деф. Граф $G'=(V',E',f')$ је подграф од $G=(V,E,f)$ ако је $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ и $f'=f|_{E}$

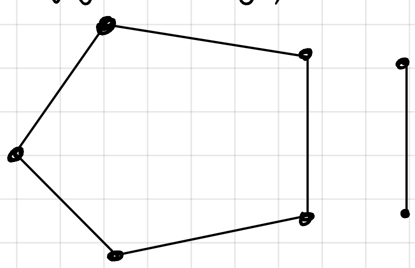
Пример

граф:



G

један подграф:



G'

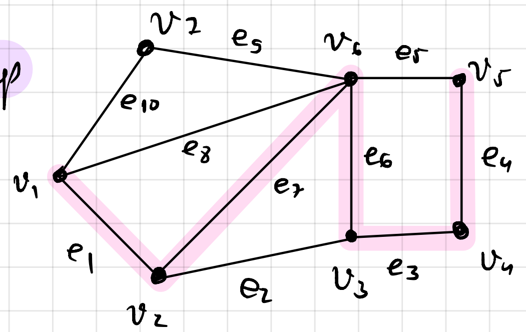
деф. Нека је $G=(V,E,f)$ граф. Ланац у G чине (коначан) низ темена тог графа $(v_1,v_2,\dots,v_{n+1})$ и низ ивица $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ тј. $f(e_i)=\{v_i,v_{i+1}\}$, $i=\overline{1,n}$. Означава се уобичајено са L и пишемо

$$L: v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_3} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} v_n \xrightarrow{e_n} v_{n+1}$$

Кажемо да L повезује темена v_1 и v_{n+1} и пишемо $v_1 L v_{n+1}$.

Дужина ланца је n (тј. бр. ивица).

Пример

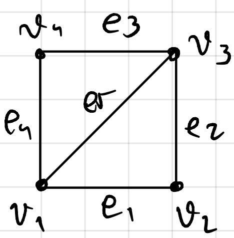


$v_1 L v_5$

$L: v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_7} v_6 \xrightarrow{e_6} v_3 \xrightarrow{e_3} v_4 \xrightarrow{e_4} v_5$

деф. Ланац је уникурсалан ако су све ивице у њему различите.

Пример

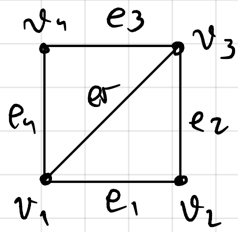


$L_1: v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$ је уникурсалан

$L_2: v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_5} v_3 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$

није уникурсалан

деф. Ланац је елементаран ако су сва темена у њему различита.

Пример 

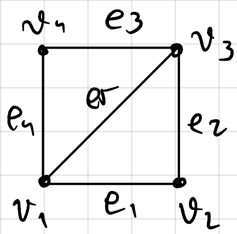
$L_1: v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$ је елементаран

$L_2: v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_5} v_3 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$

није елементаран.

Очигледно: елементаран $\Rightarrow$ уникурзалан

деф. Ланац L је цикл (контура) ако су му сва темена различита осим првог и последњег која су једнака

Пример 

$L: v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \xrightarrow{e_5} v_1$

је цикл

очигледно: $L \approx S^1$ (S^1 - кружница)

деф. Граф G је повезан ако за свака два темена v и w у том графу постоји ланац од v до w.

Став Нека је $G=(V,E,f)$ граф. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $(\forall v,w\in V)(\exists L)\ vLw$

(2) $(\forall v,w\in V)(\exists L)\ vLw$, L елементаран

(3) G је путно повезан (као тополошки пр.)

(4) G је повезан (као тополошки пр.)

Нека је $G=(V,E,f)$, $v\in V$ и

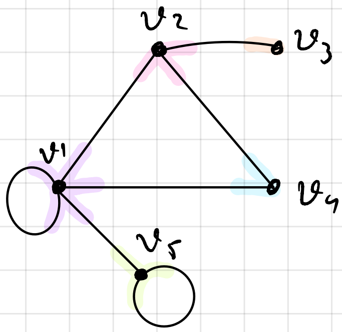
$$E_v \overset{\text{def}}{=} \{e\in E \mid v\in f(e)\}$$ – све ивице у темену v

$$P_v \overset{\text{def}}{=} \{e\in E \mid f(e)=\{v\}\}$$ – све петље у v

деф. Индекс (степен) темена v у G је

$$\operatorname{ind} v \overset{\text{def}}{=} |E_v| + |P_v|$$

Пример



$\operatorname{ind} v_1 = 5$

$\operatorname{ind} v_2 = 3$

$\operatorname{ind} v_3 = 1$

$\operatorname{ind} v_4 = 2$

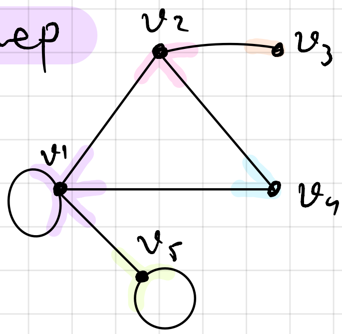
$\operatorname{ind} v_5 = 3$

Став

$$\sum_{v\in V} \operatorname{ind} v = 2|E|$$

доказ Ако је $f(e)=\{v,w\}$, онда се e рачуна двапут, једном у $\operatorname{ind} v$, једном у $\operatorname{ind} w$. Ако је $f(e)=\{v\}$, тј. e је петља, онда се e опет рачуна двапут у $\operatorname{ind} v$. ∎

Пример



$$\sum_{i=1}^{5} \operatorname{ind}(v_i) = 5+3+1+2+3 = 14 = 2\cdot\underbrace{|E|}_{7}$$

Став Ако је $a_k(G)$ број темена у v индекса k, онда

$$\sum_{v\in V} \operatorname{ind} v = a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \cdots$$

Став У сваком графу број темена непарног индекса је паран.

доказ: $2|E| = a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \cdots$

$$= \big(a_1(G) + 3a_3(G) + 5a_5(G) + \cdots\big) + \big(2a_2(G) + 4a_4(G) + \cdots\big)$$

$$= \big(a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \cdots\big) + 2\big(a_3(G) + 2a_5(G) + \cdots\big)$$

$$+ 2\big(a_2(G) + 2a_4(G) + \cdots\big)$$

$$a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \cdots = 2\Big[\big(a_3(G) + 2a_5(G) + \cdots\big) + \big(a_2(G) + 2a_4(G) + \cdots\big) + |E|\Big]$$

$\Rightarrow a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \cdots$ је паран. ∎

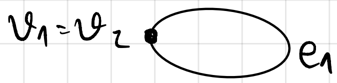
Лема Ако су у графу сва темена индекса бар 2, онда постоји цикл у том графу.

доказ: Нека је $v_1 \in V$ произвољно теме.

$$\operatorname{ind} v_1 \geq 2 \Rightarrow (\exists e_1 \in E)\ v_1 \in f(e_1)$$

(тј. v_1 је теме ивице e_1). Нека је $f(e_1) = \{v_1, v_2\}$.

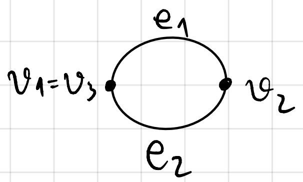
1° $v_1 = v_2$ $\Rightarrow$ e_1 је петља, па и цикл

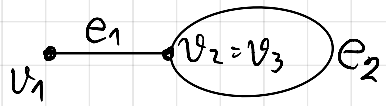


2° $v_1 \neq v_2$:

$$\operatorname{ind} v_2 \geq 2 \Rightarrow (\exists e_2 \in E)\ v_2 \in f(e_2)$$

и $f(e_2) = \{v_2, v_3\}$. Ако $v_3 \in \{v_1, v_2\}$, онда имамо цикл:

или 

или 

Ако $v_3 \notin \{v_1, v_2\}$ настављамо поступак:

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_3} \cdots \xrightarrow{e_{n-2}} v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} v_n$$

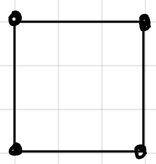
Како је V коначан, овај поступак се мора завршити (тј. у неком тренутку морамо добити $v_n \in \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$)
Нека је $v_n = v_i$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Онда имамо циклус:

$$v_i \xrightarrow{e_i} v_{i+1} \to \cdots \to v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} v_n = v_i \quad \blacksquare$$

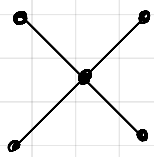
Критеријум уникурсалности

Неформално: граф је уникурсалан ако се може нацртати једним потезом без подизања оловке са папира.

нпр:



јесте



није

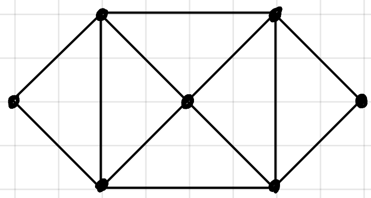
деф. Граф је **уникурсалан** ако у њему постоји уникурсалан ланац који га покрива (тј. у коме се појављују сва темена и све ивице графа.

Како је сваки ланац повезан, закључујемо да неповезани графови не могу бити уникурсални, па надаље подразумевамо да су сви графови повезани.

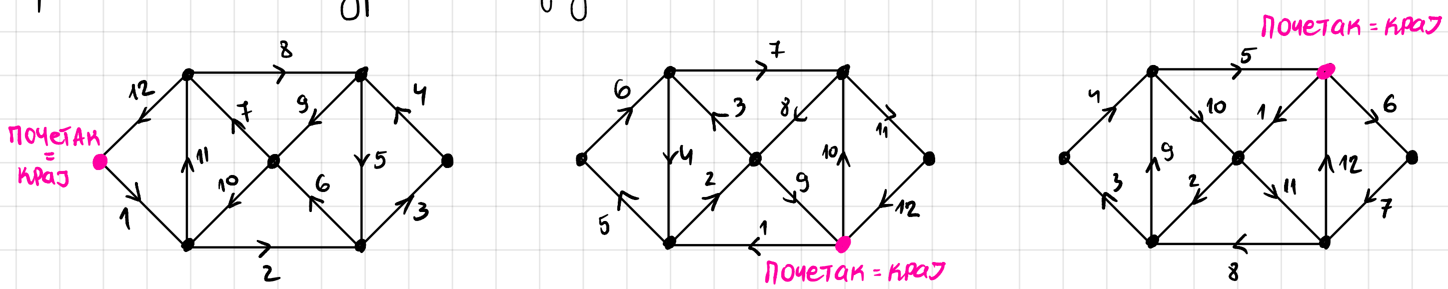
Лема Нека је $G=(V,E,f)$ повезан. Ако је $\operatorname{ind} v$ паран за свако $v\in V$, онда је G уникурсалан. Притом, за свако $v\in V$ постоји уникурсалан ланац који повезује теме v са самим собом и који покрива цео граф.

Пример Граф G је уникурсалан (индекси свих темена су парни)

G:



различита „цртања једним потезом":



Теорема Повезан граф је уникурсалан ако и само ако има највише 2 темена непарног индекса.

доказ: $\Rightarrow$: Нека је G уникурсалан и $L: v \to \dots \to w$ уникурсалан ланац који га покрива.

Нека је $u \in V \setminus \{v,w\}$. Теме u се појављује у ланцу L k пута $(k\geq 1)$ и свако појављивање изгледа овако: $\dots \xrightarrow{\sigma} u \xrightarrow{\varepsilon} \dots$

тј. за свако појављивање темена u, имамо 2 ивице (σ и ε), па је $\operatorname{ind} u = 2k$, тј. паран.

Дакле, једино v и w могу бити непарног индекса.

$\Leftarrow$: Нека је G граф са највише 2 темена непарног индекса.

1° 0 темена непарног индекса $\Rightarrow$ граф је уникурсалан на основу претходне леме

2° 1 теме непарног индекса – ово је немогуће јер је број темена непарног индекса у сваком графу паран.

3° 2 темена непарног индекса v и w

Спојимо v и w новом ивицом $\tilde{e}$. Добијени граф има сва темена парног индекса, па је уникурсалан. Нека је L уникурсалан ланац који га покрива и има почетак и крај у v.

3°1' L је облика

$$L: v \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_m} v \xrightarrow{\tilde{e}} w \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_n} v$$

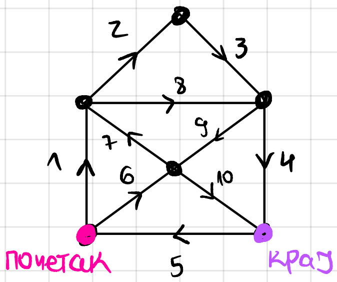
Тада је $L': w \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_n} v \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_m} v$ уникурсалан ланац који покрива G

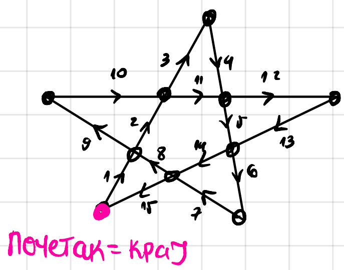
3°2' L је облика

$$L: v \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_k} w \xrightarrow{\tilde{e}} v \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_l} v$$

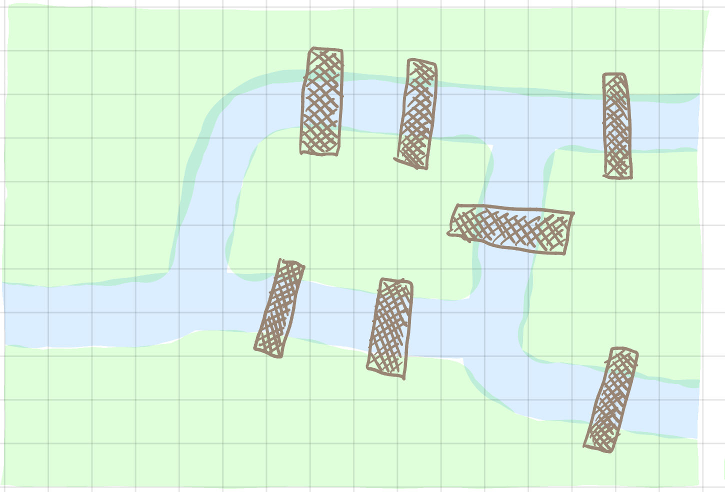
Тада је $L': v \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_l} v \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_k} w$ уникурсалан ланац који покрива G. ■

Пример



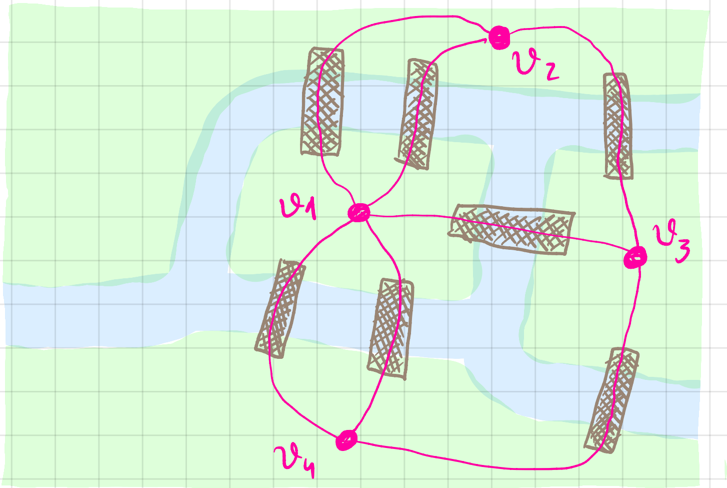


Пример Проблем 7 мостова у Кенигзбергу



Како прошетати кроз град тако да се сваки мост пређе само једном?
Ојлер је доказао да је то заправо немогуће.

Направимо граф: копна = темена, мостови = ивице



$$\left.\begin{array}{l} \text{ind } v_1 = 5 \\ \text{ind } v_2 = 3 \\ \text{ind } v_3 = 3 \\ \text{ind } v_4 = 3 \end{array}\right\}$$

имамо 4 темена непарног индекса, па граф није уникурсалан

Пример K_n је уникурсалан акко је n непаран или $n=2$.